創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

－中高６カ年から大学へ－

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
更科　元子・鈴木　清夫・須田　　学
須藤　雄生・田中　祥子・町田多加志
三井田裕樹

創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

－中高６カ年から大学へ－

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
更科　元子・鈴木　清夫・須田　　学
須藤　雄生・田中　祥子・町田多加志
三井田裕樹

要約

2012年度から学年進行で実施されている新しい指導要領では、基礎的な統計を学習する「データの分析」や「数学的活動」など、理数教育の充実や言語活動の重視などが盛り込まれた。いずれにしても日々の授業の目標は、知識や技能及び表現力などを身に付けさせながら創造性の基礎を培い、数学のよさを認識して積極的に活用することや数学的論拠に基づいて判断する態度を育てることであろう。そして、日々の授業において生徒も教師もわくわくして取り組めるような題材を取り上げることが、生涯にわたって積極的に数学にかかわっていく能力や態度を育てることに繋がると考えている。

本校は2002年度から継続してスーパーサイエンスハイスクール(SSH)に指定されている。その中で数学科は、上記のような、そして大学や社会に繋がる中高の教材を開発すべく研究を行っている。具体的には、『統計』(集団の特徴を捉える考え方や手法)、『微分方程式』(微小な変化に注目して関数の特徴をつかむ考え方）の教材開発から始めて、その他の様々な分野を含めて、昨年度までに約60の教材を開発し、中高６カ年のカリキュラムづくりを進めている。またこれらの教材に関して、公開授業や研究協議会・教員研修会などを開催し、研究の充実を図っている。

キーワード：サイエンスコミュニケーション，中高大院連携

1. はじめに

本校数学科では，筑波大学や他大学の数学関係者の協力を得ながら，大学や社会での学びにつながる数学教材の開発および指導法の研究を行っている。

2002年度から指定を受けたスーパーサイエンスハイスクール(以下SSHと略)研究『先駆的な科学者・技術者を育成するための中高一貫カリキュラム研究と教材開発』の中で数学科は，大学での学びにつながる数学に注目し，特に「統計」(集団の特徴を掴む考え方や手法）および「微分方程式」(微小な変化から関数の特徴を捉える考え方）に関する教材開発と授業実践を行った。2007年度より５年間の指定を受けたSSH研究では，これら以外の分野を含めて，生徒も教師も興味を持って取り組めるような魅力的で有効な教材を開発し，中高一貫カリキュラムの充実を目指した。

2012年度以降は『幅広い教養と強い探究心をもつ国際性豊かな最先端 研究者を育成する高大連携プログラムの研究と実施』をテーマに取り組んでいる。

その結果、これまでに65の教材を開発し，カリキュラムに配置するとともに，教員研修会などで発表している。2011年度末には，SSH指定10年の区切りとして，これまで開発した教材を纏めて，冊子を作成した。

また，生徒の数学への興味関心を高めるための「特別講座」，サイエンスコミュニケーション能力の育成を目指した筑波大学インターンシップと連動した総合学習「ゼミナール」「テーマ研究」，数学研究部など生徒の数学的活動の支援，などを実施している。

2. 今年度の研究

2.1. 教材の開発

中・高一貫の良さは，生徒達が，ゆとりある学校生活を過ごしながら，自分を見つけ出し，何かに熱中し，自分の個性を伸ばすことにある。生徒は教科の勉強だけでなく，学校行事や校外学習，部活動，水田学習などいろいろなものを通して成長していく。数学においても，教

科書の内容や授業の宿題だけでなく，自分で見つけた自分の課題を大切にして納得いくまで個人で研究したり，数学研究のクラブ活動で友人らと「こんな証明はどうなんだろう」などとわいわい議論して楽しんだり，数学オリンピック・情報オリンピックなどに積極的に挑戦したり，いうなれば“数学の特別活動”が大切であろう。以前数学オリンピックに出た生徒は「世界が広がった。多くの友人が出来た」と言っていた。人生が豊かになるために，成長していくために，楽しい学校生活に，数学は大きく貢献できるのである。

本校数学科では専任教員がそれぞれ同じ生徒をできるだけ継続して担当し，中高6年間さらに大学をも見通した授業を行うように努めている。そこでの共通した目標は『いろいろな現象や事柄に潜む仕組みや法則を数学的に解析し，その本質を捕まえ，そしてそれらを表現できるようになる』ことである。入学直後の中学一年生の多くは，答えが求まればよい，速く答えを出す方が良いと考えている。そのような生徒に「なぜ？」「どうしてそうなるの？」と問いかけ，その説明に他の生徒が「なるほど，そんな風にも考えられるのか」「へー，うまい考え方だなー」と理解を深めていくことは大切なことである。たとえ「答え」は同じでも，そこに至る考えは多様にあり，それらを知り理解することは，様々な人の個性を認めることと同様，とても重要なことである。そして自分の考えを発表し，また色々な考え方を知ることは，その中に潜む仕組みを一層はっきりと認識させてくれる。

このことは中高から大学への流れの常に忘れずに意識しておきたい。それには，適切な教材が欠かせない。様々な分野において，大学での学びにつながる数学教材，魅力的で有用な教材を開発する必要があると考えられる。充実したカリキュラム作成のために，生徒も教師も意欲的に取り組めるような教材をできるだけたくさん開発し，魅力的な学びを目指していきたいと考えている。

これまでに開発した教材一覧を後ページに記載する。このうち以下の７つの教材を本年度研究し，開発した。

A1-2.	平方根の連分数展開について
An1-4.	図で証明する三角関数の性質
g1-4.	正多面体の面や辺の作る角
g1-5.	三平方の定理
g3-4.	ヘロンの公式の幾何的証明と応用
G1-3.	正多角形と等積な正方形の作図法
d3-4.	放物線で囲まれる面積

2.2. 研修会

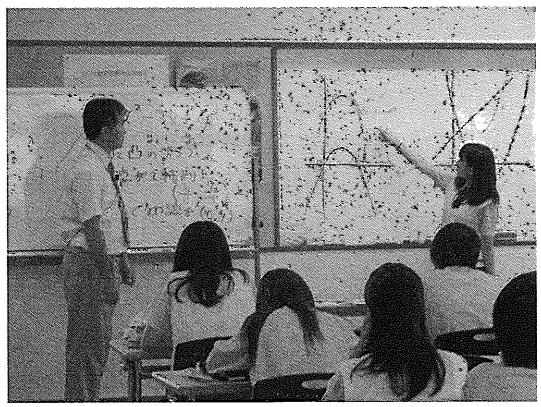
開発した教材・カリキュラムは教員研修会などで公開し，参加者から今後の研究の指針を得ている。最近の研修会を報告する。

・SSH 岡山数学研修会

2013 年 8 月 28 日（水）金光学園高校にて

研究授業　金光学園高校　筑駒

発表校　筑駒　豊田西高校　金光学園高校



2011 年度の熊本，2012 度の香川に続き，今回も研究授業を含む教員研修会をさせていただいた。

金光学園の授業見学の後，金光学園高校の生徒に協力してもらい，本校数学科の教材に取り組んでもらう研究授業を行った。教員の報告・意見交換にとどまらず，具体的な教材に対する生徒の活動を見ることで，先生方だけでなく参加生徒より貴重な意見をいただくことができた。また，新しい開発教材もいくつか発表した。金光学園からは，生徒の数学部活動報告や SSH 実践報告があった。愛知県立豊田西高校からは，SSH 1 年目の取り組みが報告された。

また，岡山県の数学教育の様子や，校内における取り組みに関する情報交換ができ，大変有意義な会であった。このように地方に行って，他県の多くの先生方と現地で交流できることは，SSH の取り組みならではのことである。会場をお願いした金光学園高校，ご協力いただいた豊田西高校の先生方に深く感謝したい。

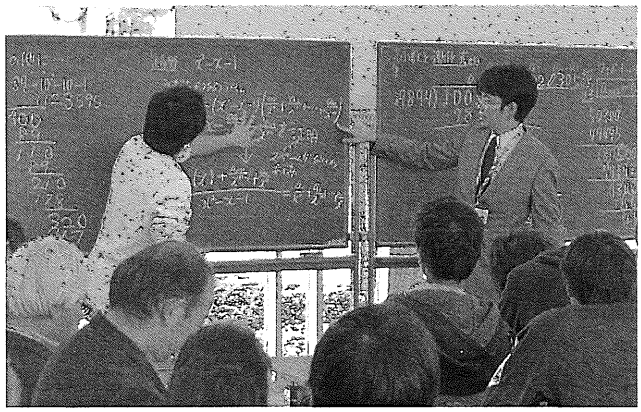
・第 40 回教育研究会

2013 年 11 月 23 日（土）本校にて

研究会主題「新しい学びのかたち」

研究授業

中学 1 年 『数の性質』　　高校 2 年 『漸化式』



教育研究会は、参加者に本校の授業を実際に見ていただく貴重な機会である。今年度は中 1，高 2 の授業を公開しするとともに研究発表を行い，研究協議会においていろいろなご意見をいただいた。今後の研究活動に生かしていきたい。

