No. 1
Date 2015年7月23日(木)

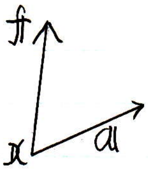
微積分第13回講義ノート

ベクトル解析　　舞台 $\mathbb{R}^3$ (空間)

ベクトル場 { 力の場 / 流れの場 }

スカラー場

pragmatic 立場
測定 $d \in D$



$$f \cdot (d a) = d f \cdot a$$

$a \in \mathbb{R}^3 \longmapsto f \cdot a \in \mathbb{R}$　　$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ の線型写像

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 線型写像

基底

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(a) = \varphi(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) = a_1 \varphi(e_1) + a_2 \varphi(e_2) + a_3 \varphi(e_3)$$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \longmapsto a_1 dx$$

$L(\mathbb{R}^3 ; \mathbb{R})$ 3次元空間

$\longmapsto a_2 dy$ 基底

$\longmapsto a_3 dz$

線型和

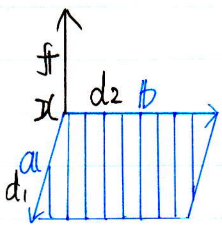
$$\varphi = \varphi(e_1) dx + \varphi(e_2) dy + \varphi(e_3) dz$$

$a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$　ベクトル
$\updownarrow$
$a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz$　線型写像 (1次の交代形式)

$f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$　ベクトル場
$\updownarrow$
$f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$　1次の微分形式

$d_1, d_2 \in D$
測定
平行四辺形
線型写像
(1次の交代形式)



ベクトル場
単位時間　横切る
$f \cdot (d_1 a \times d_2 b)$
$= d_1 d_2 f \cdot (a \times b)$

水の流れの場

$(a, b) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto f(a, b) \in \mathbb{R}$
{ 2重線型 / 交代(alternating) / 2次の交代形式 }

$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\mathbb{e}_1 + a_2\mathbb{e}_2 + a_3\mathbb{e}_3$$

$$\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1\mathbb{e}_1 + b_2\mathbb{e}_2 + b_3\mathbb{e}_3$$

$\varphi = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\begin{cases} \text{2重線型} \\ \text{交代} \end{cases}$　$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 3次元　$\wedge$：くさび型積

$$\varphi(\mathbb{a},\mathbb{b}) = \varphi(a_1\mathbb{e}_1 + a_2\mathbb{e}_2 + a_3\mathbb{e}_3,\ b_1\mathbb{e}_1 + b_2\mathbb{e}_2 + b_3\mathbb{e}_3)$$

$$(dx \wedge dy)(\mathbb{a},\mathbb{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1b_1\varphi(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_1) + a_1b_2\varphi(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_2) + a_1b_3\boxed{\varphi(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_3)}$$
$$+ a_2b_1\varphi(\mathbb{e}_2,\mathbb{e}_1) + a_2b_2\varphi(\mathbb{e}_2,\mathbb{e}_2) + a_2b_3\cancel{\varphi(\mathbb{e}_2,\mathbb{e}_3)}$$
$$+ a_3b_1\boxed{\varphi(\mathbb{e}_3,\mathbb{e}_1)} + a_3b_2\cancel{\varphi(\mathbb{e}_3,\mathbb{e}_2)} + a_3b_3\varphi(\mathbb{e}_3,\mathbb{e}_3)$$

$\varphi(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_1) = -\varphi(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_1)$ より
$2\boxed{\varphi(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_1) = 0}$

$$= (a_1b_2 - a_2b_1)\varphi(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_2) + (a_2b_3 - a_3b_2)\varphi(\mathbb{e}_2,\mathbb{e}_3) + (a_3b_1 - a_1b_3)\varphi(\mathbb{e}_3,\mathbb{e}_1)$$

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longmapsto a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$
$$\longmapsto a_2b_3 - a_3b_2 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$
$$\longmapsto a_3b_1 - a_1b_3 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

$\varphi = \alpha_1\, \underline{dy \wedge dz} + \alpha_2\, \underline{dz \wedge dx} + \alpha_3\, \underline{dx \wedge dy}$　2次の微分形式

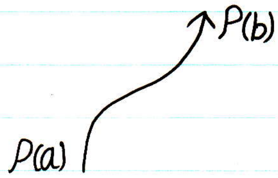
ベクトル $\longleftrightarrow$ $a_1\, dy \wedge dz + a_2\, dz \wedge dx + a_3\, dx \wedge dy$　2次の交代形式
1次の交代形式
ベクトル場 $\longleftrightarrow$ $f_1\, dy \wedge dz + f_2\, dz \wedge dx + f_3\, dx \wedge dy$　2次の微分形式
1次の微分形式

積分

スカラー場 = 0次の微分形式

ベクトル場 $\mathbb{f}(x)$

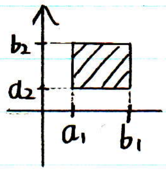
曲線 $p:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^3$



$$\int_a^b \mathbb{f}(p(t))\cdot p'(t)\,dt$$ 仕事量

<u>線積分</u>

$$\gamma:[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\longrightarrow\mathbb{R}^3$$
$$\underset{s}{\rotatebox{90}{$\in$}}\qquad\qquad\underset{t}{\rotatebox{90}{$\in$}}$$



$$\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} \mathbb{f}(\gamma(s,t))\cdot\left(\frac{\partial\gamma}{\partial s}(s,t)\times\frac{\partial\gamma}{\partial t}(s,t)\right)ds\,dt$$

<u>面積分</u>

<u>report</u>

$\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ 三重線型
交代

$\varphi(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})=\alpha\underbrace{|\mathbb{a}\ \mathbb{b}\ \mathbb{c}|}_{\text{行列式}}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ を示せ.

(hint)

$$\mathbb{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=a_1\mathbb{e}_1+a_2\mathbb{e}_2+a_3\mathbb{e}_3$$

$$\mathbb{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=b_1\mathbb{e}_1+b_2\mathbb{e}_2+b_3\mathbb{e}_3$$

$$\mathbb{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=c_1\mathbb{e}_1+c_2\mathbb{e}_2+c_3\mathbb{e}_3$$

$\varphi(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})$ の計算で 項6つになる.