ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

KAZUAKI TAIRA

Sur l'existence de processus de diffusion

Annales de l'institut Fourier, tome 29, nº 4 (1979), p. 99-126.

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_4_99_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 4 (1979), 99-126.

SUR L'EXISTENCE DE PROCESSUS DE DIFFUSION

par Kazuaki TAIRA

0. Introduction.

Soit D un domaine borné d'un espace euclidien $\mathbf{R}^N$, $\bar{D}$ étant une variété compacte à bord ∂D de classe C^∞, de dimension N.

On introduit les définitions suivantes (cf. [1], [8]) :

DÉFINITION 0.1. — *Soit* $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ *un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés sur l'espace* $C(\bar{D})$ *des fonctions à valeurs réelles et continues sur* $\bar{D}$. *On dira que* $\{T_t\}$ *est un* semi-groupe de Feller *sur* $\bar{D}$ *si, pour tout* $t \geqslant 0$, $f \in C(\bar{D})$ *et* $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ *sur* $\bar{D} \Rightarrow 0 \leqslant T_t f(x) \leqslant 1$ *sur* $\bar{D}$, *i.e., si les* $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ *sont positifs et contractants sur* $C(\bar{D})$.

DÉFINITION 0.2. — *Soit* A *le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller* $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ *sur* $\bar{D}$. *On dira que* $\{T_t\}$ *est un* Δ-processus de diffusion *sur* $\bar{D}$ *si* A *satisfait aux conditions suivantes :*

a) $Au = \Delta u$ *pour toute* $u \in \mathcal{D}(A) \cap C^2(\bar{D})$, *où*

$$\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \cdots + \partial^2/\partial x_N^2$$

et $\mathcal{D}(A)$ *est le domaine de définition de* A.

b) A *est l'extension fermée minimale dans* $C(\bar{D})$ *de* Δ *restreint à* $\mathcal{D}(A) \cap C^2(\bar{D})$.

Nous nous intéressons alors au :

Problème I. — Trouver tous les Δ-processus de diffusion sur $\bar{D}$.

Remarque 0.3. — Dans le cas où $N = 1$, ce problème a été résolu par Feller, Dynkin, Itô-Mckean et Ray. On suppose donc que $N \geqslant 2$.

Ventcel' [13] a démontré que, si A est le générateur infinitésimal d'un Δ-processus de diffusion $\{T_t\}_{t \geqslant 0}$ sur $\bar{D}$, il existe un opérateur frontière Γ d'ordre 2 de type intégro-différentiel à coefficients mesurables bornés sur ∂D et une fonction mesurable δ bornée et positive sur ∂D tels que, pour toute $u \in \mathscr{D}(A) \cap C^2(\bar{D})$,

$$Lu(x') \equiv \Gamma u(x') - \delta(x')\Delta u(x') = 0, \qquad x' \in \partial D$$

(cf. [1], th. XIII). La relation L sera appelée la *condition aux limites de Ventcel'*. Nous renvoyons à [1], chapitre II pour les détails sur la forme de Γ.

Nous sommes alors ramenés au

Problème II. — Savoir pour quelle condition aux limites de Ventcel' L il existe un Δ-processus de diffusion.

Dans cet article, on considère le problème II lorsque Γ est un opérateur *différentiel* à coefficients C^∞ sur ∂D et δ est C^∞ sur ∂D, et on donne des conditions suffisantes pour l'existence de Δ-processus de diffusion $\{T_t\}_{t \geqslant 0}$ sur $\bar{D}$, en généralisant des résultats de Bony-Courrège-Priouret [1] au cas où les conditions aux limites de Ventcel' L sont *non-coercives*. Les résultats obtenus sont résumés au paragraphe suivant.

D'après une variante du théorème de Hille-Yosida tenant compte du principe du maximum (cf. [1], [8]), on ramène le problème de la construction de Δ-processus de difusion $\{T_t\}$ sur $\bar{D}$ à la résolution de problèmes aux limites suivants :

$$(*)_0 \qquad \begin{cases} (\alpha - \Delta)u = f & \text{dans} \quad D, \\ Lu = 0 & \text{sur} \quad \partial D, \end{cases}$$

où $\alpha > 0$ est une constante.

En utilisant les résultats obtenus dans [11] et [12], on étudie le problème $(*)_0$ dans le cadre des espaces de *Sobolev* et on démontre que, pour tout $\alpha > 0$, le problème $(*)_0$ admet une solution unique $u \in H^{s-1}(D)$ ($s \geqslant 3$) pour toute $f \in H^{s-2}(D)$; ce qui, compte tenu du lemme de Sobolev, montre que, pour tout $\alpha > 0$, le problème $(*)_0$ admet une solution unique $u \in C^\infty(\bar{D})$ pour toute $f \in C^\infty(\bar{D})$.

En raisonnant comme dans la démonstration du théorème XIX de [1], on obtient les Δ-processus de diffusion cherchés.

Je tiens à remercier B. Helffer dont les conseils m'ont permis de simplifier ou même totalement de modifier certaines démonstrations initiales.

Le plan de cet article est le suivant :

1. Énoncé des résultats.
2. Opérateurs de Green et harmonique.
3. Construction de processus de diffusion.
4. Démonstration du théorème 1 : cas du second ordre.
5. Démonstration des théorèmes 2, 3 et 4 : cas du premier ordre.

Quelques résultats de cet article sont annoncés dans [10].

1. Énoncé des résultats.

1.1. On va introduire et étudier une classe de conditions aux limites de Ventcel' de type différentiel à coefficients C^∞ sur le bord.

On ne considère que des cartes locales (U,χ) de $\bar{D}$ pour lesquelles $\chi(U)$ est un ouvert de

$$\overline{\mathbf{R}^N_+} = \{z = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbf{R}^N; \quad z_N \geqslant 0\},$$

la coordonnée x_N $(\chi = (x_1, x_2, \ldots, x_N))$ définissant le bord ∂D :

$$\begin{cases} p \in U \cap D \Leftrightarrow p \in U \quad \text{et} \quad x_N(p) > 0; \\ p \in U \cap \partial D \Leftrightarrow p \in U \quad \text{et} \quad x_N(p) = 0. \end{cases}$$

Soit $(x',\xi') = (x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N-1})$ des coordonnées locales du fibré cotangent $T^*\,\partial D$ à ∂D. La condition aux limites de Ventcel' L que l'on étudiera dans la suite est la forme (cf. [1], (II.3.1), (II.2.16) et (II.2.1)) :

$$\begin{aligned} (1.1)\quad Lu(x') &= \mu(x')\frac{\partial u}{\partial n}(x') + Qu(x') - \delta(x')\,\Delta u(x') \\ &\equiv \mu(x')\frac{\partial u}{\partial n}(x') + \left[\sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}(x')\right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x')\frac{\partial u}{\partial x_i}(x') + \gamma(x')u(x')\right] - \delta(x')\,\Delta u(x')(u \in C^2(\bar{D})), \end{aligned}$$

où

– n est la normale unitaire intérieure à ∂D,

– μ est une fonction positive de $C^\infty(\partial D)$:

$$(1.2) \qquad \mu(x') \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \partial D,$$

– ou bien Q est un opérateur différentiel du *second* ordre à coefficients C^∞ réels sur ∂D ; la matrice $(\alpha^{ij}(x'))_{1 \leqslant i,j \leqslant N-1}$ est symétrique et le symbole principal $q_2(x',\xi')$ de $-Q$

$$q_2(x',\xi') = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\xi_i\xi_j$$

est positif sur le sous-espace des covecteurs non nuls du fibré cotangent $T^*\,\partial D\backslash 0$:

$$q_2(x',\xi') = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\xi_i\xi_j \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad T^*\,\partial D\backslash 0, \tag{1.3}$$

– ou bien Q est un opérateur différentiel du *premier* ordre à coefficients C^∞ réels sur ∂D,

– le terme γ d'ordre 0 de Q est une fonction négative de $C^\infty(\partial D)$:

$$\gamma(x') \leqslant 0 \quad \text{sur} \quad \partial D, \tag{1.4}$$

– δ est une fonction positive de $C^\infty(\partial D)$:

$$\delta(x') \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \partial D. \tag{1.5}$$

On dira que la condition aux limites de Ventcel' L est du second ordre (resp. du premier ordre) si Q est du second ordre (resp. du premier ordre).

Remarque 1.1. – Dans (1.1), $\mu(x')\dfrac{\partial u}{\partial n}(x')$ est un terme de réflexion ;

$$\sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}(x') + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x')\frac{\partial u}{\partial x_i}(x')$$

est un terme de diffusion sur le bord ∂D ; $\gamma(x')u(x')$ est un terme d'absorption et $\delta(x')\,\Delta u(x')$ est un terme de viscosité.

Nous introduisons une définition qui nous servira dans la suite :

DÉFINITION 1.2. (cf. [1], § II.2.8). – *On dira que* L *est* transversal *sur* ∂D *si, en tout point* $x' \in \partial D$ *où* $\delta(x')$ *est nul,* $\mu(x')$ *est strictement positif.*

Remarque 1.3. – D'après (1.2) et (1.5), L est transversal sur ∂D si et seulement si

$$\mu(x') + \delta(x') > 0 \quad \text{sur} \quad \partial D. \tag{1.6}$$

1.2. Le cas où L est du *second* ordre. – On va tout d'abord introduire une quantité positive $\tilde{\mathrm{Tr}}\ \mathrm{H}_{q_2}(x',\xi')$ déterminée par le hessien $\mathrm{H}_{q_2}(x',\xi')$ du symbole principal

$$q_2(x',\xi') = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\xi_i\xi_j$$

de $-$ Q par rapport à (x',ξ') (cf. [4], [5]).

Soit $(g_{ij}(x'))_{1\leqslant i,j\leqslant N-1}$ la métrique riemannienne de $\partial\mathrm{D}$ induite par la métrique naturelle de $\mathbf{R}^{\mathrm{N}}$ et $(g^{ij}(x'))$ la matrice inverse de $(g_{ij}(x'))$.

Posons :

$$\Sigma = \left\{(x',\xi') \in \mathrm{T}^*\,\partial\mathrm{D}\backslash 0\ ;\ |\xi'| = 1 \text{ et } q_2(x',\xi') = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\xi_i\xi_j = 0\right\},$$

où

$$|\xi'| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{N-1} g^{ij}(x')\xi_i\xi_j}\ .$$

Soit $\rho \in \Sigma$. Pour tout vecteur tangent u à $\mathrm{T}^*\,\partial\mathrm{D}$ en ρ, on choisit un champ de vecteurs v sur $\mathrm{T}^*\,\partial\mathrm{D}$ tel que $v = u$ en ρ. On peut définir une forme quadratique $a_\rho(u, u)$ par l'équation :

$$a_\rho(u,u) = (v^2 q_2)_\rho.$$

En effet, puisque q_2 s'annule au second ordre sur Σ d'après (1.3), $a_\rho(u,u)$ ne dépend pas du choix de v.