2.3. 数学特別講座

SSH 事業として，魅力ある内容に関する「数学特別講座」を大学の先生や卒業生に実施していただいている。この講座の目的は，中学高校の授業で学ぶ数学が将来どのように発展するのか，どのように活用されるのか等を知ることを通して，生徒の数学への興味・関心を高めるとともに，数学に対する理解を深め，数学を学ぶ意義を感じてもらうことである。なお，これらの内容も授業に取り込める教材として研究する必要があると考えている。

2013 度は次の講座を実施した。

・第 38 回数学特別講座『確率の面白さ』

2013 年 12 月 9 日（月）

講師：藤田岳彦 先生（中央大学理工学部教授・日本数学オリンピック財団理事）

受講者　30 名（希望者）

内容（募集案内より抜粋）

> まず確率論とは何かを概観し、純粋数学への応用としてはリーマンゼータ関数と確率論の関係について述べる。応用数学としては、伊藤清先生（2006 年ガウス賞受賞）の作られた確率解析をランダムウォークから説明する離散確率解析を導入として説明し、最後に数理ファイナンスへの応用（ブラックショールズ理論）について論じる。

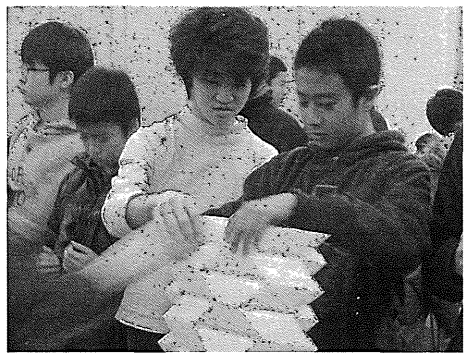
・第 39 回数学特別講座

『コンピュテーショナル・オリガミ入門　～折紙の幾何学とアルゴリズムならびにその工学応用』

講師：舘知宏先生（東京大学 大学院総合文化研究科）

2013年12月10日（火）

受講者　38 名（希望者）



内容（募集案内より抜粋）

> 折紙は紙を折ることで様々な形を作る伝統的な遊び・創作活動ですが，近年では ORIGAMI として国際的に認知され，数学，科学，工学，建築，芸術，教育，歴史など多様な側面から研究される学際的なテーマです。近年の折紙の発展においては特に，「計算折紙」すなわち折紙の幾何学とアルゴリズムにかかわる研究が重要な役割を担っています。本講座では，三次元折紙と変形メカニズムの幾何的性質を解説し，それらを設計可能とする最先端の計算手法，計算折紙によって可能となるデザインや工学応用可能性を紹介します。

・第 40 回数学特別講座

『曲線で囲まれた面積を高精度に計算するには？
－数値積分とフーリエ級数の親密な関係－』

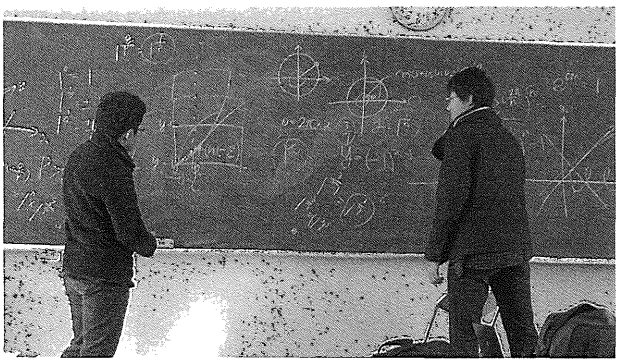
2014 年 1 月 11 日（土）

・講師：小林健太 先生（一橋大学 商学研究科）

2.4. 学年を越えた少人数学習の研究と実践

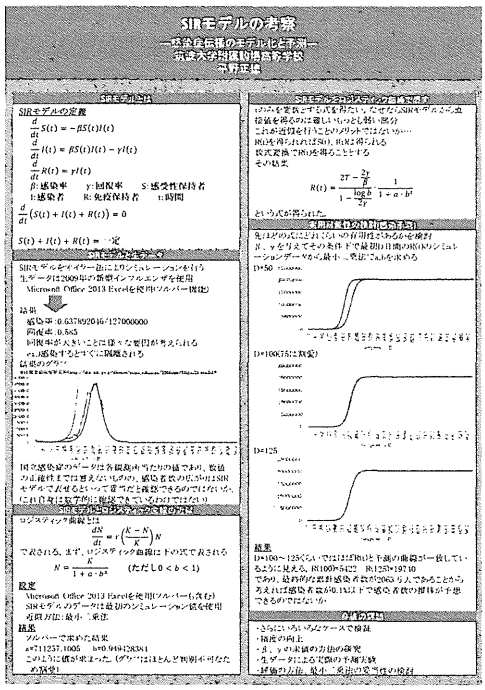
サイエンスコミュニケーション能力の育成を目指して，高校 2 年生の総合学習「ゼミナール」を，筑波大学大学院生が参加する形で実施している。これは筑波大学大学院数理物質科学研究科(DC)の講座「数学インターンシップ」(1 単位)と連動したものであり，高校 3 年生の総合学習(テーマ研究) につながる。生徒は研究成果をレポートにまとめるとともに，本校テーマ研究発表会，SSH 生徒研究発表会などで発表している。

2012 年度は大学院生のかわりに本校 OB の参加もあった。高校 3 年生の発表，中学 3 年生も参加しての高 2 生徒のプレ発表，大学院生の講義などを行った。参加者のアンケートから，相互に刺激を受けていることが窺え，効果的な取り組みであると考えている。



2013年度は、筑波大学の坂井公教授や大学院生のご指導を受けながら，数学好きの生徒が集まって『明日役に立たなくても400年後に役立つ（かもしれない）数学』をテーマに取り組んでいる。

明治大学「高校生によるMIMS現象数理学研究発表会」のような生徒発表の場に積極的に生徒は参加し，発表している。2013年の第3回では、最優秀賞と審査員特別賞を受賞した。



【2013年　最優秀ポスター賞】

第5回マス・フェスタ（2013年08月24日）にも参加し，積極的に取り組んだ。これは，大阪府立大手前高校の主催しているイベントで，数学を愛好する高校生が参集して日頃の研究成果を披露しあう場である。本校ではここ数年希望者が参加している。

2.5. 生徒の数学的活動の支援

特別講座同様，生徒の数学への興味関心を高めるために数学オリンピック(JMO)・数学ジュニアオリンピック(JJMO)への参加を募っている。今年度も多数が応募している。国際数学オリンピックには，日本が初参加した第32回大会から2013年夏の第54回大会までに，のべ33名の生徒が，2012～13年国際数学競技会ではのべ4名の中学生が，日本代表として参加した。

数学オリンピック　参加者数→IMO成績

2010年 JJMO184名 JMO59名→金メダル1

2011年 JJMO205名 JMO94名→銀メダル1

→ IMC（国際数学競技会；中3以下）　銀メダル2

2012年 JJMO133名 JMO89名

→JMO銅メダル1，成績優秀者1

→ 2013国際数学競技会（IMC）ブルガリア（BIMC）(2013.6）の 日本代表選手2名

→金メダル1，銀メダル1　（総合順位1位）

→第54回国際数学オリンピック（IMO）コロンビア大会の日本代表選手2名銀メダル獲得(2013.7月)

京都大学が主催する「数学の森 in Kyoto」数学コンテストでは、2013年3月に1名が参加し金賞、2013年12月には4名が参加し、銀賞・銅賞を受賞した。

数学に興味関心を持った生徒が集まり研究活動を行い，数学を楽しむ部活動「数学科学研究会」の支援を行っている。昨年度も文化祭での発表に多数の来場者を得るとともに，研究レポート集を発行した。

3. 開発教材一覧

★印　今年度開発中のもので本稿に記載。

「A. 代数(Algebra)」，「An. 解析(Analysis)」，「G. 幾何(Geometry)」，「P. 確率(Probability)」，

「S. 統計(Statistics)」，「D. 微分方程式(Differential Equation)」，「O. その他(Others)」

各項目を整理する際，中学を小文字，高校を大文字にして，校種を区別した。また，教材開発の際に想定している，もしくは，実際に授業をおこなった学年を数字で示した。学年を特定していない教材や複数学年での取り扱いを想定している教材は，数字の代わりに「f」を用いた。

