

微積分第15回講義ノート

ベクトル解析 空間 \mathbb{R}^3
 ベクトル場 力の場, 流れの場
 スカラー場 温度, 湿度

$$f_1(x)\mathbf{e}_1 + f_2(x)\mathbf{e}_2 + f_3(x)\mathbf{e}_3$$

$$f_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad (i=1,2,3)$$

$$dx \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow x$$

$$dy \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow y$$

$$dz \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow z$$

$$f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

同-視

platonc
 pragmatic (近代科学)
 測定

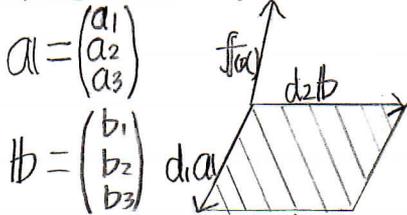
$$d \in D \quad x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$$

$$f(x) \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} x \\ da \end{matrix} \quad \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \cdot da = df(x) \cdot a$$

$$a \in \mathbb{R}^3 \longmapsto f(x) \cdot a \quad \begin{matrix} \text{線形写像} \\ \text{1次の交代形式} \\ \text{1次の微分形式} \end{matrix}$$

流れの場



$d_1, d_2 \in D$ 2次の微分形式 線形空間 3次元
 (2次の交代形式)の全体

平行六面体
 体積

$$(a, b) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longmapsto f(x) \cdot (a \times b) \in \mathbb{R}$$

$$f(x) \cdot (da_1 \times da_2)$$

↑ 内積 ↑ ベクトル積

二重線形
 交代性

$$(a, b) \longmapsto \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} dy \wedge dz$$

$$\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} dz \wedge dx$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} dx \wedge dy$$

$$f_1(x) dy \wedge dz + f_2(x) dz \wedge dx + f_3(x) dx \wedge dy$$

$$f_1(x)\mathbf{e}_1 + f_2(x)\mathbf{e}_2 + f_3(x)\mathbf{e}_3 \quad \text{1次の微分形式}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

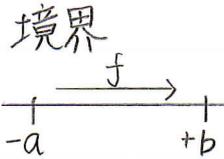
$$= f_1(x) \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + f_2(x) \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + f_3(x) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= f_1(x) (dy \wedge dz) + f_2(x) (dz \wedge dx) + f_3(x) (dx \wedge dy)$$

線積分 Stokes の定理
 面積分
 微積分学の基本定理 (高校)
 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad F = f'$
 $[a, b]$ 区間

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

定積分



$$F(b) - F(a)$$

微分

細分



$$\begin{aligned} & \dots \\ & F(a_{i+2}) - F(a_{i+1}) \\ & F(a_{i+1}) - F(a_i) \\ & F(a_i) - F(a_{i-1}) \\ & \dots \end{aligned}$$

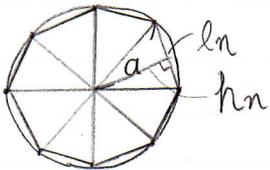
$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx \right)$$

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx = \int_{a_i}^{a_i + d_i} f(x) dx = F(a_i + d_i) - F(a_i)$$

微分の定義

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

アルキメデスの取)尽くし法



正n角形の面積: $n \cdot \frac{1}{2} \ln \cdot hn = \frac{1}{2} hn (n \ln)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} hn = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln = 2\pi \quad \text{よ)} \quad \left(\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} hn (n \ln) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi a^2 = \pi a^2 \leftarrow \text{円の面積}$$