Soit $\tilde{\mathrm{T}}_\rho(\mathrm{T}^*\,\partial\mathrm{D})$ le complexifié de l'espace cotangent $\mathrm{T}_\rho(\mathrm{T}^*\,\partial\mathrm{D})$ à $\mathrm{T}^*\,\partial\mathrm{D}$ en ρ. On considère la forme symplectique $\sigma = \sum_{j=1}^{N-1} d\xi_j \wedge dx_j$ et la forme quadratique $a_\rho(u,u)$ comme des formes bilinéaires sur $\tilde{\mathrm{T}}_\rho(\mathrm{T}^*\,\partial\mathrm{D}) \times \tilde{\mathrm{T}}_\rho(\mathrm{T}^*\,\partial\mathrm{D})$. Puisque σ est non-dégénéré, on peut définir pour tout $\rho \in \Sigma$ une transformation linéaire

$$\mathrm{A}_\rho : \tilde{\mathrm{T}}_\rho(\mathrm{T}^*\,\partial\mathrm{D}) \to \tilde{\mathrm{T}}_\rho(\mathrm{T}^*\,\partial\mathrm{D})$$

par l'équation :

$$\sigma(u,\mathrm{A}_\rho v) = a_\rho(u,v), \qquad u, v \in \tilde{\mathrm{T}}_\rho(\mathrm{T}^*\,\partial\mathrm{D}).$$

Melin [5] a démontré que les valeurs propres de A_ρ sont sur l'axe imaginaire et symétriques par rapport à l'origine. Pour tout $\rho = (x',\xi') \in \Sigma$, on pose :

$$\tilde{\mathrm{Tr}}\ \mathrm{H}_{q_2}(x',\xi') = \text{la somme des valeurs propres positives de } \frac{1}{\sqrt{-1}}\mathrm{A}_\rho.$$

On sait que le symbole *sous-principal*

$$q_1'(x',\xi') = \sqrt{-1}\left(\sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}_{(j)}(x')\xi_i - \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x')\xi_i\right)$$

de $-\mathrm{Q}$ est invariant sur

$$\Sigma = \left\{(x',\xi') \in \mathrm{T}^*\partial\mathrm{D}\backslash 0 \ ; \ |\xi'| = 1 \text{ et } \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\xi_i\xi_j = 0\right\}.$$

Ici

$$\alpha^{ij}_{(j)}(x') = \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha^{ij}(x')).$$

En utilisant le théorème 5.9 de Hörmander [4] comme dans la démonstration du théorème 2 de [12] et en raisonnant comme dans la démonstration du théorème XIX de Bony-Courrège-Priouret [1], on démontrera le

THÉORÈME 1. — *Soit*

$$\mathrm{L}u(x') = \mu(x')\frac{\partial u}{\partial n}(x') + \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}(x') + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x')\frac{\partial u}{\partial x_i}(x') + \gamma(x')u(x') - \delta(x')\,\Delta u(x')(u \in \mathrm{C}^2(\bar{\mathrm{D}}))$$

une condition aux limites de Ventcel' du second ordre satisfaisant à (1.2), (1.3), (1.4) *et* (1.5).

On suppose que L *est transversal sur* $\partial\mathrm{D}$ *et que :*

(H) *en tout point* (x',ξ') *de*

$$\Sigma = \left\{(x',\xi') \in \mathrm{T}^*\partial\mathrm{D}\backslash 0 \ ; \ |\xi'| = 1 \text{ et } q_2(x',\xi') = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\xi_i\xi_j = 0\right\},$$

$$\frac{1}{2}\,\tilde{\mathrm{Tr}}\,\mathrm{H}_{q_2}(x',\xi') + \mu(x') + \left|\sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}_{(j)}(x')\xi_i - \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x')\xi_i\right| > 0.$$

Il existe alors un Δ*-processus de diffusion* $\{\mathrm{T}_t\}_{t\geqslant 0}$ *sur* $\bar{\mathrm{D}}$ *tel que, pour le générateur infinitésimal* A *de* $\{\mathrm{T}_t\}$, *on ait :*

$$(+) \qquad \mathscr{D}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{C}^2(\bar{\mathrm{D}}) = \{u \in \mathrm{C}^2(\bar{\mathrm{D}}) \ ; \ \mathrm{L}u = 0 \text{ sur } \partial\mathrm{D}\}.$$

Remarque 1.4. — 1° Ce théorème comprend, comme cas particulier, celui de [1] dans lequel $q_2(x',\xi') > 0$ sur $\mathrm{T}^*\partial\mathrm{D}\backslash 0$ (cf. [1], théorème XIX). 2°

Notons que l'hypothèse (H) ci-dessus est plus faible que l'hypothèse (A.1) dans le théorème 1 de [10].

1.3. Le cas où L est du *premier* ordre. — En utilisant le théorème 1 de [12] et le théorème 5.1 de Sato-Ueno [8], on démontrera le

THÉORÈME 2. — *Soit*

$$Lu(x') = \mu(x')\frac{\partial u}{\partial n}(x') + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \frac{\partial u}{\partial x_i}(x') + \gamma(x')u(x') - \delta(x')\,\Delta u(x')(u \in C^2(\bar{D}))$$

une condition aux limites de Ventcel' du premier ordre satisfaisant à (1.2), (1.4) *et* (1.5).

On suppose que L *est transversal sur* ∂D. *Il existe alors un semi-groupe de Feller* $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ *sur* $\bar{D}$ *tel que, pour le générateur infinitésimal* A *de* $\{T_t\}$, *on ait :*

$$\begin{cases} \text{i) } \mathscr{D}(A) \cap C^{2,\kappa}(\bar{D}) = \{u \in C^{2,\kappa}(\bar{D})\,;\ Lu = 0 \textit{ sur } \partial D\}, \\ \text{ii) } Au = \Delta u \textit{ pour toute } u \in \mathscr{D}(A) \cap C^{2,\kappa}(\bar{D}). \end{cases}$$

Ici $C^{2,\kappa}(\bar{D})$ $(0 < \kappa \leqslant 1)$ désigne le sous-espace vectoriel de $C^2(\bar{D})$ formé des fonctions f telles que, pour $0 \leqslant |p| \leqslant 2$, les dérivées $D^p f$ satisfassent à la condition uniforme de Hölder avec exposant κ dans $\bar{D}$.

Sous des hypothèses plus restrictives, on obtient les théorèmes suivants :

THÉORÈME 3. — *Soit*

$$Lu(x') = \mu(x')\frac{\partial u}{\partial n}(x') + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \frac{\partial u}{\partial x_i}(x') + \gamma(x')u(x') - \delta(x')\,\Delta u(x')(u \in C^2(\bar{D}))$$

une condition aux limites de Ventcel' du premier ordre satisfaisant à (1.2), (1.4) *et* (1.5).

On suppose que L *est transversal sur* ∂D *et que :*
(H.2) *il existe une constante* $C_0 > 0$ *telle que*

$$\left|\sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x')\xi_i\right| \leqslant C_0\mu(x')\,|\xi'| \quad \textit{sur} \quad T^*\,\partial D.$$

Il existe alors un Δ*-processus de diffusion* $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ *tel que, pour le* *générateur infinitésimal* A *de* $\{T_t\}$, *on ait :*

$$(+) \qquad \mathscr{D}(A) \cap C^2(\bar{D}) = \{u \in C^2(\bar{D})\ ;\ Lu=0 \ \textit{sur}\ \partial D\}.$$

THÉORÈME 4. — *Soit*

$$Lu(x') = \mu(x')\frac{\partial u}{\partial n}(x') + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x')\frac{\partial u}{\partial x_i}(x') + \gamma(x')u(x') - \delta(x')\,\Delta u(x')(u \in C^2(\bar{D}))$$

une condition aux limites de Ventcel' du premier ordre satisfaisant à (1.2), (1.4) *et* (1.5).

On suppose que L *est transversal sur* ∂D *et que :*

(C.2) *le champ de vecteur* $\beta = (\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^{N-1})$ *sur* ∂D *est non nul sur* $M = \{x' \in \partial D\ ;\ \mu(x')=0\}$ *et aucune courbe intégrale maximale de* β *n'est entièrement contenue dans* M.

Il existe alors un Δ*-processus de diffusion* $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ *tel que, pour le générateur infinitésimal* A *de* $\{T_t\}$, *on ait la propriété* (+).

Remarque 1.5. — 1° Les théorèmes 3 et 4 comprennent, comme cas particulier, celui de [1] dans lequel $\mu(x') > 0$ sur ∂D (cf. [1], théorème XIX). 2° Notons que l'hypothèse (C.2) ci-dessus est plus faible que les hypothèses (A.3), (B.3) et (C.3) dans le théorème 3 de [10].

2. Opérateurs de Green et harmonique.

2.1. On considère le problème de Dirichlet suivant : pour deux fonctions f et φ définies dans D et sur ∂D respectivement, trouver une fonction u dans D telle que

$$(D) \qquad \begin{cases} (\alpha - \Delta)u = f & \text{dans} \quad D, \\ u|_{\partial D} = \varphi & \text{sur} \quad \partial D, \end{cases}$$

où α est un nombre réel. On résout le problème (D) dans le cadre des espaces de *Hölder*.

Soit m un entier positif et $0 < \kappa \leqslant 1$. On désigne par $C^{m,\kappa}(\bar{D})$ (resp. $C^{m,\kappa}(\partial D)$) le sous-espace vectoriel de $C^m(\bar{D})$ (resp. $C^m(\partial D)$) formé des fonctions f telles que, pour $0 \leqslant |p| \leqslant m$, les dérivées $D^p f$ satisfassent à la condition uniforme de Hölder avec exposant κ dans $\bar{D}$ (resp. ∂D).

Rappelons le résultat classique suivant (cf. [7]) :

THÉORÈME 2.1. — *Soit* m *un entier positif et* $0 < \kappa \leqslant 1$. *Pour tout* $\alpha \geqslant 0$, *l'application :* $u \to ((\alpha - \Delta)u, u|_{\partial D})$ *est un isomorphisme de* $C^{m+2,\kappa}(\bar{D})$ *sur* $C^{m,\kappa}(\bar{D}) \oplus C^{m+2,\kappa}(\partial D)$.