（例） an2. **合成関数とグラフ** 中学２年の「解析」

以下★の教材を記載する。

a1.	整数	2008
a1-2.	有理数	2007
a3.	暗号理論と整数論	2006
A1.	数と方程式	2008
A1-2.	平方根の連分数展開について	2012
A2.	離散な数列と連続な関数	2009
A2-2.	ΣK＾４と区分求積法	2011
A3.	置換と正多面体群	2007
A3-2.	１次変換の線形性	2008
an1.	２元１次方程式とその応用	2007
an2.	合成関数とグラフ	2009
an3.	絶対値を含む関数のグラフ	2009
an3-2.	絶対値とガウス記号を含む関数のソフトウエアによるグラフ描画	2010
An1.	２次関数	2007
An1-2	２次関数（２）	2009
An1-3	和や積のグラフ	2010
An1-4.	図で証明する三角関数の性質	2013★
An2.	円周率の近似	2007
An2-2.	三角関数表を作る	2006
An2-3.	加法定理から導き出される多項式	2006
An2-4.	三角関数の和と積の周期	2011
g1.	四角形の合同条件	2008
g1-2.	作図の教材	2009
g1-3.	四角形の性質（包含関係）	2010
g1-4.	正多面体の面や辺の作る角	2012
g1-5.	三平方の定理	2013★
g2.	チェバ・メネラウスの定理	2007
g3.	立方体の切断	2007
g3-2.	反転法	2007
g3-3.	立方体の切断（２）	2009
g3-4.	ヘロンの公式の幾何的証明と応用	2013★

G1.	四面体の幾何	2008
G1-2.	デカルトの円定理	2009
G1-3.	正多角形と等積な正方形の作図法	2013★
G2.	正１７角形の作図	2008
G2-2.	ベクトルの内積と方べきの定理	2011
s1.	統計の基本	2006
s2.	標準偏差・近似直線	2006
s3.	正規分布と標準化	2006
s3-2.	シミュレーションによる授業	2006
S1.	回帰直線，相関係数	2007
S1-2.	数理統計学入門	2009
S2.	残差分析によるデータ系列の関係	2007
S3.	主成分分析入門	2007
S3-2.	正規分布の平均の推定	2008
d1.	自然数の和，平方数の和，立方数の和	2007
d1-2.	『数える』	2010
d2.	グラフや図形の移動・変形	2006
d3.	２次関数の接線	2006
d3-2.	面積・体積	2006
d3-3.	最大・最小	2006
d3-4.	放物線で囲まれる面積	2013★
D1.	包絡線	2006
D2.	グラフ描画の方法 ーテクノロジーへの挑戦ー	2007
D3.	包絡線(その２)	2006
D3-2.	微分方程式	2006
D3-3.	微分方程式の応用	2006
D3-4.	関数のグラフの描画法	2008
D3-5.	曲線と面積	2008
Of.	４元数を高校数学へ	2007
O2.	有限世界の数学	2007
p2.	身近な確率・連続変量の確率	2011
Pf1.	組合せの確率モデル	2007
Pf2.	EBI と確率・統計	2007
Pf3.	無限集合の確率	2008

An1-4. 図で証明する三角関数の性質

関連分野	：解析分野，幾何分野
高等数学	：初等幾何
対象学年	：高校１年生・高校２年生
関連単元	：三角比，三角関数
教 材 名	：図で証明する三角関数の性質

《三角関数の性質の証明》

三角比（数学Ⅰ）および三角関数（数学Ⅱ）の分野においては，sin，cos，tan を含む等式について，さまざまな性質の証明が行われる。本来，三角比は，直角三角形の辺の比から生まれた概念であるから，角の一般性を問わなければ，そこには必ず図形的解釈があるはずであるが，教科書では，一般性を指向する観点からか，すでに示した等式を変形することによる証明に終始することが多い。これはある意味ではもったいないことのように筆者は思う。さまざまな等式に対して図形的根拠を明らかにすることで，もとの等式に対する理解を深め，見方を豊かにすることもできる。このことは，とかく「三角関数は公式を暗記する分野」と考えがちな生徒の意識を変容させることにもつながるのではないだろうか。

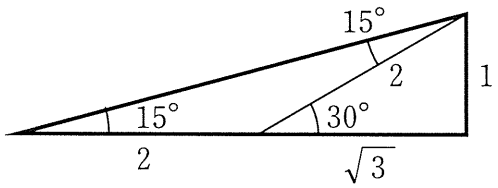
本稿ではこのような考えから，筆者の授業のなかで生徒が持ち寄った三角関数の性質への図形的な証明を，いくつか紹介していきたい。

1. 15 度の三角比

次の等式は，数学Ⅰの三角比では比較的有名な等式といえるであろう。

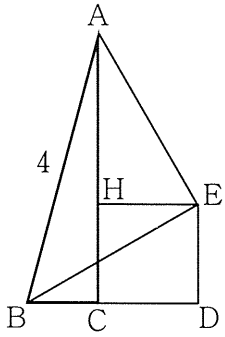
$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

たいていの場合，この等式は，数学Ⅰの範囲内では，15°，75°，90°の直角三角形をつくり，補助線を使って斜辺の長さを求める方法で示される。具体的には，次のような方法である。



このあと，斜辺の長さを三平方の定理で求めていくのだが，ここで$\sqrt{8+4\sqrt{3}}$ という二重根号を外すことになるし，その後分母の有理化もしなければならない。筆者はこのことに単純に疑問を持ち，「4 や$\sqrt{6}$，$\sqrt{2}$ といった長さが実際に出てくる図は考えられないのか」と生徒に投げかけてみた。その結果，次のようなアイデアが生徒から出た。

《アイデア 1.1》



AB＝4，∠ABC＝75°，∠ACB＝90°とする。AB を斜辺とする直角二等辺三角形 ABE をかき，E から BC の延長，AC へ下ろした垂線の足をそれぞれ D，H とすると，

$$AE = BE = 2\sqrt{2}, \quad \angle EAH = \angle EBD = 30^\circ$$

であるから，

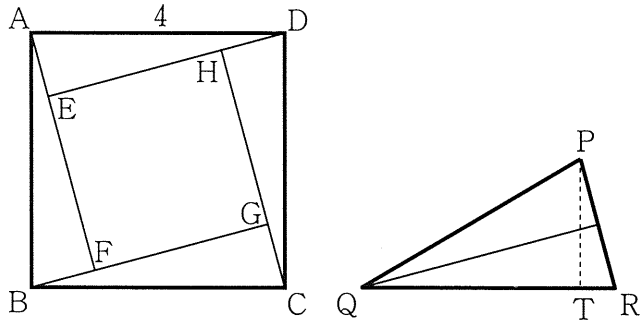
$$EH = ED = \sqrt{2}, \quad BD = AH = \sqrt{6}$$

である。したがって，

$$AC = \sqrt{6}+\sqrt{2}, \quad BC = \sqrt{6}-\sqrt{2}$$

を得る。 ■

《アイデア 1.2》



PQ＝QR＝4，∠PQR＝30°の△PQR の面積は，P から QR に下した垂線 PT の長さが 2 であることから，

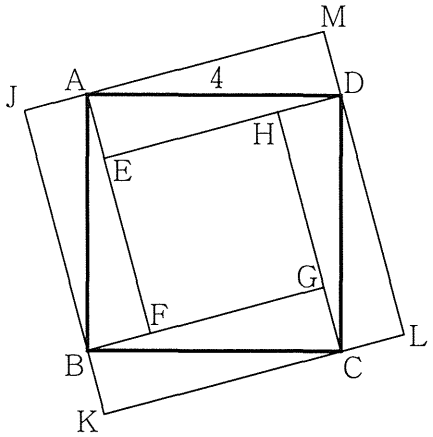
$$4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 4$$

よって，斜辺の長さが 4，2 つの角が15°，75°である直角三角形の面積はこの半分の 2 である。

一辺の長さが 4 である正方形 ABCD の内側に，図のように 2 つの角が15°，75°である直角三角形 ABF，

BCG，CDH，DAE をかくと，内側の正方形 EFGH の面積は，$4\times4-2\times4=8$ となる。よって，

$$EF=FG=GH=HE=2\sqrt{2} \quad \cdots①$$



また，図のように外側にも同じ直角三角形を 4 つ組み合わせて，正方形 JKLM をつくると，その面積は $4\times4+2\times4=24$ であるから，

$$JK=KL=LM=MJ=2\sqrt{6} \quad \cdots②$$

①，②より，

$$AE+ED=2\sqrt{6},\ ED-AE=2\sqrt{2}$$

したがって，

$$AE=\sqrt{6}-\sqrt{2},\ ED=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

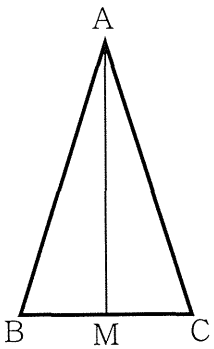
を得る。 ■

2. 倍角公式

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

倍角公式は，加法定理の特別な場合（$\alpha=\beta$）として示されることが多いが，図形的に示すのであれば，むしろ加法定理より簡単な図で示されるので，加法定理に先行するのが自然である。このような考えから，加法定理より先に倍角公式の証明に取り組んだ。

