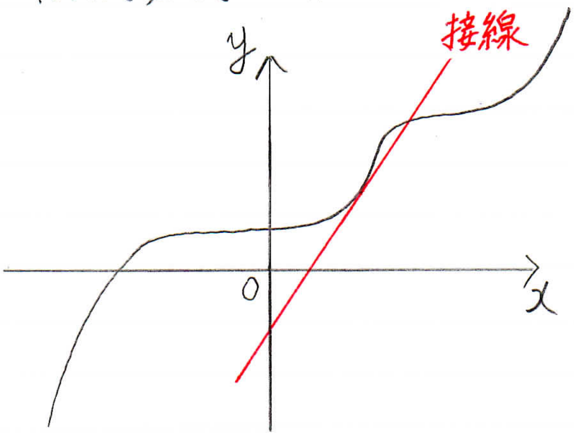
No. 1
Date 2015年 4月13日(月)

微積分第1回講義ノート

高校数学の微分



$y=f(x)$
曲線

☆微分の実用例(物理)

距離 $\xrightarrow{\text{微分}}$ 速度 $\xrightarrow{\text{微分}}$ 加速度

微積分について

17C Newton 力学
万有引力の法則

18C 黄金時代の微積分
こっちを使う!

19C 現代の微積分

微分係数の定義

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ ← 接線の傾き

$$\boxed{h f'(x_0) = f(x_0+h)-f(x_0)}$$

今の微積分では $h=0$ の場合成り立つ

17〜18C では h が十分小さければ成り立つ

$D=\{d \in \mathbb{R} \mid d^2=0\} \neq \{0\}$ (意味:2乗すると0になる実数 d 全体)

$da = f(x_0+d)-f(x_0)\ (\forall d \in D)(\exists! a \in \mathbb{R})$

$f(x_0+d) = f(x_0)+ad\ (\forall d \in D)(\exists! a \in \mathbb{R})$

※用語説明

$\{\ \}$: 集合を表す

$\forall$: 任意 (for all)

$\exists$: 存在する (existence)

$\exists!$: ただ1つ存在する

$\int$ (インテグラル) は Summation (総和) からきてる

微分の公式　(i) 現代の微積分　(ii) 昔の微積分

右の式を使う！

$$\boxed{\begin{aligned} f(x_0+d) &= f(x_0)+f'(x_0)d \\ g(x_0+d) &= g(x_0)+g'(x_0)d \\ &\qquad (\forall d \in D) \end{aligned}}$$

$(f+g)' = f' + g'$

(i) $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-\{f(x_0)+g(x_0)\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

$$= f'(x_0)+g'(x_0)$$

(ii) $$f(x_0+d)+g(x_0+d) = f(x_0)+f'(x_0)d+g(x_0)+g'(x_0)d$$
$$= f(x_0)+g(x_0)+\{\underline{f'(x_0)+g'(x_0)}\}d$$

$(fg)' = f'g + fg'$ (Leibnizの公式)

(i) $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \underline{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}\, g(x_0+h) + \lim_{h\to 0} f(x_0)\, \underline{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}$$

$$= \underline{f'(x_0)}\,g(x_0) + f(x_0)\,\underline{g'(x_0)}$$

(ii) $$f(x_0+d)\,g(x_0+d) = \{f(x_0)+f'(x_0)d\}\{g(x_0)+g'(x_0)d\}$$
$$= f(x_0)g(x_0)+d\{\underline{f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)}\}+\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{d^2}f'(x_0)g'(x_0)$$

Leibnizは天才ではなく、ただのおじさん！

合成関数 $((g\circ f)(x)=g(f(x)))$ の微分

(i) $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h}$

$\displaystyle =\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{f(x_0+h)-f(x_0)}\cdot\boxed{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}\to f'(x_0)$

ここで、$f(x_0+h)-f(x_0)=H$ とすると $f(x_0+h)=f(x_0)+H$, $h\to 0\Rightarrow H\to 0$ より

$\displaystyle \lim_{H\to 0}\frac{g(f(x_0)+H)-g(f(x_0))}{H}f'(x_0)$

$=g'(f(x_0))f'(x_0)$

(ii) $g(f(x_0+d))=g(f(x_0)+\underbrace{\overset{\alpha}{f'(x_0)}d}_{=d'})$

$f'(x_0)d=d'$ とすると ―(※)

$g(f(x_0)+d')$

$=g(f(x_0))+g'(f(x_0))d'$

$=g(f(x_0))+\underline{g'(f(x_0))f'(x_0)}d$

(※) $d\in D\Rightarrow \alpha d\in D$

$\because (\alpha d)^2=\alpha^2 \underset{\overset{\parallel}{0}}{d^2}=0$