En vertu du théorème 2.1, pour tout $\alpha \geqslant 0$, on peut définir des opérateurs linéaires continus $G_\alpha^0 : C^{0,\kappa}(\bar{D}) \to C^{2,\kappa}(\bar{D})$ et $H_\alpha : C^{2,\kappa}(\partial D) \to C^{2,\kappa}(\bar{D})$ par les relations suivantes :

a) Pour toute $f \in C^{0,\kappa}(\bar{D})$,

$$\begin{cases} (\alpha - \Delta)G_\alpha^0 f = f & \text{dans} \quad D, \\ G_\alpha^0 f|_{\partial D} = 0 & \text{sur} \quad \partial D. \end{cases} \tag{2.1}$$

b) Pour toute $\varphi \in C^{2,\kappa}(\partial D)$,

$$\begin{cases} (\alpha - \Delta)H_\alpha \varphi = 0 & \text{dans} \quad D, \\ H_\alpha \varphi|_{\partial D} = \varphi & \text{sur} \quad \partial D. \end{cases} \tag{2.2}$$

Notons que G_α^0 (resp. H_α) se prolonge en un opérateur linéaire borné et positif, encore noté G_α^0 (resp. H_α), de $C(\bar{D})$ (resp. $C(\partial D)$) dans $C(\bar{D})$ qui sera appelé *opérateur de Green* (resp. *opérateur harmonique*) (cf. [8], théorèmes 2.4 et 2.5).

Du théorème 2.1, on déduit le

COROLLAIRE 2.2. — *Soit* $\alpha \geqslant 0$. *On a alors :*

i) *Pour tout entier positif* m, G_α^0 *est un isomorphisme de* $C^{m,\kappa}(\bar{D})$ *sur* $\{v \in C^{m+2,\kappa}(\bar{D})\,;\; v|_{\partial D} = 0$ *sur* $\partial D\}$.

ii) *Pour tout entier positif* m, H_α *est un isomorphisme de* $C^{m+2,\kappa}(\partial D)$ *sur* $\{w \in C^{m+2,\kappa}(\bar{D})\,;\; (\alpha - \Delta)w = 0$ *dans* $D\}$.

2.2. Soit L une condition aux limites de Ventcel' du type considéré au paragraphe 1.1. :

$$\begin{aligned} Lu(x') &= \mu(x')\frac{\partial u}{\partial n}(x') + Qu(x') - \delta(x')\,\Delta u(x') \\ &\equiv \mu(x')\frac{\partial u}{\partial n}(x') + \left[\sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}(x') + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x')\frac{\partial u}{\partial x_i}(x') \right. \\ &\qquad \left. + \gamma(x')u(x') \right] - \delta(x')\,\Delta u(x')(u \in C^2(\bar{D})). \end{aligned}$$

L applique continûment $C^{2,\kappa}(\bar{D})$ dans $C^{0,\kappa}(\partial D)$. En outre,

LEMME 2.3 ([8], lemme 4.2). — *Soit* L *une condition aux limites de Ventcel' satisfaisant à* (1.2), (1.3), (1.4) *et* (1.5). *Alors, pour tout* $\alpha \geqslant 0$, *l'opérateur* LG_α^0 :

$$f \to LG_\alpha^0 f (f \in C^{0,\kappa}(\bar{D}))$$

se prolonge en un opérateur linéaire borné et positif de $C(\bar{D})$ *dans* $C(\partial D)$.

On notera $\overline{LG_\alpha^0}$ l'opérateur de $C(\bar{D})$ dans $C(\partial D)$ ainsi introduit.

D'autre part, d'après le corollaire du lemme 4.1 de Sato-Ueno [8], on a le

LEMME 2.4. — *Soit* L *une condition aux limites de Ventcel' satisfaisant à* (1.2), (1.3), (1.4) *et* (1.5). *Alors, pour tout* $\alpha \geqslant 0$, *l'opérateur* LH_α :

$$\varphi \to LH_\alpha \varphi \quad (\varphi \in C^{2,\kappa}(\partial D))$$

se prolonge en un opérateur linéaire fermé de $C(\partial D)$ *dans* $C(\partial D)$.

On notera $\overline{LH_\alpha}$ l'opérateur de $C(\partial D)$ dans $C(\partial D)$ ainsi introduit et $\mathscr{D}(\overline{LH_\alpha})$ son domaine de définition respectivement.

Notons que LH_α est un *opérateur pseudo-différentiel* à support propre sur le bord ∂D et que LH_α se prolonge en un opérateur linéaire borné de $\mathscr{D}'(\partial D)$ dans $\mathscr{D}'(\partial D)$ (cf. [3]) ; on le désignera par $\widetilde{LH_\alpha}$.

La relation entre les opérateurs $\overline{LH_\alpha}$ et $\widetilde{LH_\alpha}$ est donnée par le

LEMME 2.5. — *Pour tout* $\alpha \geqslant 0$, *on a :*

$$\overline{LH_\alpha} \subset \widetilde{LH_\alpha}.$$

Démonstration. — Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\overline{LH_\alpha})$. Par définition, il existe alors une suite $\{\varphi_j\}_{j \in N} \subset C^{2,\kappa}(\partial D)$ telle que $\varphi_j \to \varphi$ dans $C(\partial D)$ et $LH_\alpha \varphi_j \to \overline{LH_\alpha}\varphi$ dans $C(\partial D)$ lorsque $j \to +\infty$. Puisque l'application : $\psi \to \psi$ de $C(\partial D)$ dans $\mathscr{D}'(\partial D)$ est continue, on en déduit :

$$\begin{aligned} \widetilde{LH_\alpha}\varphi &= \lim_{j \to +\infty} LH_\alpha \varphi_j \\ &= \overline{LH_\alpha}\,\varphi \end{aligned}$$

dans $\mathscr{D}'(\partial D)$. D'où $\overline{LH_\alpha} \subset \widetilde{LH_\alpha}$. c.q.f.d.

3. Construction du processus de diffusion.

La démonstration des théorèmes 1, 3 et 4 reposera sur le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. — *Soit* L *une condition aux limites de Ventcel' satisfaisant à* (1.2), (1.3), (1.4) *et* (1.5). *On introduit un opérateur linéaire non-borné* $\mathfrak{A} : C(\bar{D}) \to C(\bar{D})$ *de la manière suivante :*

a) le domaine de définition de $\mathfrak{A}$ *est*

$$\mathscr{D}(\mathfrak{A}) = \{u \in C^2(\bar{D}) \ ; \ Lu = 0 \ \textit{sur} \ \partial D\}.$$

b) $\mathfrak{A}u = \Delta u$ *pour toute* $u \in \mathscr{D}(\mathfrak{A})$.

On suppose :

(I) *Il existe un* $\lambda \geqslant 0$ *et une fonction positive* δ_0 *de* $C^\infty(\partial D)$ *tels que, pour un* $\alpha \geqslant 0$, *le problème*

$$\begin{cases} (\alpha - \Delta)u = 0 & \textit{dans} \quad D, \\ (\lambda - L_0)u = \varphi & \textit{sur} \quad \partial D \end{cases}$$

admette une solution $u \in C^2(\bar{D})$ *pour toute* φ *dans un ensemble dense de* $C(\partial D)$, *où* $L_0 = L - \delta_0 \Delta$.

(II) *Pour tout* $\alpha > 0$, *on a :*

$$(3.1) \qquad \psi \in \mathscr{D}(\overline{LH_\alpha}) \quad \textit{et} \quad \overline{LH_\alpha}\psi \in C^\infty(\partial D) \Rightarrow \psi \in C^\infty(\partial D).$$

Alors, si L *est transversal sur* ∂D, *l'opérateur* $\mathfrak{A}$ *est préfermé dans* $C(\bar{D})$ *et sa fermeture* A *est le générateur infinitésimal d'un* Δ*-processus de diffusion* $\{T_t\}_{t \geqslant 0}$ *sur* $\bar{D}$ *tel que*

$$(+) \qquad \mathscr{D}(A) \cap C^2(\bar{D}) = \{u \in C^2(\bar{D}) \ ; \ Lu = 0 \ \textit{sur} \ \partial D\}.$$

Démonstration. — D'après l'hypothèse (I), en utilisant le théorème 5.1 de Sato-Ueno [8], on voit que, pour tout $\alpha \geqslant 0$, l'opérateur $\overline{L_0H_\alpha}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller sur ∂D ; donc aussi que, pour tout $\alpha \geqslant 0$, l'opérateur $\overline{LH_\alpha}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller sur ∂D en vertu du lemme 6.4 de [8]. D'après le lemme 5.1

de [8], on en déduit que, si L est transversal sur ∂D, pour tout $\alpha > 0$, l'équation

$$(**) \qquad \overline{LH_\alpha}\psi = \varphi \quad \text{sur} \quad \partial D$$

admet une solution *unique* $\psi \in \mathcal{D}(\overline{LH_\alpha})$ pour *toute* $\varphi \in C(\partial D)$. Pour tout $\alpha > 0$, on définit l'opérateur de Green $G_\alpha : C(\bar{D}) \to C(\bar{D})$ du problème

$$(*)_0 \qquad \begin{cases} (\alpha - \Delta)u = f & \text{dans} \quad D, \\ Lu = 0 & \text{sur} \quad \partial D \end{cases}$$

par :

$$G_\alpha f = G_\alpha^0 f - H_\alpha \overline{LH_\alpha}^{-1} \overline{LG_\alpha^0} f)$$

pour toute $f \in C(\bar{D})$ (cf. [8], (5.6)).

On obtient alors :

$$(3.2) \qquad f \in C^\infty(\bar{D}) \Rightarrow G_\alpha f \in C^\infty(\bar{D}) \quad \text{et} \quad u = G_\alpha f$$

est une solution du problème $(*)_0$.

En effet, si $f \in C^\infty(\bar{D})$, on en déduit que $\overline{LH_\alpha}^{-1}(\overline{LG_\alpha^0} f)$ est dans $C^\infty(\partial D)$ d'après la propriété (3.1); par conséquent $G_\alpha f \in C^\infty(\bar{D})$ d'après le corollaire 2.2 et $u = G_\alpha f$ est une solution du problème $(*)_0$ d'après (2.1) et (2.2).

On va appliquer le théorème de Hille-Yosida-Ray à l'opérateur $\mathfrak{A}$ comme dans la démonstration du théorème XIX de Bony-Courrège-Priouret [1] :

THÉORÈME de HILLE-YOSIDA-RAY. — *Soit* $\mathfrak{A} : C(\bar{D}) \to C(\bar{D})$ *un opérateur linéaire et* $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ *son domaine de définition. On suppose :*

(i) *Pour tout* $\alpha > 0$, *l'opérateur* $\alpha - \mathfrak{A}$ *applique* $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ *sur un sous-espace dense de* $C(\bar{D})$.

(ii) *Pour toute* $u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ *telle que* $\sup_{x \in \bar{D}} u(x) > 0$, *il existe* $x \in \bar{D}$ *tel que* $u(x) = \sup u$ *et* $\mathfrak{A}u(x) \leqslant 0$.