《アイデア 2.1》



AB=AC=1，$\angle BAC=2\alpha$ なる二等辺三角形 ABC に，頂角 A から辺 BC へ下した垂線を BM とする。

$\angle BAM=\angle CAM=\alpha$ であるから，

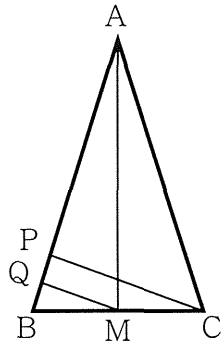
$$AM=\cos\alpha,\ BC=2\sin\alpha$$

したがって，△ABC の面積について，

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times1\times1\sin2\alpha$$
$$=\frac{1}{2}\times2\sin\alpha\times\cos\alpha$$

すなわち，$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ ■

《アイデア 2.2》



前の図で，C，M からそれぞれ AB に垂線 CP，MQ を下ろすと，CP//MQ，BM=MC より，

$$CP=2MQ,\ BQ=PQ \quad \text{（中点連結定理）}$$

また，$\angle QMB=90^\circ-\angle B=\alpha$ であるから，

$$BQ=BM\sin\alpha=\sin^2\alpha$$
$$MQ=AM\sin\alpha=\cos\alpha\sin\alpha$$

したがって，

$$CP=\sin2\alpha=2\cos\alpha\sin\alpha$$
$$AP=AB-BP=1-2\sin^2\alpha$$

あるいは，$AQ=AM\cos\alpha=\cos^2\alpha$ より，

$$AP=AQ-PQ=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$ ■

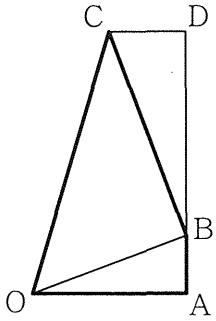
上の図は，$1-2\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ であることを含意した図になっている。$BQ+QA=1$ であることが，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ であることを示しているからである。

3. 三角関数の加法定理

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

ここまでのことを用いて，三角関数の加法定理を図形的に証明する方法について考えた。なお，ここでも与えられた角 α，β のとりうる範囲については深く追求しないこととしたため，多くのものは $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$ で考えている。

《アイデア 3.1》



図で，$\angle BOA=\alpha$，$\angle COB=\beta$，$\angle OBC=90^\circ$ とし，C から AB の延長に下した垂線を CD とする。

$$\begin{aligned}\angle CBD&=\angle OBD-\angle OBC\\&=(90^\circ+\alpha)-90^\circ\\&=\alpha\end{aligned}$$

であるから，OC=1 とすると，

$OB=\cos\beta$ より

$OA=\cos\alpha\cos\beta$，$AB=\sin\alpha\cos\beta$

$CB=\sin\beta$ より

$BD=\cos\alpha\sin\beta$，$CD=\sin\alpha\sin\beta$

$\angle AOC=\alpha+\beta$ であるから，

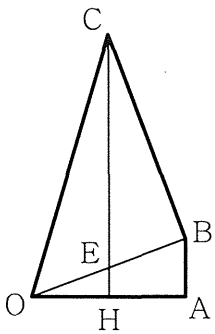
$\sin(\alpha+\beta)=AD=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=OA-CD=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

を得る。 ■

これは結果的に，《アイデア 1.1》を一般の角の場合に拡張したものになっている。

《アイデア 3.2》



図で，$\angle BOA=\alpha$，$\angle COB=\beta$，$\angle OBC=90^\circ$ とし，C から OA に下した垂線を CH とし，OB と CH の交点を E とする。$\triangle OEH\backsim\triangle CEB$（二角相等）であるから，$\angle BCE=\alpha$

OC=1 とすると，$BC=\sin\beta$ より

$BE=\sin\beta\tan\alpha$，$OE=\cos\beta-\sin\beta\tan\alpha$

よって，

$$\begin{aligned}OH&=\cos(\alpha+\beta)\\&=(\cos\beta-\sin\beta\tan\alpha)\cos\alpha\\&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}EH&=(\cos\beta-\sin\beta\tan\alpha)\sin\alpha\\&=\sin\alpha\cos\beta-\frac{\sin^2\alpha\sin\beta}{\cos\alpha}\end{aligned}$$

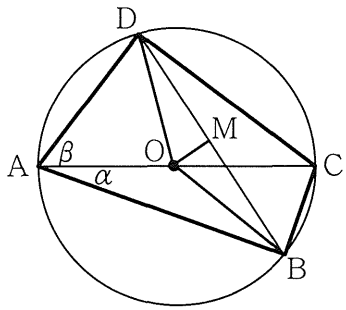
$CE=\dfrac{\sin\beta}{\cos\alpha}$ であるから，

$$\begin{aligned}CH&=\sin(\alpha+\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta-\frac{\sin^2\alpha\sin\beta}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\\&=\sin\alpha\cos\beta+\frac{(1-\sin^2\alpha)\sin\beta}{\cos\alpha}\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

を得る。 ■

《アイデア 3.1》ほどの明解さはないが，三角比の定義と相似をうまく利用して導いている。

《アイデア 3.3》（正弦の加法定理のみ）



図のように，円に内接する四角形 ABCD において，$\angle OAB=\alpha$，$\angle OAD=\beta$ とする。円周角の定理より $\angle ADC=\angle ABC=90^\circ$ だから，AC=1 とすると，

$AB=\cos\alpha$，$BC=\sin\alpha$，

$AD=\cos\beta$，$DC=\sin\beta$ である。

また，円周角の定理より，$\angle DOB=2(\alpha+\beta)$ であるから，O から DB に垂線 OM を下ろすと，

$$DM=OD\sin\frac{2(\alpha+\beta)}{2}=\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)$$

よって，$DB=\sin(\alpha+\beta)$

円に内接する四角形 ABCD では，トレミーの定理

$BC\times AD+AB\times DC=AC\times BD$

が成り立つから，

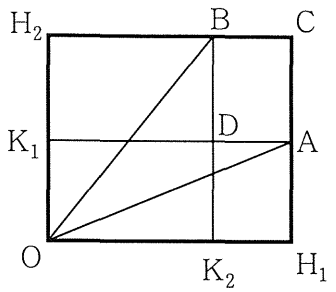
$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=1\times\sin(\alpha+\beta)$

を得る。 ■

トレミーの定理が意外な場面で活躍する証明で，発

表後に生徒間で歓声のあがった証明である。のちに，この証明を発見した生徒は，余弦の加法定理については次のように証明した。

《アイデア 3.4》（余弦の加法定理のみ）



図において，OA=OB=1 とし，四角形OH_1CH_2は長方形である。A，B からOH_2，OH_1に下した垂線をそれぞれK_1，K_2，AK_1とBK_2との交点を D とする。$\angle AOH_1=\alpha$，$\angle BOH_2=\beta$とすると，

$OH_1=\cos\alpha$，$OH_2=\cos\beta$

$AH_1=\sin\alpha$，$BH_2=\sin\beta$

である。

また，

$\triangle BDH_2=\triangle BDO$，$\triangle DAH_1=\triangle DAO$

であるから，

$$\begin{aligned}\triangle OAB&=\triangle ABD+\triangle BDO+\triangle DAO\\&=\triangle ABD+\triangle BDH_2+\triangle DAH_1\\&=\frac{1}{2}(\text{六角形}CH_2K_1DK_2H_1)\\&=\frac{1}{2}(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\quad\cdots①\end{aligned}$$

一方，OA=OB=1，$\angle BOA=\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)$より，

$$\begin{aligned}\triangle OAB&=\frac{1}{2}\times1\times1\sin\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\}\\&=\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)\qquad\cdots②\end{aligned}$$

したがって，①②より，

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

を得る。 ■

繰り返しになるが，これらの証明では角の範囲については深入りしておらず，上の図で説明がつくのは

$$0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$$

の場合に限られる。しかし，これらの証明のアイデアは，$\sin\alpha$，$\cos\alpha$などの値を，すべて「直角三角形の斜辺の長さを 1 としたときの，直角をはさむ 2 辺の長さ」としてとらえており，正弦／余弦の加法定理を「2 つの長さの積の和／差とみなすこと」に着想を得た証明になっている。この見方は，三角比を学ぶ上で，決して軽視されるべきでないように思われる。

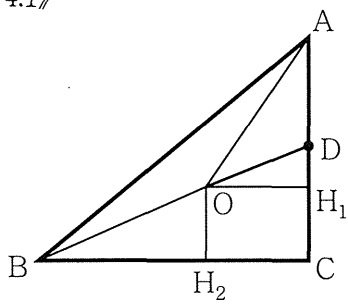
4. 和積の公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

加法定理のときに三角比の値を長さとして表すことが有効であったので，同様にして上の和積の公式を図形で証明することができないかと考えた。

《アイデア 4.1》



図の△ABC において，OA=OB=1，$\angle C=90°$とし，O から AC, BC におろした垂線をそれぞれOH_1，OH_2とする。$\angle AOH_1=\alpha$，$\angle OBH_2=\beta$とすると，

