

微積分第17回講義ノート

微積分学の基本定理 ← 微分が成り立つように決めてある

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\text{微分}} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a, b \in \mathbb{R}, \int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

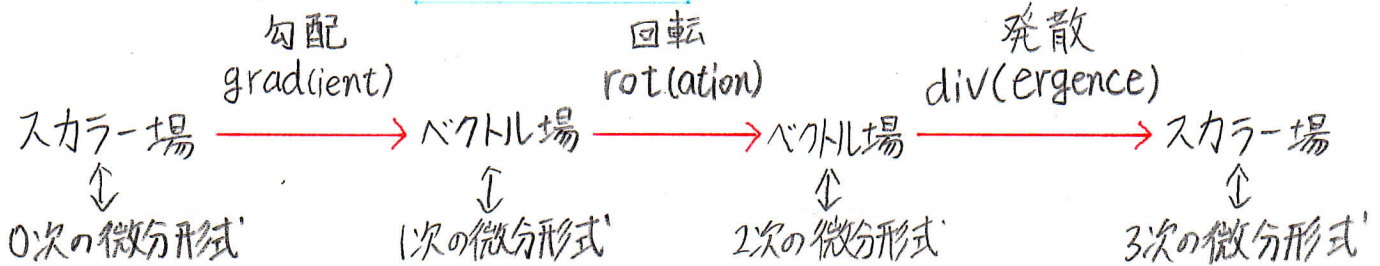
無限小の level で成り立つ → 十分

$$d \in \mathbb{D}, \int_a^{a+d} f'(x) dx = f(a+d) - f(a)$$

$$\begin{matrix} \parallel & \parallel \\ f'(a)d & d \end{matrix}$$

$$\int_a^{a+d} g(x) dx = g(a)d$$

Kock-Lawvere の公理
($\exists! d \in \mathbb{R}$)



$$f = f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$$

$$\downarrow$$

$$f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, a_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$dx: a_i \mapsto a_1, dy: a_i \mapsto a_2, dz: a_i \mapsto a_3$$

$$(f_1(x) dx + f_2(x) dy + f_3(x) dz)(a_i)$$

$$= f_1(x) a_1 + f_2(x) a_2 + f_3(x) a_3 = f(x) \cdot a_i$$

$$f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$$

$$\downarrow$$

$$f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy$$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$dy \wedge dz = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$dz \wedge dx = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_i \times b_j$$

$$dx \wedge dy = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$(a_i, b_j) = f_1(x) \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + f_2(x) \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + f_3(x) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= f(x) \cdot (a_i \times b_j)$$

スカラー場 $\xrightarrow{\text{grad}}$ ベクトル場 $\xrightarrow{\text{微分演算}}$ $\gamma: [a, b] \xrightarrow{\text{曲線}} \mathbb{R}^3$
 0次の微分形式 $\xrightarrow{\varphi}$ 1次の微分形式

$$\int_{\gamma} \underbrace{(\text{grad } \varphi)}_{(d\varphi) \text{ 1次の微分形式}} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

無限小の level で成り立つように決めれば (1)

$$x \xrightarrow{ad} x+ad$$

$$\int_{\gamma} (\text{grad } \varphi) \cdot d\mathbf{r} = \frac{\varphi(x+ad) - \varphi(x)}{ad}$$

$\varphi'(x)(a)$
 φ' : 1次の微分形式

$$x \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x) \end{pmatrix}$$

Kock-Lawvere の公理

$\exists! d \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}^3$
 $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}^3$
 $\varphi'(x)(a)d$

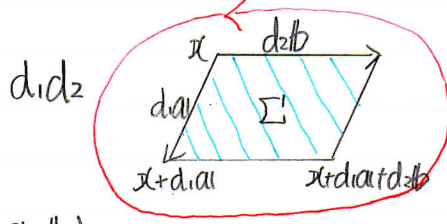
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) & \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x) & \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

ベクトル場 $\xrightarrow{\text{rot}}$ ベクトル場

Σ 境界

1次の微分形式 \xrightarrow{d} 2次の微分形式

$$a \mapsto f(x) \cdot a$$



$$\int_{\partial \Sigma} f \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Sigma} (\text{rot } f) \cdot d\mathbf{S}$$

線積分 \quad 面積分

$$(a, b) \mapsto$$

$$\int_{\partial \Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega$$

$$\omega = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad d\omega(x)$$

$$(a, b) \mapsto d\omega(x)(a, b) d_1 d_2$$

2次の交代形式