(iii) $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ *est dense dans* $C(\bar{D})$.

Alors, l'opérateur $\mathfrak{A}$ *est préfermé dans* $C(\bar{D})$ *et sa fermeture* A *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller* $\{T_t\}_{t \geqslant 0}$ *sur* $\bar{D}$.

Fin de la démonstration du théorème 3.1. — Pour tout $\alpha > 0$, l'image de $(\alpha - \mathcal{O}\!\!\mathcal{l})$ est dense dans $C(\bar{D})$ puisqu'elle contient $C^\infty(\bar{D})$ d'après la propriété (3.2) (propriété (i)). La propriété de maximum (ii) requise est une conséquence du théorème XI de [1] et de l'hypothèse de transversalité faite sur L. La propriété (iii) résulte, d'une part de ce que, pour tous $\alpha > 0$ et $f \in C^\infty(\bar{D})$, $\mathcal{D}(\mathcal{O}\!\!\mathcal{l})$ contient les fonctions $G_\alpha f (\in C^\infty(\bar{D}))$ d'après la propriété (3.2), et d'autre part de ce que, pour toute $f \in C(\bar{D})$,

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \alpha G_\alpha f = f \qquad \text{dans} \qquad C(\bar{D})$$

d'après la proposition III.2.7 de [1] et l'hypothèse de transversalité faite sur L.

D'après le théorème de Hille-Yosida-Ray, on en déduit que l'opérateur $\mathcal{O}\!\!\mathcal{l}$ est préfermé dans $C(\bar{D})$ et que sa fermeture A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller $\{T_t\}_{t \geqslant 0}$ sur $\bar{D}$.

Pour démontrer que le semi-groupe $\{T_t\}$ est un Δ-processus de diffusion sur $\bar{D}$, il suffit de montrer que

$$(+) \qquad \begin{aligned} \mathcal{D}(A) \cap C^2(\bar{D}) &= \mathcal{D}(\mathcal{O}\!\!\mathcal{l}) \\ &= \{u \in C^2(\bar{D})\ ;\ Lu = 0 \text{ sur } \partial D\}. \end{aligned}$$

Par construction du semi-groupe $\{T_t\}$, on a

$$\mathcal{D}(\mathcal{O}\!\!\mathcal{l}) \subset \mathcal{D}(A) \cap C^2(\bar{D}).$$

Inversement, soit $u \in \mathcal{D}(A) \cap C^2(\bar{D})$. Puisque $u \in \mathcal{D}(A)$ et que A est la fermeture de $\mathcal{O}\!\!\mathcal{l}$ dans $C(\bar{D})$, il existe une suite $\{u_k\}_{k \in N} \subset \mathcal{D}(\mathcal{O}\!\!\mathcal{l})$ telle que $u_k \to u$ dans $C(\bar{D})$ et que $\Delta u_k \to Au$ dans $C(\bar{D})$ lorsque $k \to +\infty$. On en déduit que $\Delta u_k \to \Delta u$ dans $\mathcal{D}'(D)$ lorsque $k \to +\infty$ et donc que $Au = \Delta u$ dans $\mathcal{D}'(D)$, d'où $Au = \Delta u$ dans $C(\bar{D})$ car $u \in C^2(\bar{D})$. En remarquant que l'application $v \to v$ (resp. $\varphi \to \varphi$) de $C(\bar{D})$ (resp. $C(\partial D)$) dans $L^2(D)$ (resp. $L^2(\partial D)$) est continue, on obtient donc :

$$\begin{cases} u_k \to u & \text{dans } L^2(D), \\ \Delta u_k \to \Delta u & \text{dans } L^2(D), \\ \Delta u_{k|\partial D} \to \Delta u_{|\partial D} & \text{dans } L^2(\partial D), \end{cases}$$

lorsque $k \to +\infty$. Rappelons que l'application : $u \to \left(u|_{\partial D}, \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D}\right)$ de

$$H_\Delta^{0,0} = \{u \in L^2(D)\ ;\ \Delta u \in L^2(D)\}$$

dans $H^{-1/2}(\partial D) \oplus H^{-3/2}(\partial D)$ est continue d'après la proposition 2.1 (iii) de

[9]. Il en résulte que

$$\begin{aligned} Lu &= \mu \frac{\partial u}{\partial n} + \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \gamma u - \delta \, \Delta u|_{\partial D} \\ &= \lim_{k \to +\infty} \left(\mu \frac{\partial u_k}{\partial n} + \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \gamma u_k - \delta \Delta u_k|_{\partial D} \right) \\ &= \lim_{k \to +\infty} Lu_k \\ &= 0 \, (u_k \in \mathscr{D}(\mathfrak{A})) \end{aligned}$$

dans $H^{-5/2}(\partial D)$. D'où $Lu(x') = 0$ pour tout point $x' \in \partial D$, car $u \in C^2(\bar{D})$; ce qui montre que $u \in \mathscr{D}(\mathfrak{A})$. La propriété (+) est ainsi démontrée. c.q.f.d.

Remarque 3.2. — Si, pour tout $\alpha > 0$, l'opérateur pseudo-différentiel LH_α est *globalement hypoelliptique* dans ∂D :

$$\psi \in \mathscr{D}'(\partial D) \quad \text{et} \quad LH_\alpha \psi \in C^\infty(\partial D) \Rightarrow \psi \in C^\infty(\partial D),$$

on a la propriété (3.1) en vertu du lemme 2.5.

4. Démonstration du théorème 1 : cas du second ordre.

4.1. Il suffit de montrer que les hypothèses (I) et (II) du théorème 3.1 sont vérifiées. Pour cela, en utilisant le théorème 5.9 de Hörmander [4] comme dans la démonstration du théorème 2 de [12], on démontrera le théorème suivant :

THÉORÈME 4.1. — *Soit* $s \geqslant 3$ *et* L *une condition aux limites de Ventcel' du second ordre satisfaisant à* (1.2), (1.3), (1.4) *et* (1.5) :

$$\begin{aligned} Lu(x') = \mu(x') \frac{\partial u}{\partial n}(x') + \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j}(x') \\ + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \frac{\partial u}{\partial x_i}(x') + \gamma(x') u(x') - \delta(x') \, \Delta u(x') (u \in C^2(\bar{D})). \end{aligned}$$

$$\mu(x') \geqslant 0 \quad sur \quad \partial D. \tag{1.2}$$

$$q_2(x',\xi') = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \xi_i \xi_j \geqslant 0 \quad sur \quad T^* \partial D \backslash 0. \tag{1.3}$$

$$\gamma(x') \leqslant 0 \quad sur \quad \partial D. \tag{1.4}$$

$$\delta(x') \geqslant 0 \quad sur \quad \partial D. \tag{1.5}$$

On suppose que L *est transversal sur* ∂D *et que :*

(H) *en tout point* (x',ξ') *de*

$$\Sigma = \left\{(x',\xi') \in \mathrm{T}^* \, \partial\mathrm{D}\backslash 0 \; ; \; |\xi'|=1 \quad et \quad q_2(x',\xi') = \sum_{i,j=1}^{\mathrm{N}-1} \alpha^{ij}(x')\xi_i\xi_j = 0\right\},$$

$$\frac{1}{2}\,\tilde{\mathrm{Tr}}\,\mathrm{H}_{q_2}(x',\xi') + \mu(x') + \left|\sum_{i,j=1}^{\mathrm{N}-1} \alpha^{ij}_{(j)}(x')\xi_i - \sum_{i=1}^{\mathrm{N}-1} \beta^i(x')\xi_i\right| > 0.$$

Alors, pour tout $\alpha > 0$, *le problème*

$$(*) \qquad \begin{cases} (\alpha - \Delta)u = f & dans \quad \mathrm{D}, \\ \mathrm{L}u = \varphi & sur \quad \partial\mathrm{D} \end{cases}$$

admet une solution unique $u \in \mathrm{H}^{s-1}(\mathrm{D})$ *pour toutes* $f \in \mathrm{H}^{s-2}(\mathrm{D})$ *et* $\varphi \in \mathrm{H}^{s-5/2}(\partial\mathrm{D})$.

De plus, pour tout $\alpha \geqslant 0$, *l'opérateur pseudo-différentiel* LH_α *est hypoelliptique dans* ∂D.

Ici $\mathrm{H}^s(\mathrm{D})$ (resp. $\mathrm{H}^s(\partial\mathrm{D})$) désigne l'espace de Sobolev sur D (resp. ∂D) d'ordre s.

Ce théorème sera établi au paragraphe 4.2 ci-dessous.

Démonstration du théorème 1. — On déduit du théorème 4.1 que l'hypothèse (I) du théorème 3.1 est satisfaite avec $\lambda = 0$ et $\delta_0 = 0$ d'après le lemme de Sobolev et que l'hypothèse (II) du même théorème est satisfaite d'après la remarque 3.2.

4.2. *Démonstration du théorème* 4.1. — 1) En utilisant l'opérateur de Green G^0_α et l'opérateur harmonique H_α comme dans [11], on ramène l'étude du problème $(*)$ à celle de l'opérateur pseudo-différentiel LH_α :

$$\psi \to \mathrm{LH}_\alpha\psi = \mu\frac{\partial}{\partial n}(\mathrm{H}_\alpha\psi)|_{\partial\mathrm{D}} + \sum_{i,j=1}^{\mathrm{N}-1} \alpha^{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{\mathrm{N}-1} \beta^i\frac{\partial\psi}{\partial x_i} + \gamma\psi - \alpha\delta\psi$$

du second ordre à paramètre réel α, sur le bord ∂D (cf. [11], prop. 2.3) :

PROPOSITION 4.2. — *Soit* $\alpha \geqslant 0$. *Pour deux fonctions*

$$f \in \mathrm{H}^{s-2}(\mathrm{D}) \quad et \quad \varphi \in \mathrm{H}^{s-5/2}(\partial\mathrm{D})$$

avec $s \geqslant 3$, *il existe une solution* $u \in H^t(D)\,(t \leqslant s)$ *du problème*

$$(*)\quad \begin{cases} (\alpha - \Delta)u = f \quad \textit{dans} \quad D, \\ Lu = \mu \dfrac{\partial u}{\partial n} + \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \gamma u - \delta\, \Delta u|_{\partial D} \\ \quad = \varphi \quad \textit{sur} \quad \partial D \end{cases}$$

si et seulement si il existe une solution $\psi \in H^{t-1/2}(\partial D)$ *de l'équation*

$$(**)\quad LH_\alpha \psi = \varphi - LG_\alpha^0 f$$
$$= \varphi - \mu \frac{\partial}{\partial n} (G_\alpha^0 f)\,|_{\partial D} + \delta f|_{\partial D} \ \textit{sur} \quad \partial D.$$

2) En utilisant une variante d'une méthode de Agmon-Nirenberg comme dans [11] et [12] (cf. [2]), on va étudier le comportement de l'opérateur pseudo-différentiel LH_α lorsque $\alpha \geqslant 0$.