$AH_1=\sin\alpha$，$H_1C=OH_2=\sin\beta$

$BH_2=\cos\beta$，$H_2C=OH_1=\cos\alpha$

したがって，

$AC=\sin\alpha+\sin\beta$，$BC=\cos\alpha+\cos\beta$ …①

一方，BO を延長し，AC との交点を D とすると，

$$\angle ABO+\angle OAB=\angle AOD=\alpha-\beta$$

OA=OB であるから，

$$\angle ABO=\angle OAB=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

よって，$AB=2OB\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

また，$\angle ABC=\beta+\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$であるから，

$$AC=AB\sin B=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$BC=AB\cos B=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

これと①より，与式を得る。 ■

なお，積和についても図形的証明を試みたが，さすがに加法定理から式変形で示す方が簡単のようである。

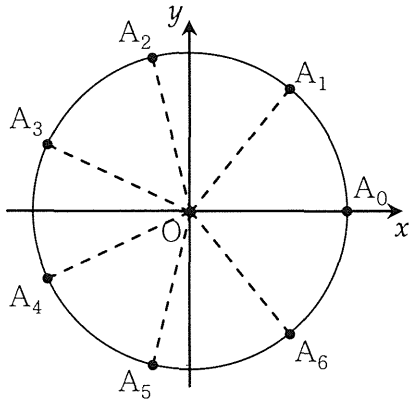
5. $\frac{\pi}{7}$ の三角比（応用）

応用問題として，次のような問題に取り組んだ。

$\sin\frac{2\pi}{7}=a$，$\sin\frac{4\pi}{7}=b$，$\sin\frac{6\pi}{7}=c$ のとき，

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ であることを示せ。

《アイデア 5.1》



単位円上に正七角形 $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ をかくと，

$A_1A_6=2a$，$A_2A_5=2b$，$A_3A_4=2c$

である。

四角形 $A_2A_3A_4A_6$ において，円に内接しているからトレミーの定理が成り立ち，

$A_3A_4\times A_2A_6+A_4A_6\times A_2A_3=A_3A_6\times A_2A_4$

よって，

$$2c\times 2b+2a\times 2c=2b\times 2a$$

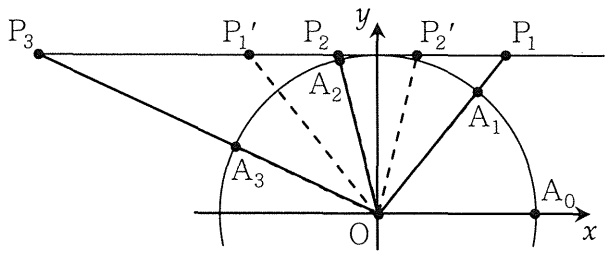
両辺 $4abc$ でわって，

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$$

を得る。 ■

1つの正七角形において，対角線の長さが2種類（上の証明での $2a$ と $2b$）しかないことから，トレミーの定理を用いて対角線と辺の長さ（上の証明での $2c$）についての関係式を導いたものである。

《アイデア 5.2》



単位円上で，

角 $\frac{2\pi}{7}$ の動径 OA_1 の延長と直線 $y=1$ の交点 P_1，

角 $\frac{4\pi}{7}$ の動径 OA_2 の延長と直線 $y=1$ の交点 P_2，

角 $\frac{6\pi}{7}$ の動径 OA_3 の延長と直線 $y=1$ の交点 P_3

をそれぞれとると，$OA_1=OA_2=OA_3=1$ だから，

$OP_1:OA_1=1:\sin\frac{2\pi}{7}$ より $OP_1=\frac{1}{a}$

$OP_2:OA_2=1:\sin\frac{4\pi}{7}$ より $OP_2=\frac{1}{b}$

$OP_1:OA_1=1:\sin\frac{6\pi}{7}$ より $OP_3=\frac{1}{c}$

ここで，y 軸に関して点 P_1，P_2 と対称な点をそれぞれ P_1'，P_2' とすると，

$\angle P_2'OP_1'=\angle OP_1'P_2'=\frac{2\pi}{7}$ より $OP_2'=P_1'P_2'$

$\angle P_1'OP_3=\angle P_1'P_3O=\frac{\pi}{7}$ より $OP_1'=P_1'P_3$

よって，

$$OP_1'+OP_2'=P_1'P_3+P_1'P_2'=P_3P_2'$$

また，

$\angle P_3P_2'O=\angle P_3OP_2'=\frac{3\pi}{7}$ より $P_3P_2'=OP_3$

したがって，

$$OP_1'+OP_2'=OP_3$$

すなわち，与式を得る。 ■

平行線の錯角を駆使して二等辺三角形を次々にみつけ，辺の長さをうつしていった証明である。最初に正弦の逆数，いわゆる余割（cosecant）を図中に長さとして表す場面では，正接についての相互関係である

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

の証明に用いるような，単位円に接線をひいて動径を延長する考えが応用されている。

6. まとめ

すでに述べたが，これまでの生徒のアイデアでたびたび共通しているのは，三角比の値を線分の長さとしてとらえ，その線分をいかに図中に見出すか，工夫している点である。このことは，特に高校1年の三角比の学習指導のなかでは，核になりうる考えのひとつなのではないか。今後，生徒がこういった見方を獲得する過程にも着目していきたい。 (2013 須藤)

g1-5. 三平方の定理

関連分野：平面図形，計量
高等数学：幾何学
対象学年：中学１，２年生
関連単元：平面図形
教 材 名：三平方の定理

≪三平方の定理を証明する≫

図形の単元は，空間的なイメージや論理的な思考を育てる題材としていろいろな方法で広く存在するが，その根底となる発想力や柔軟性を育てるのは難しい．しかし基本的な平面図形の知識があれば，自在に計量的な応用問題にも取り組むことができるため，大変重要である．中学１年で平面図形における考え方の引き出しを増やし，様々な発展的思考力へとつなげるため，三平方の定理の証明について考える．

具体的には，作図を通して平面図形の基本性質を確認した後，合同の証明，三角形について理解を深める．平面図形の基本性質（点や直線の位置関係，三角形の成立条件，及び四角形の性質）を確認し，それらの知識を用いて論理的に証明を行う．

三平方の定理は，通常の教科書では中学３年生の分野にて相似の後に位置づけられる．しかし，この教材では，未習の内容であってもその都度，生徒の理解を図りながら授業で扱う．既習であるか未習であるかに関わらず，広く自由な観点で教材を考えることで，生徒の発想力を豊かにし，様々な証明方法を検討する．またそこで扱った発展的な内容についても，今後の幾何における創造性・理解力につなげるために確認しながら指導する．

末尾に，三平方の定理とその逆についての証明以外にも，ピタゴラス数の見つけ方についての考察を紹介する．

g1-5. 1. 三平方の定理の証明

斜辺がaである直角三角形 ABC について，三平方の定理の証明方法についてどのように調べていくのかを確認する．なおここでは，三角形ができる条件として，

$a<b+c$ かつ $b<a+c$ かつ $c<a+b$

であること，直角三角形の斜辺は，他の２辺よりも長いことを既に取り扱っておくとより理解がしやすい．

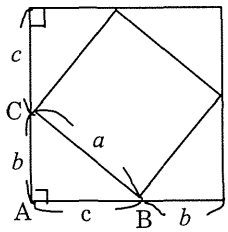
証明１

直角三角形を 4 つ組み合わせ，一辺が$b+c$の正方形をつくる．すると面積は$(b+c)^2=b^2+2bc+c^2$である．

一方，△ABC を４つ分と，中央の一辺がaの正方形との和でもあるので，$\frac{1}{2}bc\times4+a^2=2bc+a^2$となる．

これら２式より，$a^2=b^2+c^2$を得る．

ここでは，後半の中央の一辺がaの正方形であることも，角度を使って説明しておくことが必要である．



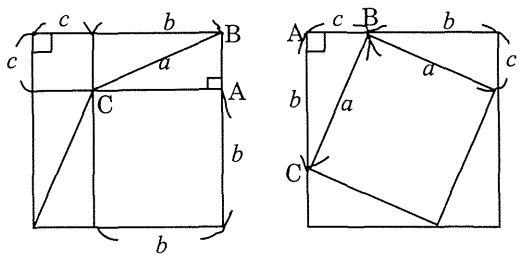
証明２

証明１の一辺が$b+c$の正方形の中に，一辺がbの正方形と一辺がcの正方形，直角三角形が４つ分を作り，

$(b+c)^2=b^2+c^2+\frac{1}{2}bc\times4$ と△ABC を４つ分と，

中央の一辺がaの正方形との和でもあるので，

$\frac{1}{2}bc\times4+a^2=2bc+a^2$を比較する方法もある．この位置関係や組み合わせ方法を変えても，面積自体は変わらない．

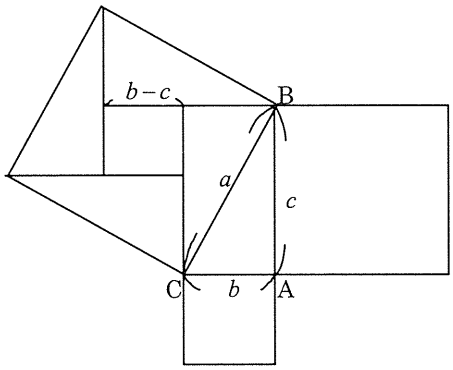


証明3

直角三角形ABCの斜辺aを一辺とする正方形は,

$$\frac{1}{2}bc\times 4+(b-c)^2=2bc+b^2-2bc+c^2=b^2+c^2$$

と分割できるので, $a^2=b^2+c^2$を得る.

