2015年10月15日(木)

微積分第16回講義ノート

古典的ベクトル解析

力の場 } ベクトル場
流れの場 }

空間($\mathbb{R}^3$)の各点にベクトルを対応させる

$\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \mathbb{e}_3$ (標準基底)

$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\mathbb{e}_1 + a_2\mathbb{e}_2 + a_3\mathbb{e}_3$ (一意的)

ベクトル場

$\mathbb{f} = f_1\mathbb{e}_1 + f_2\mathbb{e}_2 + f_3\mathbb{e}_3$

$f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq 3)$

platonic
plagmatic (近代科学)
測定

1次の微分形式 ⟷ 力の場
空間の各点に
1次の交代形式 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 線型写像
を対応させる

2次の微分形式 ⟷ 流れの場
空間の各点に
2次の交代形式
を対応させる

$\varphi : \underset{\mathbb{a}}{\mathbb{R}^3} \times \underset{\mathbb{b}}{\mathbb{R}^3} \to \mathbb{R}$ 二重線型

$\varphi(\mathbb{a}, \mathbb{b})$

$\varphi(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = -\varphi(\mathbb{b}, \mathbb{a})$ 交代性 (alternating)

$\frac{dy}{dx}$ 1次の交代形式 (線型写像)

$dx : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto a_1 \in \mathbb{R}$

$dy : \qquad \mapsto a_2 \in \mathbb{R}$

$dz : \qquad \mapsto a_3 \in \mathbb{R}$

線型空間 基底

1次の交代形式 3次元

$a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz$ (一意的)

$\updownarrow$ 対応

$a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$

ベクトル

$f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$ 1次の微分形式

$\Updownarrow$

$f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$ 面積分

$\updownarrow$ ベクトル場

$f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$dy \wedge dz \quad \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

$dz \wedge dx \qquad \mapsto \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$

$dx \wedge dy \qquad \mapsto \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

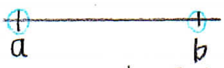
$a_1 dy \wedge dz + a_2 dz \wedge dx + a_3 dx \wedge dy$ (一意的)

$f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy$

微積分学の基礎定理

$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$ 構造

境界 $-$ $\longrightarrow$ $+$ 積分



無限小のlevel

微分

ベクトル場 $\xrightarrow{\text{rot}}$ ベクトル場 rotation (回転)

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

1次の微分形式 $\xRightarrow{\text{微分}}$ 2次の微分形式

ω (オメガ) $d\omega$

曲面 Σ

$\int_{\partial \Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega$ Stokesの定理

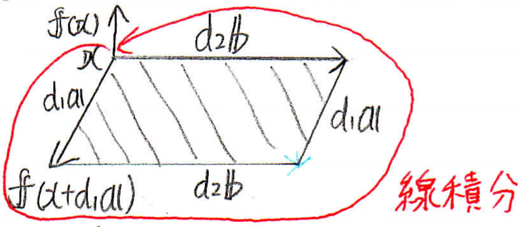
境界

無限小のlevelで成り立つようにすればいい

$d_1, d_2 \in D$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$

$\mathbf{f} = f_1\mathbf{e}_1 + f_2\mathbf{e}_2 + f_3\mathbf{e}_3$

$\omega = f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz$



$d\omega$

$\mathbf{f}(\mathbf{x})\cdot d_1\mathbf{a} + \mathbf{f}(\mathbf{x}+d_1\mathbf{a})\cdot d_2\mathbf{b} - \mathbf{f}(\mathbf{x}+d_2\mathbf{b})\cdot d_1\mathbf{a} - \mathbf{f}(\mathbf{x})\cdot d_2\mathbf{b}$

$= \{\mathbf{f}(\mathbf{x}+d_1\mathbf{a}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\} d_2\mathbf{b} - \{\mathbf{f}(\mathbf{x}+d_2\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\} d_1\mathbf{a}$

$= \{\mathbf{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{a})d_1) d_2\mathbf{b} - \mathbf{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{b}) d_2 \cdot d_1\mathbf{a}$

$= \mathbf{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} - \mathbf{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}\} d_1 d_2$

$\varphi(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} - \mathbf{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{b})\mathbf{a}$

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\mathbf{b}$を固定　$\mathbf{a}$の代わりに $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$

$\mathbf{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\cdot\mathbf{b} - \mathbf{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)$

$= \{\mathbf{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{a}_1) + \mathbf{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{a}_2)\}\mathbf{b} - \{\mathbf{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{b})\mathbf{a}_1 + \mathbf{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{b})\mathbf{a}_2\}$

$= \varphi(\mathbf{a}_1,\mathbf{b}) + \varphi(\mathbf{a}_2,\mathbf{b})$

$\varphi(\mathbf{b},\mathbf{a}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{b})\cdot\mathbf{a} - \mathbf{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = -\varphi(\mathbf{a},\mathbf{b})$　　交代

$\mathbf{a} = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1$

2次の交代形式

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$\varphi = \alpha_1\,dy\wedge dz + \alpha_2\,dz\wedge dx + \alpha_3\,dx\wedge dy$

$\varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

$dy\wedge dz(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) = 1$

$dz\wedge dx(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) = 0$

$dx\wedge dy(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) = 0$

$\varphi(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) = \mathbf{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{e}_3 - \mathbf{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{e}_3)\cdot\mathbf{e}_2$　　$\alpha_2 = \varphi(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1)$

$\mathbf{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{e}_2) = \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial y}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{e}_3 - \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial z}(\mathbf{x})(\mathbf{e}_2) = \frac{\partial f_3}{\partial y}(\mathbf{x}) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(\mathbf{x})$　　$\alpha_3 = \varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$

擬似ベクトル

Report
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$