1° Soit $S = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ le cercle unité. Pour toute

$$\tilde{\varphi} \in H^{t-1/2}(\partial D \times S) \ \text{avec} \ t \in \mathbf{R},$$

il existe une solution unique $\tilde{w} \in H^t(D \times S)$ du problème

$$\begin{cases} \left(\Delta + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\tilde{w} = 0 \quad \text{dans} \quad D \times S, \\ \tilde{w}|_{\partial D \times S} = \tilde{\varphi} \qquad \text{sur} \quad \partial D \times S. \end{cases}$$

Ici $z \in S$. On définit l'opérateur harmonique

$$\tilde{H} : H^{t-1/2}(\partial D \times S) \to H^t(D \times S) \quad \text{par} \quad \tilde{w} = \tilde{H}\tilde{\varphi}.$$

Notons que $L\tilde{H}$:

$$\tilde{\varphi} \to \mu \frac{\partial}{\partial n} (\tilde{H}\tilde{\varphi})|_{\partial D \times S} + \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_i} + \gamma\tilde{\varphi} + \delta \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2}$$

est un opérateur pseudo-différentiel du second ordre sur $\partial D \times S$.

En raisonnant comme dans la démonstration du lemme 3.1 de [11], on a le

LEMME 4.3. — *Soit* $\alpha' = l^2$ *avec* $l \in \mathbf{Z}$. *On a alors :*

$$\begin{cases} L\tilde{H}(\varphi \otimes e^{ilz}) = LH_{\alpha'}\varphi \otimes e^{ilz} \quad \textit{pour toute} \quad \varphi \in \mathscr{D}'(\partial D); \\ (L\tilde{H})^* (\psi \otimes e^{ilz}) = (LH_{\alpha'})^*\psi \otimes e^{ilz} \quad \textit{pour toute} \quad \psi \in \mathscr{D}'(\partial D), \end{cases}$$

où $(L\tilde{H})^*$ *et* $(LH_{\alpha'})^*$ *sont les adjoints formels de* $L\tilde{H}$ *et* $LH_{\alpha'}$ *respectivement.*

La relation entre les normes $|\ |_{H^t(\partial D)}$ et $|\ |_{H^t(\partial D\times S)}$ pour $t \geqslant 0$ est donnée par le

LEMME 4.4 (cf. [2], prop. 4). — *Soit* $t \geqslant 0$. *Il existe une constante* $C_1 > 0$ *dépendant de* t *telle que, pour tous* $\varphi \in C^\infty(\partial D)$ *et* $l \in \mathbf{Z}$, *on ait :*

$$C_1^{-1}|\varphi \otimes e^{ilz}|^2_{H^t(\partial D\times S)} \leqslant |\varphi|^2_{H^t(\partial D\times S)} + l^{2t}|\varphi|^2_{H^t(\partial D\times S)} \leqslant C_1|\varphi \otimes e^{ilz}|^2_{H^t(\partial D\times S)}.$$

2° On va calculer le symbole de l'opérateur pseudo-différentiel $L\tilde{H}$ du second ordre sur $\partial D \times S$.

Soit $(x',\xi',z,\zeta) = (x_1,x_2,\ldots,x_{N-1},\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{N-1},z,\zeta)$ des coordonnées locales du fibré cotangent $T^*\partial D \times T^*S = T^*(\partial D\times S)$. En raisonnant comme dans la démonstration des lemmes 2.2 et 2.4 de [12], on obtient le

LEMME 4.5 (cf. [12], lemme 3.1). — i) *Le symbole de* $-L\tilde{H}$ *est donné par :*

$$(4.1)\quad \tilde{q}_2(x',\xi',z,\zeta) + \tilde{q}_1(x',\xi',z,\zeta) + \textit{des termes d'ordre} \leqslant 0$$
$$= \left[\sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\xi_i\xi_j + \delta(x')\zeta^2\right]$$
$$+ \left[\mu(x')\sqrt{|\xi'|^2+\zeta^2} + \sqrt{-1}\sum_{i=1}^{N-1}(-\beta^i(x'))\xi_i\right] + \textit{des termes d'ordre} \leqslant 0.$$

ii) *Le symbole de* $-(L\tilde{H})^*$ *est donné par :*

$$(4.2)\quad \tilde{q}_2(x',\xi',z,\zeta) + \tilde{r}_1(x',\xi',z,\zeta) + \textit{des termes d'ordre} \leqslant 0$$
$$= \left[\sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\xi_i\xi_j + \delta(x')\zeta^2\right] + \left[\mu(x')\sqrt{|\xi'|^2+\zeta^2}\right.$$
$$+ \sqrt{-1}\left(\sum_{i=1}^{N-1}\beta^i(x')\xi_i - 2\sum_{i,j=1}^{N-1}\frac{\partial\alpha^{ij}}{\partial x_j}(x')\xi_i\right.$$
$$\left.\left. - \frac{2}{\rho(x')}\sum_{i,j=1}^{N-1}\alpha^{ij}(x')\,\xi_i\frac{\partial\rho}{\partial x_j}(x')\right)\right] + \textit{des termes d'ordre} \leqslant 0.$$

Ici $\rho(x') = (\text{dét}\,(g_{ij}(x')))^{1/2}$.

3° En appliquant le théorème 5.9 de [4] à l'opérateur $L\tilde{H}$ (resp. $(L\tilde{H})^*$), on obtient le

LEMME 4.6. — *Soit* $s \in \mathbf{R}$, $t < s - 1$ *et* L *une condition aux limites de Ventcel' satisfaisant à* (1.2), (1.3) *et* (1.5). *On suppose que* L *est transversal sur*

∂D *et que :*

(H) *en tout point* (x',ξ') *de*

$$\Sigma = \{(x',\xi') \in T^* \partial D \backslash 0 \ ; \ |\xi'|=1 \ \ et \ \ q_2(x',\xi') = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\xi_i\xi_j = 0\},$$

$$\frac{1}{2}\,\tilde{\mathrm{Tr}}\, H_{q_2}(x',\xi') + \mu(x') + \left|\sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}_{(j)}(x')\xi_i - \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x')\xi_i\right| > 0.$$

On a alors :

i) *Il existe une constante* $C_2 > 0$, *dépendant de* s *et* t, *telle que, pour toute* $\tilde{\varphi} \in C^\infty(\partial D \times S)$, *on ait*

$$(4.3) \quad |\tilde{\varphi}|^2_{H^{s-3/2}(\partial D \times S)} \leqslant C_2(|L\tilde{H}\tilde{\varphi}|^2_{H^{s-5/2}(\partial D \times S)} + |\tilde{\varphi}|^2_{H^{t-1/2}(\partial D \times S)}).$$

ii) *Il existe une constante* $C_2^* > 0$, *dépendant de* s *et* t, *telle que, pour toute* $\tilde{\psi} \in C^\infty(\partial D \times S)$, *on ait*

$$(4.3)^* \quad |\tilde{\psi}|^2_{H^{s-3/2}(\partial D \times S)} \leqslant C_2^*(|(L\tilde{H})^*\tilde{\psi}|^2_{H^{s-5/2}(\partial D \times S)} + |\tilde{\psi}|^2_{H^{t-1/2}(\partial D \times S)}).$$

De plus, $L\tilde{H}$ *et* $(L\tilde{H})^*$ *sont hypoelliptiques dans* $\partial D \times S$.

Démonstration. — Notons d'abord que, le symbole principal

$$\tilde{q}_2(x',\xi',z,\zeta) = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\xi_i\xi_j + \delta(x')\zeta^2$$

de l'opérateur pseudo-différentiel $-L\tilde{H}$ (resp. $-(L\tilde{H})^*$) vérifiant la *condition du cône* (1.2) de [4] d'après (1.3) et (1.5), l'inégalité (4.3) (resp. (4.3)*) est *localisable* (cf. [4]). Il suffit donc de montrer que, si L est transversal sur ∂D et si l'hypothèse (H) est satisfaite, alors $L\tilde{H}$ et $(L\tilde{H})^*$ vérifient les conditions du théorème 5.9 de [4] (cf. [12], théorème 5.2).

Soit (U,χ) (resp. (W,τ)) une carte locale de ∂D (resp. S). Posons :

$$\tilde{\Sigma}_{U\times W} = \{(x',\xi',z,\zeta) \in (T^*\partial D \times T^*S)\backslash 0 \ ; \ (x',z) \in U \times W, \ |\xi'|^2 + \zeta^2 = 1 \ \text{et} \ \tilde{q}_2(x',\xi',z,\zeta) = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\xi_i\xi_j + \delta(x')\zeta^2 = 0\}.$$

D'après (1.3) et (1.5), on a :

$$\tilde{\Sigma}_{U\times W} = \tilde{\Sigma}^{(1)}_{U\times W} \cup \tilde{\Sigma}^{(2)}_{U\times W}$$
$$\equiv \{(x',\xi',z,\zeta) \in T^*\partial D \times (T^*S\backslash 0) \ ; \ (x',z) \in U \times W, \ |\xi'|^2 + \zeta^2 = 1, \ \delta(x') = 0 \ \text{et} \ \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\xi_i\xi_j = 0\} \cup \{(x',\xi',z,0) \in (T^*\partial D\backslash 0) \times T^*S \ ; \ (x',z) \in U \times W, \ |\xi'| = 1 \ \text{et} \ \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\xi_i\xi_j = 0\}.$$

D'après (4.1) (resp. 4.2)), en remarquant que sur $\tilde{\Sigma}_{U\times W}$

$$\sum_{i=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\xi_i = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant N-1)$$

d'après (1.3), on voit que le symbole *sous-principal* $\tilde{q}'_1(x',\xi',z,\zeta)$ (resp. $\tilde{r}'_1(x',\xi',z,\zeta)$) de $-\mathrm{L}\tilde{\mathrm{H}}$ (resp. $-(\mathrm{L}\tilde{\mathrm{H}})^*$) sur $\tilde{\Sigma}_{U\times W}$ est :

$$(4.4)\quad \tilde{q}'_1(x',\xi',z,\zeta) \equiv \tilde{q}_1(x',\xi',z,\zeta) - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\sum_{j=1}^{N-1}\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial\xi_j}(\tilde{q}_2(x',\xi',z,\zeta)) + \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\zeta}(\tilde{q}_2(x',\xi',z,\zeta))\right)$$
$$= \mu(x') + \sqrt{-1}\left(\sum_{i,j=1}^{N-1}\alpha^{ij}_{(j)}\xi_i - \sum_{i=1}^{N-1}\beta^i(x')\xi_i\right).$$

$$(4.5)\quad \tilde{r}'_1(x',\xi',z,\zeta) \equiv \tilde{r}_1(x',\xi',z,\zeta) - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\sum_{j=1}^{N-1}\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial\xi_j}(\tilde{q}_2(x',\xi',z,\zeta)) + \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\zeta}(\tilde{q}_2(x',\xi',z,\zeta))\right)$$
$$= \mu(x') - \sqrt{-1}\left(\sum_{i,j=1}^{N-1}\alpha^{ij}_{(j)}(x')\xi_i - \sum_{i=1}^{N-1}\beta^i(x')\xi_i\right).$$