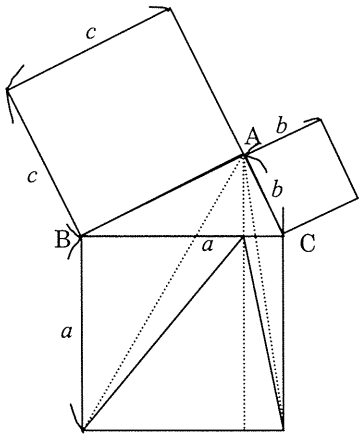


証明4

証明3と似た図形で, 直角三角形のそれぞれの辺を一辺とする正方形を比較する. 一辺がbの正方形と, 一辺がcの正方形を等積変形し, 一辺がaの正方形の内部に移すと,

$a^2=2\times\frac{1}{2}b^2+2\times\frac{1}{2}c^2$となり,

$a^2=b^2+c^2$を得る.

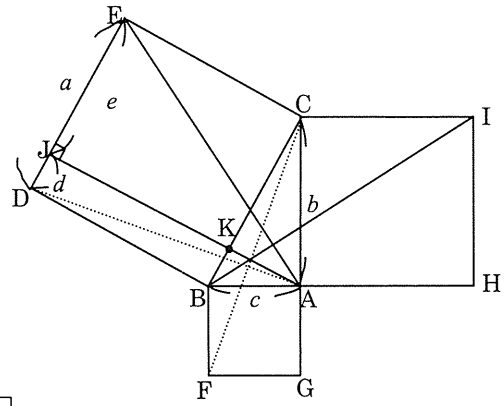


証明5

証明4と同様な図形であるが, 三角形の合同を用いて証明もできる. 直角三角形のそれぞれの辺について正方形を作り, AからDEに垂線をAJ下す. 斜辺を一辺とする正方形の面積は, DJ=d, JE=e とすると

$a^2=ad+ae$である. 一方, △EACと△BICは2辺夾角相当により合同である. また, △DBAと△CBFも合同である. △BCIは頂点をBからAに等積変形すると, 面積は$\frac{1}{2}b^2$である. △EACも頂点をAからKに等積変形すると, $\frac{1}{2}ae$となる. よって$b^2=ae$となる. 同様に△DBA≡△CBFであり, △DBAは面積$\frac{1}{2}ad$, △BFCは面積$\frac{1}{2}c^2$より$c^2=ad$を得る.

したがって, $a^2=ad+ae=b^2+c^2$

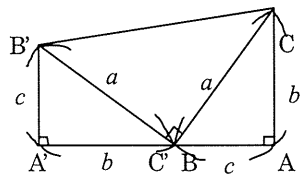


証明6

直角三角形ABCを2つ組み合わせ, 台形をつくる. 台形の面積は,

$$(b+c)\times(b+c)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(b^2+2bc+c^2)$$

となり, 一方, △ABC×2+△BCB'の面積でもあるため, $\frac{1}{2}bc\times 2+\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{2}(2bc+a^2)$となる. これらの面積は等しく, $a^2=b^2+c^2$を得る.



台形の面積の求め方は小学校の知識で学んでいるため理解が早そうではあるが, AA'が一直線であることを確認する必要がある.

証明７

接線の性質と内接円について理解をしている場合は，

面積について，△ABC は$\frac{1}{2}bc$であり，円の半径をrと

するとき，$\frac{1}{2}r(a+b+c)$である．ここで，接線の性

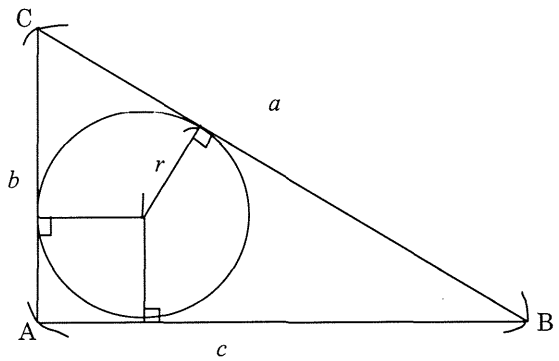
質より，$a=(c-r)+(b-r)$なので

$r=\frac{1}{2}(-a+b+c)$となり，これを代入し比較すると，

$$\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}(a+b+c)\times\frac{1}{2}(-a+b+c)$$
$$2bc=-a^2+b^2+c^2+2bc$$

したがって，$a^2=b^2+c^2$となる．

三平方の定理でこういう形の円との関係を理解している生徒は，中学３年のヘロンの公式や，高校１年生の三角比においても，応用することができるため有効である．

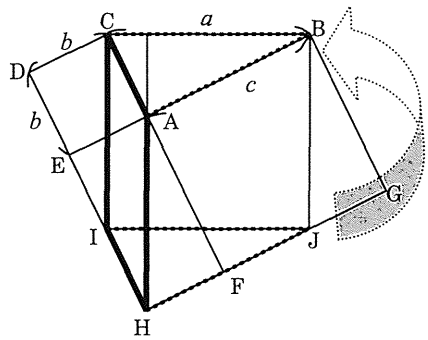


証明８

本校の校章を見ていて思いついた生徒がいた．基本は等積変形であるため，証明５に似ているが，手順が簡単で他の生徒の理解も得られやすかった証明を紹介する．

まず，面積b^2の正方形 CDEA を平行四辺形 CIHA に移動させる．次に同様に，面積c^2の正方形 BAFG を平行四辺形 BAHJ に移動させる．この移動したあとの六角形 ACIHJB のうち，△IHJ を△ABC に移すと，正方形 BCIJ の面積は$b^2+c^2=a^2$となり，三平方の定理の証明となる．

本校校章



証明９

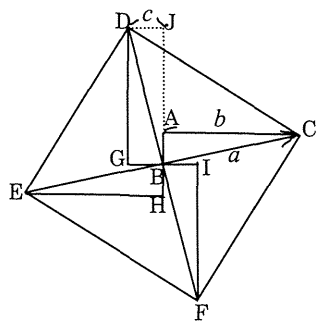
折り紙を折ることが好きな生徒からの証明は次の通りである．風車を折っていて気付いたようである．

対角線が$2a$の正方形 CDEF があり，面積は$\frac{1}{2}a^2\times4$

である．また，△ABC が４つと，△ABD が４つと，△ACD が４つの和でもあるので，それぞれの辺の長さから求める．ここで，△ACD の面積は，$DG // JA$をひき，$JA=DG-AB=b-c$となるので，△ACD を△JAC に等積変形して求める．

$$\frac{1}{2}a^2\times4=\frac{1}{2}bc\times4+\frac{1}{2}b\times(b-c)\times4+\frac{1}{2}c^2\times4$$

より$a^2=b^2+c^2$を得る．



g1-5. 2. 三平方の定理の逆

$\angle A = 90° \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$ の証明をする中で，「逆の証明があれば三平方の定理が証明できる」や「三平方の逆の証明は用いてもよいか？」という質問が生徒から出てくる．まだ証明していない内容なので，使えるとしたら…と証明してくる生徒もいた．同値の関係が成り立つ式であれば，仮定と結論が混同し，用いてしまう生徒も少なくない．そこで，三平方の定理を用いて証明する方法や，単独で三平方の定理の逆の証明をいくつか紹介する．

証明１

△ABC において，$a^2 = b^2 + c^2$ が成り立っているとき，直角三角形 A'B'C'について△ABC≡△A'B'C'がいえれば，∠A＝90° となるため，△ABC は直角三角形と証明できる．

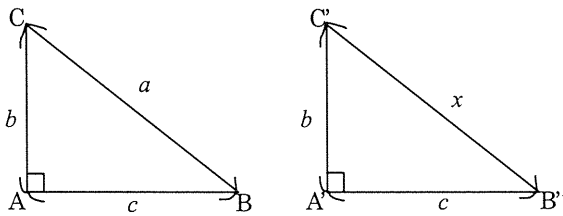
△A'B'C'は∠A'＝90° となるため，直角三角形である．

三平方の定理より，$x^2 = b^2 + c^2$ …①また，仮定より

$a^2 = b^2 + c^2$ …②なので，①＝②となる．

よって $a > 0, x > 0$ であるから $a = x$ となる．

△ABC と△A'B'C'は３辺相等より合同．
したがって，∠A＝∠A'＝90° より
△ABC は直角三角形である．



証明２

△ABC とその辺で作られる正方形 AEFB，ACGH，BIJC があり，BI // AK // CJ となる AK をひく．このとき，等積変形して四角形 AEFB は四角形 DBIK に移る，同様に四角形 ACGH は四角形 DKJC に移ることは確認済みである．