D'où d'après (1.2)

$$\begin{cases} -\operatorname{Re}\tilde{q}'_1(x',\xi',z,\zeta) = -\mu(x') \leqslant 0 & \text{sur } \tilde{\Sigma}_{U\times W}, \\ -\operatorname{Re}\tilde{r}'_1(x',\xi',z,\zeta) = -\mu(x') \leqslant 0 & \text{sur } \tilde{\Sigma}_{U\times W}. \end{cases}$$

On en déduit que la condition du cône du théorème 5.2 de [12] est satisfaite pour $\tilde{q}_2$ et $\tilde{q}'_1$ (resp. $\tilde{q}_2$ et $\tilde{r}'_1$) et que, si L est transversal sur $\partial\mathrm{D}$ (cf. (1.6)), alors $\operatorname{Re}\tilde{q}'_1 = \mu(x')$ (resp. $\operatorname{Re}\tilde{r}'_1 = \mu(x')$) est strictement positif sur

$$\tilde{\Sigma}^{(1)}_{U\times W} = \{(x',\xi',z,\zeta)\in T^*\,\partial D\times(T^*S\backslash 0)\,;\,(x',z)\in U\times W,\ |\xi'|^2+\zeta^2=1,\ \delta(x')=0 \text{ et } \sum_{i,j=1}^{N-1}\alpha^{ij}(x')\xi_i\xi_j=0\},$$

i.e., que la condition ii) du théorème 5.2 de [12] est vérifiée pour $\mathrm{L}\tilde{\mathrm{H}}$ (resp. $(\mathrm{L}\tilde{\mathrm{H}})^*$) sur $\tilde{\Sigma}^{(1)}_{U\times W}$.

On va donc la vérifier sur $\tilde{\Sigma}^{(2)}_{U\times W}$. Pour cela, on calcule

$$\widetilde{\mathrm{Tr}}\,\mathrm{H}_{\tilde{q}_2}(x',\xi',z,\zeta)$$

du hessien $\mathrm{H}_{\tilde{q}_2}(x',\xi',z,\zeta)$ de

$$\tilde{q}_2(x',\xi',z,\zeta) = \sum_{i,j=1}^{N-1}\alpha^{ij}(x')\xi_i\xi_j + \delta(x')\zeta^2$$

par rapport à (x',ξ',z,ζ) sur

$$\tilde{\Sigma}^{(2)}_{U\times W} = \{(x',\xi',z,0)\in(T^*\,\partial D\backslash 0)\times T^*S\,;(x',z)\in U\times W,\ |\xi'|=1 \text{ et } \sum_{i,j=1}^{N-1}\alpha^{ij}(x')\xi_i\xi_j=0\}.$$

En remarquant que $\tilde{q}_2(x',\xi',z,\zeta) = q_2(x',\xi') + \delta(x')\zeta^2$ et que

$$\tilde{\mathrm{Tr}}\ H_{\delta\zeta^2}(x',\xi',z,\zeta) = 0 \quad \text{sur} \quad \tilde{\Sigma}^{(2)}_{U\times W},$$

on déduit que, en tout point (x',ξ',z,ζ) de $\tilde{\Sigma}^{(2)}_{U\times W}$,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{Tr}}\ H_{\tilde{q}_2}(x',\xi',z,\zeta) &= \tilde{\mathrm{Tr}}\ H_{q_2}(x',\xi',z,\zeta) + \tilde{\mathrm{Tr}}\ H_{\delta\zeta^2}(x',\xi',z,\zeta)\\ &= \tilde{\mathrm{Tr}}\ H_{q_2}(x',\xi').\end{aligned}$$

D'après (4.4) et (4.5), l'hypothèse (H) implique alors que la condition ii) du théorème 5.2 de [12] est vérifiée pour $L\tilde{H}$ et $(L\tilde{H})^*$ sur $\tilde{\Sigma}^{(2)}_{U\times W}$. c.q.f.d.

4° Il résulte des lemmes 4.3, 4.4 et 4.6 la proposition suivante :

PROPOSITION 4.7. – *Soit* $\alpha' = l^2$ *avec* $l\in\mathbf{Z}$ *et* L *une condition aux limites de Ventcel' satisfaisant à* (1.2), (1.3) *et* (1.5). *On suppose que* L *est transversal sur* ∂D *et que l'hypothèse* (H) *est satisfaite.*

Pour tout $s \geqslant 5/2$, *il existe alors une constante* $R > 0$ *dépendant de* s *telle que, si* $\alpha' = l^2 \geqslant R$, *on ait :*

i) *il existe une constante* $C_3 > 0$ *dépendant de* s *telle que, pour toute* $\varphi\in H^{s-3/2}(\partial D)$ *avec* $LH_{\alpha'}\varphi\in H^{s-5/2}(\partial D)$, *on ait*

$$(4.6)\quad |\varphi|^2_{H^{s-3/2}(\partial D)} + \alpha'^{s-3/2}|\varphi|^2_{L^2(\partial D)} \leqslant C_3(|LH_{\alpha'}\varphi|^2_{H^{s-5/2}(\partial D)} + \alpha'^{s-5/2}|LH_{\alpha'}\varphi|^2_{L^2(\partial D)});$$

ii) *il existe une constante* $C_3^* > 0$ *dépendant de* s *telle que, pour toute* $\psi\in H^{s-3/2}(\partial D)$ avec $(LH_{\alpha'})^*\psi\in H^{s-5/2}(\partial D)$, *on ait*

$$(4.6)^*\quad |\psi|^2_{H^{s-3/2}(\partial D)} + \alpha'^{s-3/2}|\psi|^2_{L^2(\partial D)} \leqslant C_3^*(|(LH_{\alpha'})^*\psi|^2_{H^{s-5/2}(\partial D)} + \alpha'^{s-5/2}|(LH_{\alpha'})^*\psi|^2_{L^2(\partial D)}).$$

Démonstration. – Soit $\varphi\in H^{s-3/2}(\partial D)$ telle que $LH_{\alpha'}\varphi\in H^{s-5/2}(\partial D)$. En vertu de la remarque qui suit le lemme 1.4.5 de [3], il existe une suite $\{\varphi_j\}_{j\in N}\subset C^\infty(\partial D)$ telle que $\varphi_j\to\varphi$ dans $H^{s-3/2}(\partial D)$ et $LH_{\alpha'}\varphi_j\to LH_{\alpha'}\varphi$ dans $H^{s-5/2}(\partial D)$ lorsque $j\to+\infty$. Il suffit donc de montrer l'inégalité (4.6) pour toute $\varphi\in C^\infty(\partial D)$. De même, il suffit de montrer l'inégalité (4.6)* pour toute $\psi\in C^\infty(\partial D)$.

La proposition 4.7 se démontre en appliquant l'inégalité (4.3) (resp. (4.3)*) avec $s \geqslant 5/2$ et $t = 1/2$ à $\tilde{\varphi} = \varphi \otimes e^{ilz}$ (resp. $\tilde{\psi} = \psi \otimes e^{ilz}$) avec $\varphi \in C^\infty(\partial D)$ (resp. $\psi \in C^\infty(\partial D)$) et $l \in \mathbf{Z}$, puis en utilisant les lemmes 4.3 et 4.4. c.q.f.d.

5° Soit $\alpha \geqslant 0$. Pour tout $s \in \mathbf{R}$, on introduit un opérateur linéaire non-borné et *fermé* $\mathscr{T}(\alpha) : H^{s-3/2}(\partial D) \to H^{s-5/2}(\partial D)$ de la manière suivante :

a) Le domaine de définition de $\mathscr{T}(\alpha)$ est

$$\mathscr{D}(\mathscr{T}(\alpha)) = \{\varphi \in H^{s-3/2}(\partial D) ; LH_\alpha\varphi \in H^{s-5/2}(\partial D)\}.$$

b) $\mathscr{T}(\alpha)\varphi = LH_\alpha\varphi$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathscr{T}(\alpha))$.

Puisque $\mathscr{D}(\mathscr{T}(\alpha))$ contient $C^\infty(\partial D)$, on voit que $\mathscr{D}(\mathscr{T}(\alpha))$ est dense dans $H^{s-3/2}(\partial D)$ et donc qu'il existe l'adjoint

$$\mathscr{T}(\alpha)^* : H^{-s+5/2}(\partial D) \to H^{-s+3/2}(\partial D) \quad \text{de} \quad \mathscr{T}(\alpha).$$

De même, pour tout $s \in \mathbf{R}$, on introduit un opérateur linéaire non-borné et fermé $\mathscr{T}_1(\alpha)^* : H^{-s+5/2}(\partial D) \to H^{-s+3/2}(\partial D)$ de la manière suivante :

c) Le domaine de définition de $\mathscr{T}_1(\alpha)^*$ est

$$\mathscr{D}(\mathscr{T}_1(\alpha)^*) = \{\psi \in H^{-s+5/2}(\partial D) ; (LH_\alpha)^*\psi \in H^{-s+3/2}(\partial D)\}.$$

d) $\mathscr{T}_1(\alpha)^*\psi = (LH_\alpha)^*\psi$ pour toute $\psi \in \mathscr{D}(\mathscr{T}_1(\alpha)^*)$.

En raisonnant comme dans la démonstration du lemme 4.1 de [11], on obtient le

LEMME 4.8. — *Soit* $\alpha \geqslant 0$. *On a alors* $\mathscr{T}(\alpha)^* \subset \mathscr{T}_1(\alpha)^*$.