ここで，$BD = a \times \dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{c^2}{a}$，

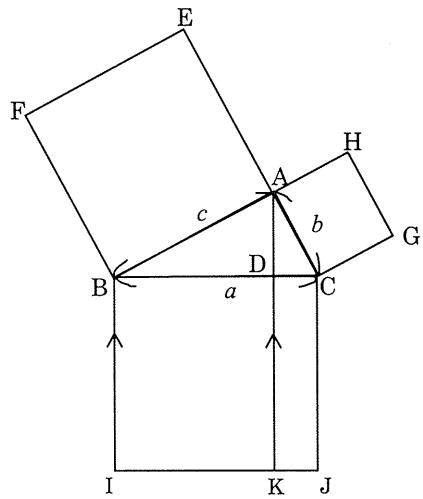
$DC = a \times \dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{b^2}{a}$ であるので，

△DAB において，$AB : DB = c : \dfrac{c^2}{a} = a : c$，

△DAC において，$AC : DC = b : \dfrac{b^2}{a} = a : b$

であることが分かる．

また，△ABD ∽△CBA，△CAD∽△CBA より
△ABD ∽△CAD となるので，∠ADB＝∠CDA，
∠ADB＋∠CDA＝180° なので，
∠ADB＝∠BAC＝90° となる．



g1-5.3. ピタゴラス数を考える

三平方の定理を理解したところで，生徒はよく知っている3：4：5の直角三角形以外にも，三平方の定理が成り立つ三角形を見つけ，一般化出来ないか作業の中で見つけようとする．まずは1つずつ成り立っているものを列挙し，並べてみて規則性や法則が無いか検討する．一般化することで，いろいろな自然数において，直角である良さを用いて，平面図形における円の性質や幾何的概念の更なる発展，放物線における図形や点の位置関係について考察出来るため，数列を学習する前に，触れておきたいと思う．

ピタゴラス数の見つけ方

$3^2+4^2=5^2$ より，$9+16=25$ であるが，これを図に表すと図1のようになる．さらに，25，16が平方数であるので，図2のように変形できる．このとき，

$9=3^2=4\times2+1$ となるので，$x^2=2a+1$ または

$x^2=(2a+1)+\{2(a+1)+1\}$ を見つければよい．

$(a+1)^2=x^2+a^2$ または $(a+2)^2=x^2+a^2$

に当てはめれば成り立つ．

・$3^2=9=4\times2+1$

・$4^2=16=(3\times2+1)+(4\times2+1)$ より

$3^2+4^2=5^2$

・$5^2=25=12\times2+1$ より $5^2+12^2=13^2$

・$6^2=36=(8\times2+1)+(9\times2+1)$ より

$6^2+8^2=10^2$

・$7^2=49=24\times2+1$ より $7^2+24^2=25^2$

・$8^2=64=(15\times2+1)+(16\times2+1)$ より

$8^2+15^2=17^2$

・$9^2=81=40\times2+1$ より $9^2+40^2=41^2$

以上のように，一般化してから確認することが出来る．

図1

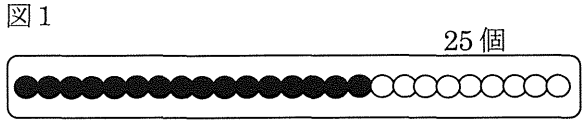
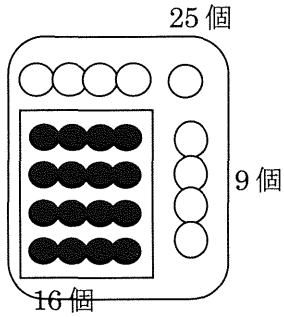


図2



g1-5.4. まとめ

三平方の定理を用いて幾何的に発想し，アイディアを出し合うことは生徒にとって有意義な時間であり関心が高い．またその中で，論理的な思考を育て，真偽を考えることも重要である．たくさんの証明方法の中で，数学が苦手な生徒も自分で好きな考えや納得のいく証明を選択し理解することが出来るため，大変親しみやすい分野でもある．ここでは，単なる公式や直角になることを前提として授業を進めるのではなく，今までの知識の中で何が使えて，用いる定理にはどんな証明をしなければならないのか考察することが更なる理解につながる．生徒の発想力を豊かにする環境を授業で創ることは難しいが，この教材を通して十人十色な生徒の考えを伸ばし，授業に参加することが出来る教材が生徒の興味・関心を引き出せると思う．

参考文献

霜越松太郎(1978)『ピタゴラスとその定理』
(遠山啓／銀林浩編) 国土社

(2013　田中)

g3-4. ヘロンの公式の幾何的証明と応用

関連分野：	幾何分野
高等数学：	幾何，解析幾何
対象学年：	中学3年生，高校1年生
関連単元：	三平方の定理
教 材 名：	ヘロンの公式の幾何的証明と応用

《ヘロンの公式を幾何的に証明し，その応用を考える》

ヘロンの公式を扱うのは，高等学校の数学Iにおいて余弦定理を学習した後であることが多い．余弦定理を利用した証明の流れは，三角比の応用として手頃な題材と言えるが，a, b, c を3辺の長さとする三角形の面積 S を，

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \cdots (*)$$

の形まで因数分解する計算は，$s = (a+b+c)/2$ とおくことも含めて，結果ありきである印象がぬぐえない．また，複雑な代数的な計算が入るため，s, $s-a$, $s-b$, $s-c$ の幾何的な意味が全く分からなくなってしまう．これは，三角形の1つの頂点から対辺 (またはその延長線) に垂線を下ろして，三平方の定理を利用する別の証明では，さらに顕著である．生徒には，考え方が容易で計算が困難な証明だけでなく，幾何的な意味も含めてヘロンの公式を理解し，(*) のように綺麗な形になる理由を知ることによって，その必然性を味わって欲しいものである．

g3-4.1 ヘロンの「測量術」

T. L. ヒース [2] によると，歴史的には，紀元前後頃 (諸説ある) に活躍したヘロンが「測量術」で初めて記述したヘロンの公式の証明は，幾何的なものであった．その証明で必要な知識は,「平行線と比」,「三角形の相似」,「円」であり，現行の課程の中学3年生でも十分に理解できる．ただし，巧妙な補助線が必要であり，その難しさから，中等教育で直接扱うことが避けられているのも納得できる．本稿で扱う証明では，生徒が取り組みやすいように，三角形の内接円と傍接円を利用し，巧妙な補助線が不要になるよう工夫している．この証明の着想は，安藤・佐藤 [1] の問 2.5「三角形の内接円と傍接円の位置関係」より得たが，同様な証明は君島 [4]，細矢 [3] にも記述がある．

ヘロンの「測量術」では，根号を含む数を有理数に近似する方法の記述もあり，ヘロンの公式は実用的測量法として位置付けられている．コンピュータの発達した現代では，近似計算が容易にできるので，ヘロンの公式はより実用的になったと言える．一方で，コンピュータを利用しない場面では，特に a, b, c が根号を含む数であるとき，有理数への近似を行わないと (*) における S の計算は困難になるため，実用的でないと捉えられることもある．そのため，本稿では，立体図形や座標平面への応用を通して，(*) の右辺をより扱いやすい形に式変形し，手計算でもヘロンの公式の有用性を見出すことを目的とした．

g3-4.2 前提となる知識と授業の流れ

中学校の3学級 (各男子41名) を対象として，中学2年 (2012年度) から中学3年 (2013年度) にかけて同一生徒123名に次の授業を実践した．

- 2012年度 中学2年 数学（幾何） 1，2，3学期
  - 平行線と比（三角形の相似を含む）
  - メネラウス，チェバの定理とその逆
  - 三角形の五心（円の基本的性質を含む）
  - ヘロンの公式の証明（内接円と傍接円を利用）
- 2013年度 中学3年 数学（代数） 1学期

  「ヘロンの公式の応用」
  - ヘロンの公式の式変形（展開・因数分解）
  - 座標を利用した三角形の面積の公式
  - 点と直線の距離
  - 放物線の回転移動（放物線の定義を含む）

  「関数のグラフ」
  - 関数のグラフの平行移動，拡大・縮小
  - 関数のグラフの和集合，共通集合

  「2次関数の演習問題」
  - 高校入試の過去問題

本稿では，上記のうち，ヘロンの公式に関する授業とその分析について，次の流れで紹介する．

(1) 幾何的な意味が分かるように，内接円と傍接円を利用してヘロンの公式を証明する．
(2) ヘロンの公式を利用することで，実際の計算での煩雑さを体験する．
(3) ヘロンの公式の根号内の式変形（展開，因数分解）を考える．
(4) 立体図形・座標平面への応用で，(3) の結果の有用性を見出す．
(5) (2)–(4) の内容を含む期末試験を2013年度1学期に実施し，試験後の生徒アンケートにより，試験問題の「理解度」,「興味・関心」を各小問で調べ，