D'après la proposition 4.7, en utilisant le lemme 4.8, on obtient la

PROPOSITION 4.9. — *Soit* $\alpha' = l^2$ *avec* $l \in \mathbf{Z}$ *et* L *une condition aux limites de Ventcel' satisfaisant à* (1.2), (1.3) *et* (1.5). *On suppose que* L *est transversal sur* ∂D *et que l'hypothèse* (H) *est satisfaite. Pour tout* $s \geqslant 5/2$, *il existe alors une constante* $R > 0$ *dépendant de* s *telle que, si* $\alpha' = l^2 \geqslant R$, *l'opérateur* $\mathscr{T}(\alpha') : H^{s-3/2}(\partial D) \to H^{s-5/2}(\partial D)$ *est bijectif.*

Démonstration. — Il résulte du résultat i) de la proposition 4.7 que, si $\alpha' = l^2 \geqslant R$, l'opérateur $\mathscr{T}(\alpha')$ est injectif. Il reste alors à vérifier que $\mathscr{T}(\alpha')$ est surjectif.

En utilisant le lemme 4.3, il résulte de l'hypoellipticité de $(L\tilde{H})^*$ (cf. lemme 4.6) que

$$\psi \in \mathscr{D}'(\partial D) \quad \text{et} \quad (LH_{\alpha'})^*\psi \in C^\infty(\partial D) \Rightarrow \psi \in C^\infty(\partial D).$$

D'après le résultat ii) de la proposition 4.7, on en déduit que, si $\alpha' = l^2 \geqslant R$, l'opérateur $\mathscr{T}_1(\alpha')^*$ est injectif; donc aussi que $\mathscr{T}(\alpha')^*$ est injectif d'après le lemme 4.8. D'où la surjectivité de $\mathscr{T}(\alpha')$. c.q.f.d.

3) Par un argument de perturbation compacte, on va montrer que, pour tout $\alpha \geqslant 0$, l'opérateur $\mathscr{T}(\alpha)$ est d'indice *zéro.*

D'après (4.1) de [12], on voit que, pour tout $\alpha \geqslant 0$ *fixé*, le symbole de l'opérateur pseudo-différentiel $-\mathrm{LH}_\alpha$ sur $\partial \mathrm{D}$ est donné par :

$$(4.7) \quad \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\xi_i\xi_j + \left[\mu(x')|\xi'| + \sqrt{-1}\sum_{i=1}^{N-1}(-\beta^i(x'))\xi_i\right]$$
$$+ \text{ des termes d'ordre } \leqslant 0 \text{ dépendant de } \alpha.$$

On en déduit que, pour tous $\alpha, \alpha' \geqslant 0$, il existe un opérateur pseudo-différentiel $\mathrm{K}(\alpha,\alpha')$ d'ordre zéro sur $\partial\mathrm{D}$, dépendant de α et α', tel que

$$\mathrm{LH}_\alpha = \mathrm{LH}_{\alpha'} + \mathrm{K}(\alpha,\alpha').$$

D'où

$$\mathrm{Ind}\,\mathscr{T}(\alpha) = \mathrm{Ind}\,\mathscr{T}(\alpha'),$$

car l'opérateur $\mathrm{K}(\alpha,\alpha') : \mathrm{H}^{s-3/2}(\partial\mathrm{D}) \to \mathrm{H}^{s-5/2}(\partial\mathrm{D})$ est compact d'après le théorème de Rellich. On déduit donc de la proposition 4.9 la

PROPOSITION 4.10. — *Soit* $\alpha \geqslant 0$ *et* L *une condition aux limites de Ventcel' satisfaisant à* (1.2), (1.3) *et* (1.5). *On suppose que* L *est transversal sur* $\partial\mathrm{D}$ *et que l'hypothèse* (H) *est satisfaite. Alors, pour tout* $s \geqslant 5/2$, *l'opérateur* $\mathscr{T}(\alpha) : \mathrm{H}^{s-3/2}(\partial\mathrm{D}) \to \mathrm{H}^{s-5/2}(\partial\mathrm{D})$ *est d'indice zéro.*

4) D'après le corollaire du théorème XI de [1], on obtient une variante du principe du maximum au bord :

PROPOSITION 4.11. — *Soit* L *une condition aux limites de Ventcel' satisfaisant à* (1.2), (1.3), (1.4) *et* (1.5). *On suppose que* L *est transversal sur* $\partial\mathrm{D}$. *Pour tout* $\alpha > 0$, *on a alors :*

$$u \in \mathrm{C}^2(\bar{\mathrm{D}}),\ \mathrm{L}u(x') \geqslant 0 \quad \textit{sur} \quad \partial\mathrm{D}$$

et

$$(\Delta - \alpha)u(x) \geqslant 0 \quad \textit{dans} \quad \mathrm{D} \Rightarrow u(x) \leqslant 0 \quad \textit{sur} \quad \bar{\mathrm{D}}.$$

Fin de la démonstration du théorème 4.1. — En vertu de la proposition 4.2 avec $t = s - 1$, il suffit de montrer que, si $\alpha > 0$ et $s \geqslant 3$, l'opérateur $\mathscr{T}(\alpha) : \mathrm{H}^{s-3/2}(\partial\mathrm{D}) \to \mathrm{H}^{s-5/2}(\partial\mathrm{D})$ est bijectif. Pour cela, en remarquant que

$\mathscr{T}(\alpha)$ est d'indice zéro d'après la proposition 4.10, il suffit de montrer que l'opérateur est *injectif.*

Notons d'abord que, en raisonnant comme dans la démonstration du lemme 4.6, on voit d'après (4.7) que, si l'hypothèse (H) est satisfaite, l'opérateur pseudo-différentiel LH_α est hypoelliptique pour tout $\alpha \geqslant 0$ sur ∂D.

Supposons que $\psi \in H^{s-3/2}(\partial D)$ et $\mathscr{T}(\alpha)\psi = LH_\alpha\psi = 0$ ($s \geqslant 3$ et $\alpha > 0$). On en déduit que ψ est dans $C^\infty(\partial D)$ d'après l'hypoellipticité de LH_α ; donc aussi que $w = H_\alpha\psi \in C^\infty(\bar{D})$ et w est une solution du problème ($*$) avec $f = 0$ et $\varphi = 0$ d'après le corollaire 2.2. Par conséquent $w = 0$ d'après la proposition 4.11, d'où $\psi = w|_{\partial D} = 0$, ce qui montre que $\mathscr{T}(\alpha)$ est injectif.

Le théorème 4.1 est ainsi démontré.

5. Démonstration des théorèmes 2, 3 et 4 : cas du premier ordre.

5.1. *Démonstration du théorème* 2. — 1) Soit L_0 une condition aux limites de la *dérivée oblique :*

$$L_0u(x') = \mu(x')\frac{\partial u}{\partial n}(x') + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x')\frac{\partial u}{\partial x_i}(x') + \gamma(x')u(x')(u \in C^2(\bar{D})).$$

On considère le problème aux limites suivant : pour deux fonctions f et φ définies dans D et sur ∂D respectivement, trouver une fonction u dans D telle que

$$(*)' \quad \begin{cases} (\alpha - \Delta)u = f \quad \text{dans} \quad D, \\ (\lambda - L_0)u = \mu\left(-\dfrac{\partial u}{\partial n}\right) + \displaystyle\sum_{i=1}^{N-1} (-\beta^i)\frac{\partial u}{\partial x_i} + (\lambda - \gamma)u|_{\partial D} = \varphi \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur} \quad \partial D, \end{cases}$$

où α et λ sont des nombres réels.

Pour g et h dans $C^\infty(T^*\partial D)$, on désigne par $\{g,h\}$ le crochet de Poisson de g et h :

$$\{g,h\} = \sum_{i=1}^{N-1}\left(\frac{\partial g}{\partial \xi_i}\frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial h}{\partial \xi_i}\right).$$

D'après le théorème 1 de [12], on obtient le

LEMME 5.1. — *Soit* $s \geqslant [n/2] + 4$. *On suppose :*

(H.1) $\mu(x') \geqslant 0$ *et* $\gamma(x') \leqslant 0$ *sur* ∂D.

(B.1) $\lambda > 0$.

$(C)_s$ λ *est assez grand pour que, en tout point* x' *de*

$$M = \{x' \in \partial D \,;\, \mu(x') = 0\},$$

$$(\lambda - \gamma(x')) + \frac{1}{2}\operatorname{div}\beta(x') - \frac{1}{2}(s-3/2)\ \{|\xi'|^2, \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x')\xi_i\} > 0$$

pour tout $\xi' \in T^*_{x'}\partial D$ *avec* $0 \leqslant |\xi'| \leqslant 1$. *Ici* $\operatorname{div}\beta$ *est la divergence de* $\beta = (\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^{N-1})$ *par rapport à la métrique* $(g_{ij}(x'))$ *de* ∂D.

Alors, pour tout $\alpha > 0$, *le problème* $(*)'$ *admet une solution unique* $u \in H^{s-1}(D)$ *pour toutes* $f \in H^{s-2}(D)$ *et* $\varphi \in H^{s-3/2}(\partial D)$.

En effet, il suffit de remplacer $\mathbf{R}^n$, Ω, Γ, Γ_0, λ, a, b, α, ν et $\varnothing$ dans [12] par $\mathbf{R}^N$, D, ∂D, M, $-\alpha$, μ, $\lambda - \gamma$, $-\beta$, $-n$ et φ respectivement.

En remarquant que $H^{s-1}(D) \subset C^2(\bar{D})$ d'après le lemme de Sobolev ($s \geqslant [n/2] + 4$) et que $C^\infty(\bar{D}) \subset H^{s-2}(D)$ et $C^\infty(\partial D) \subset H^{s-3/2}(\partial D)$, on obtient le

COROLLAIRE 5.2. — *On suppose que l'hypothèse* (H.1) *est satisfaite. Il existe alors un nombre* $\lambda > 0$ *tel que, pour tout* $\alpha > 0$, *le problème* $(*)'$ *admette une solution unique* $u \in C^2(\bar{D})$ *pour toutes* $f \in C^\infty(\bar{D})$ *et* $\varphi \in C^\infty(\partial D)$.

2) Soit L une condition aux limites de Ventcel' du premier ordre satisfaisant à (1.2), (1.4) et (1.5).

$$Lu(x') = \mu(x')\frac{\partial u}{\partial n}(x') + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x')\frac{\partial u}{\partial x_i} + \gamma(x')u(x') - \delta(x')\,\Delta u(x') \quad (u \in C^2(\bar{D})).$$

(1.2) $\mu(x') \geqslant 0$ sur ∂D.

(1.4) $\gamma(x') \leqslant 0$ sur ∂D.

(1.5) $\delta(x') \geqslant 0$ sur ∂D.

Puisque $C^\infty(\partial D)$ est dense dans $C(\partial D)$, en utilisant le théorème 5.1 de Sato-Ueno [8], on voit d'après le corollaire 5.2 avec $f = 0$ que $\overline{L_0 H_\alpha}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller sur ∂D ; donc aussi que

$\overline{\mathrm{LH}_\alpha}$ $(\mathrm{L} = \mathrm{L}_0 - \delta\,\Delta)$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller sur $\partial\mathrm{D}$ en vertu du lemme 6.4 de [8]. D'après le théorème 5.2 de [8], on en déduit que, si L est transversal sur $\partial\mathrm{D}$, il existe un semi-groupe de Feller $\{\mathrm{T}_t\}_{t\geqslant 0}$ sur $\bar{\mathrm{D}}$. De plus, d'après les lemmes 4.5 et 2.3 de [8], on a les propriétés i) et ii) du théorème 2 pour le générateur infinitésimal A de $\{\mathrm{T}_t\}$.

5.2. *Démonstration du théorème* 3. — Il suffit de montrer que les hypothèses (I) et (II) du théorème 3.1 sont vérifiées. D'après le théorème 2 de [12], on obtient comme le corollaire 5.2 le

LEMME 5.3. — *On suppose :*

(H.1) $\mu(x') \geqslant 0$ *et* $\gamma(x') \leqslant 0$ *sur* $\partial\mathrm{D}$.

(H.2) *Il existe une constante* $\mathrm{C}_0 > 0$ *telle que*

$$\left|\sum_{i=1}^{\mathrm{N}-1} \beta^i(x')\xi_i\right| \leqslant \mathrm{C}_0\mu(x')|\xi'| \quad \textit{sur} \quad \mathrm{T}^*\,\partial\mathrm{D}.$$

(B.1) $\lambda > 0$.

Alors, pour tout $\alpha > 0$, *le problème*

$$\begin{cases} (\alpha - \Delta)u = f \quad \textit{dans} \quad \mathrm{D}, \\ (\lambda - \mathrm{L}_0)u = \mu\left(-\dfrac{\partial u}{\partial n}\right) + \displaystyle\sum_{i=1}^{\mathrm{N}-1} (-\beta^i)\frac{\partial u}{\partial x_i} + (\lambda-\gamma)u|_{\partial\mathrm{D}} = \varphi \quad \textit{sur} \quad \partial\mathrm{D} \end{cases}$$

admet une solution unique $u \in \mathrm{C}^\infty(\bar{\mathrm{D}})$ *pour toutes* $f \in \mathrm{C}^\infty(\bar{\mathrm{D}})$ *et* $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\partial\mathrm{D})$.

On déduit du lemme 5.3 que l'hypothèse (I) du théorème 3.1 est vérifiée avec $\lambda > 0$ et $\delta_0 = \delta$.

On va donc montrer que l'hypothèse (II) du même théorème est vérifiée. D'après (4.1) de [12], on sait que, pour tout $\alpha \geqslant 0$ *fixé*, le symbole de l'opérateur pseudo-différentiel $-\,\mathrm{LH}_\alpha$ du premier ordre sur $\partial\mathrm{D}$ est donné par :

$$\begin{aligned} (5.1) \quad & \left[\mu(x')|\xi'| + \sqrt{-1}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}-1}(-\beta^i(x'))\xi_i\right] \\ & \quad + \left[(-\gamma(x') + \alpha\,\delta(x')) + \frac{1}{2}\mu(x')\left(\frac{\omega_{x'}(\xi',\xi')}{|\xi'|^2} - (\mathrm{N}-1)\mathrm{M}(x')\right)\right. \\ & \left. + \sqrt{-1}\mu(x')\left(\sqrt{\rho(x')}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}-1}\frac{\partial}{\partial\xi_j}(|\xi'|)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho(x')}}\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}-1}\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial\xi_j}(|\xi'|)\right)\right] \end{aligned}$$

+ des termes d'ordre $\leqslant -1$ dépendant de α.

Ici $\omega_{x'}(\,,\,)$ est la deuxième forme fondamentale en un point x' de l'hypersurface $\partial D \subset \mathbf{R}^N$, $M(x')$ est la courbure moyenne en un point x' de ∂D et

$$\hat{\xi}' = (g^{1j}(x')\xi_j, g^{2j}(x')\xi_j, \ldots, g^{N-1j}(x')\xi_j).$$

D'après (5.1), en raisonnant comme dans la démonstration de la proposition 5.1 de [12], on obtient le

LEMME 5.4. — *Soit* $\alpha \geqslant 0$. *On suppose :*

(A.1) $\qquad \mu(x') \geqslant 0 \quad$ *sur* $\quad \partial D$.

(H.2) *Il existe une constante* $C_0 > 0$ *telle que*

$$\left| \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x')\xi_i \right| \leqslant C_0 \mu(x') |\xi'| \quad \textit{sur} \quad T^* \partial D.$$

(B.1) $\quad -\gamma(x') + \alpha\,\delta(x') > 0$ *sur* $M = \{x' \in \partial D\,;\ \mu(x') = 0\}$.

Alors LH_α *est hypoelliptique dans* ∂D.

En effet, il suffit de remplacer $\mathbf{R}^n, \Omega, \Gamma, \Gamma_0, \lambda, a, b, \alpha, \nu, T(\lambda)$ et φ dans [12] par $\mathbf{R}^N, D, \partial D, M, -\alpha, \mu, -\gamma + \alpha\,\delta, -\beta, -n, LH_\alpha$ et ψ respectivement.

Puisque, si L est transversal sur ∂D (cf. (1.6)), l'hypothèse (B.1) du lemme 5.4 est satisfaite pour tout $\alpha > 0$, on déduit du lemme 5.4 que l'hypothèse (II) du théorème 3.1 est vérifiée d'après la remarque 3.2.

5.3. *Démonstration du théorème* 4. — D'après le théorème 2 de [11], on obtient un lemme analogue au lemme 5.3 :

LEMME 5.5. — *On suppose :*

(H.1) $\mu(x') \geqslant 0$ *et* $\gamma(x') \leqslant 0$ *sur* ∂D.

(C.2) *Le champ de vecteurs* $\beta = (\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^{N-1})$ *sur* ∂D *est non nul sur* $M = \{x' \in \partial D\,;\ \mu(x') = 0\}$ *et aucune courbe intégrale maximale de* β *n'est entièrement contenue dans* M.

(B.1) $\lambda > 0$.

Alors, pour tout $\alpha > 0$, *le problème*

$$\begin{cases} (\alpha - \Delta)u = f \quad \textit{dans} \quad D, \\ (\lambda - L_0)u = \mu\left(-\dfrac{\partial u}{\partial n}\right) + \displaystyle\sum_{i=1}^{N-1} (-\beta^i)\frac{\partial u}{\partial x_i} + (\lambda - \gamma)u|_{\partial D} = \varphi \ \textit{sur}\ \partial D \end{cases}$$

admet une solution unique $u \in C^\infty(\bar{D})$ *pour toutes* $f \in C^\infty(\bar{D})$ *et* $\varphi \in C^\infty(\partial D)$.

De plus, on obtient un lemme analogue au lemme 5.4 :

LEMME 5.6. — *On suppose :*

(A.1) $\mu(x') \geqslant 0$ *sur* ∂D.

(C.2) *Le champ de vecteurs* $\beta = (\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^{N-1})$ *sur* ∂D *est non-nul sur* $M = \{x' \in \partial D\,;\ \mu(x') = 0\}$ *et aucune courbe intégrale maximale de* β *n'est entièrement contenue dans* M.

Alors, pour tout $\alpha \geqslant 0$, LH_α *est globalement hypoelliptique dans* ∂D.

Démonstration. — D'après (5.1), en utilisant la théorie des opérateurs intégraux de Fourier à phases complexes de Melin-Sjöstrand [6] comme dans la démonstration du lemme 3.6 de [11], on voit que l'opérateur pseudo-différentiel LH_α sur ∂D admet pour tout $\alpha \geqslant 0$ une paramétrixe bilatère E_α, continue de $H^s(\partial D)$ dans $H^s(\partial D)$ pour tout $s \in \mathbf{R}$, au sens habituel :

$$LH_\alpha \cdot E_\alpha \equiv E_\alpha \cdot LH_\alpha \equiv I_{\mathscr{D}'(\partial D)},$$

où $A \equiv B$ si $A - B$ est un opérateur régularisant. D'où en particulier l'hypoellipticité globale de LH_α. c.q.f.d.

On déduit des lemmes 5.5 et 5.6 que les hypothèses (I) et (II) du théorème 3.1 sont vérifiées avec $\lambda > 0$ et $\delta_0 = \delta$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. M. BONY, P. COURRÈGE et P. PRIOURET, Semi-groupes de Feller sur une variété à bord compacte et problèmes aux limites intégro-différentiels du second ordre donnant lieu au principe du maximum, *Ann. Inst. Fourier*, vol. 18 (1968), 369-521.

[2] D. FUJIWARA, On some homogeneous boundary value problems bounded below, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sec. IA, vol. 17 (1970), 123-152.

[3] L. HÖRMANDER, Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems, *Ann. of Math.*, vol. 83 (1966), 129-209.

[4] L. HÖRMANDER, A class of hypoelliptic pseudo-differential operators with double characteristics, *Math. Ann.*, vol. 217 (1975), 165-188.

[5] A. MELIN, Lower bounds for pseudo-differential operators, *Ark. för Mat.*, vol. 9 (1971), 117-140.

[6] A. MELIN and J. SJÖSTRAND, Fourier integral operators with complex phase functions and parametrix for an interior boundary value problem, *Comm. in P.D.E.*, vol. 1 (1976), 313-400.

[7] C. MIRANDA, Equazioni alle derivate parziali di tipo ellitico, Springer Verlag, Berlin, 1955.

[8] K. SATO et T. UENO, Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary, *J. Math. Kyoto Univ.*, vol. 14 (1965), 529-605.
[9] K. TAIRA, On non-homogeneous boundary value problems for elliptic differential operators, *Kôdai Math. Sem. Rep.*, vol. 25 (1973), 337-356.
[10] K. TAIRA, Sur l'existence des processus de diffusion satisfaisant aux conditions aux limites de Ventcel', *C.R. Acad.*, t. 284, série A (1977), 1133-1136.
[11] K. TAIRA, Sur le problème de la dérivée oblique I, *J. Math. pures et appl.*, vol. 57 (1978), 379-395.
[12] K. TAIRA, Sur le problème de la dérivée oblique II, à paraître dans *Ark. för Mat.*
[13] A. D. VENTCEL', O graničnykh uslovijakh dlja mnogomernykh diffuzionykh processov, *Teor. Veroj. i Primen.*, t.4 (1959), 172-185; trad. anglaise dans *Theor. Prob. and Appl.*, t.4 (1959), 164-177.

Manuscrit reçu le 2 janvier 1979.

Kazuaki TAIRA,
Département de Mathématiques
Université de Paris Sud
91405Orsay.

Adresse courante :
Institut de Mathématiques
Université de Tsukuba
300-31 Ibaraki (Japon).