比較する．また，同時に，実施した授業の各内容も同様に調査する．

(6) (5) の調査結果を分析する．

g3-4.3 ヘロンの公式に関する授業実践

ヘロンの公式に関する授業実践の内容とその様子について，主なものを挙げていく．

(1) ヘロンの公式の証明（内接円と傍接円を利用）

安藤・佐藤 [1] にある「三角形の内接円と傍接円の位置関係」を利用し，幾何的にヘロンの公式を導く．君嶋 [4]，細矢 [3] にも同様な証明の記述がある．

問1 (ヘロンの公式) △ABC の内心を I，∠A に対する傍心を $\mathrm{I_A}$ とおく．また，点 I から直線 BC，CA，AB に下ろした垂線の足を H_a, H_b, H_c，点 $\mathrm{I_A}$ から直線 BC，CA，AB に下ろした垂線の足を K_a, K_b, K_c とおく．このとき，

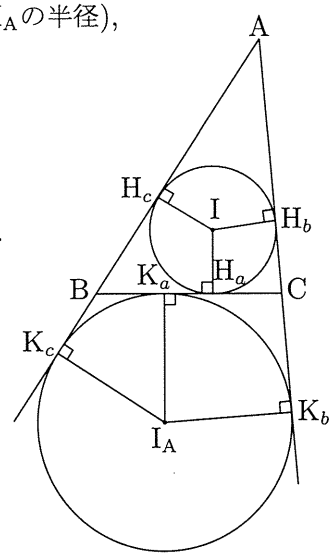
$a = \mathrm{BC}$，$b = \mathrm{CA}$，$c = \mathrm{AB}$，$s = \dfrac{a+b+c}{2}$，

$r = (\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円 I の半径)，

$r_{\mathrm{A}} = (\triangle\mathrm{ABC}$ の傍接円 $\mathrm{I_A}$ の半径)，

$S = (\triangle\mathrm{ABC}$ の面積)

とおいて，次に答えよ．



(1) $2s$, s はそれぞれ △ABC の何を表すか．

(2) 3 点 A，I，$\mathrm{I_A}$ はどのような位置関係にあるか．理由も答えよ．

(3) 次の長さを a, b, c, s の式で表せ．

(a) $\mathrm{AH}_b = \mathrm{AH}_c$，$\mathrm{BH}_a = \mathrm{BH}_c$，$\mathrm{CH}_a = \mathrm{CH}_b$

(b) $\mathrm{AK}_b = \mathrm{AK}_c$

(c) $\mathrm{BK}_c = \mathrm{BK}_a$，$\mathrm{CK}_b = \mathrm{CK}_a$

(d) $\mathrm{H}_b\mathrm{K}_b = \mathrm{H}_c\mathrm{K}_c$，$\mathrm{H}_a\mathrm{K}_a$

(4) S を s, r の式で表せ．

(5) S を a, s, r_{A} の式で表せ．

(6) r と r_{A} の積 rr_{A} を b, c, s の式で表せ．

(7) $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ を示せ．

略解

(1) $2s = (\triangle\mathrm{ABC}$ の周の長さ)，$s = (\triangle\mathrm{ABC}$ の周の長さの半分)．

(2) 一直線上にある．2 点 I，$\mathrm{I_A}$ は共に ∠A の二等分線上にあるから．

(3) (a) $\mathrm{AH}_b = \mathrm{AH}_c$，$\mathrm{BH}_c = \mathrm{BH}_a$，$\mathrm{CH}_a = \mathrm{CH}_b$，$s = \mathrm{AH}_c + \mathrm{BH}_a + \mathrm{CH}_b$ より，順に $s-a$, $s-b$, $s-c$.

(b) $2\mathrm{AK}_b = \mathrm{AK}_b + \mathrm{AK}_c = \mathrm{AC} + \mathrm{CK}_a + \mathrm{K}_a\mathrm{B} + \mathrm{BA} = 2s$ より，$\mathrm{AK}_b = s$.

(c) $\mathrm{BK}_c = \mathrm{AK}_c - \mathrm{AB} = s - c$. 同様に，$\mathrm{CK}_b = s - b$.

(d) $\mathrm{H}_b\mathrm{K}_b = \mathrm{AK}_b - \mathrm{AH}_b = s - (s-a) = a$.
また，$\mathrm{H}_a\mathrm{K}_a = |\mathrm{BK}_a - \mathrm{BH}_a|$
$= |(s-c)-(s-b)| = |b-c|$.

(4) $S = \triangle\mathrm{BCI} + \triangle\mathrm{CAI} + \triangle\mathrm{ABI} = \dfrac{2s\cdot r}{2} = rs$.

(5) $S = \triangle\mathrm{ABI_A} + \triangle\mathrm{ACI_A} - \triangle\mathrm{BCI_A} = r_{\mathrm{A}}(s-a)$.

(6) $\angle\mathrm{IBI_A} = 90^\circ$ より，$\triangle\mathrm{IBH}_a \backsim \triangle\mathrm{BI_AK}_a$ なので，$r : \mathrm{BH}_a = \mathrm{BK}_a : r_{\mathrm{A}}$ より，$rr_{\mathrm{A}} = \mathrm{BH}_a \cdot \mathrm{BK}_a = (s-b)(s-c)$.

(7) $S^2 = S \cdot S$ なので，(4)–(6) より，$S^2 = s(s-a)rr_{\mathrm{A}} = s(s-a)(s-b)(s-c)$. よって，$S > 0$ より，$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. □

略解を見ると，使っている知識は，「平行線と比」，「三角形の相似」，「円」であることが分かる．この意味では，この証明はヘロンが「測量術」で与えた証明 (cf. T. L. ヒース [2]) とほぼ同義である．しかし，補助線は，三角形の辺の延長線と，内心と傍心からの垂線のみであるから，それほど技巧的でなく，比較的扱いやすい内容である．

授業中の生徒の様子をいくつか紹介しておく．(3)(a) について，多くの生徒は，$\mathrm{AH}_c = x$, $\mathrm{BH}_a = y$, $\mathrm{CH}_b = z$ とおいて，$2(x+y+z) = 2s$, $x+y = c$, $y+z = a$, $z+x = b$ を利用して，代数的に解いていた．略解のように，s を幾何的に $s = \mathrm{AH}_c + \mathrm{BH}_a + \mathrm{CH}_b$ と捉え，$\mathrm{AH}_b = \mathrm{AH}_c$, $\mathrm{BH}_c = \mathrm{BH}_a$, $\mathrm{CH}_a = \mathrm{CH}_b$ を利用する方法は，分かり易いと評判であった．(3)(b) について，AK_b を求めるのは，なかなか難しいようであった．図形的に $\mathrm{AK}_b = \mathrm{AC} + \mathrm{CK}_a$ に気付いても，この式だけでは何も求まらないからである．さらに，対称性により $\mathrm{AK}_c = \mathrm{AB} + \mathrm{BK}_a$ と $\mathrm{AK}_b = \mathrm{AK}_c$ に気付くと，略解のように $2\mathrm{AK}_b = 2s$ が得られる．実際の授業では，「AK_b だけで考えても難しい」というヒントに対し，「$2\mathrm{AK}_b$」の答えが返って来た．(4)，(5) の結果

によれば，r, r_A のどちらか一方が a, b, c, s の式で表せれば，S を決定できる．しかし，これが難しいので，(6) では，$S^2 = s(s-a)rr_A$ における rr_A を a, b, c, s の式で表すことを目標にしている．(2) を証明したこともあってか，生徒はとりあえず，$\triangle AH_cI \backsim \triangle AK_cI_A$ で考え，$AH_c : r = AK_c : r_A$ より，$\dfrac{r}{r_A} = \dfrac{s-a}{s}$ となり，rr_A が得られないことに気付く．つまり，r と r_A が対応するような三角形の相似では，rr_A が得られず，対応しないようなものが必要となる．そのために重要なのは $\angle IBI_A = 90^\circ$ であり，自分で探せない生徒には，ヒントとして与えた．ここから，(7) のようにヘロンの公式を得ることは容易である．

ちなみに，結果論ではあるが，ヘロンの公式は

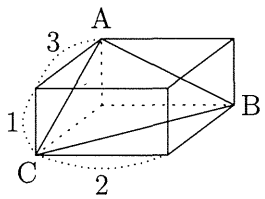
$$S = \sqrt{AK_c \cdot AH_c \cdot H_cB \cdot BK_c}$$

とも書き換えられ，直線 AB 上の線分のみで S が表現されることになる．ヘロンの公式は形が綺麗であるだけでなく，幾何的にも意味があることが実感できるだろう．

(2) ヘロンの公式の式変形の利用

3 辺の長さがすべて有理数である三角形であれば，ヘロンの公式の計算は容易である．しかし，例えば，3 辺の長さがすべて根号を含む数の場合は，特に計算が煩雑になる．その例として，まず，次の直方体の切断面を考える．

問 2　右の直方体において，△ABC の面積を求めよ．



直接，ヘロンの公式を用いると，$BC = \sqrt{13}$, $CA = \sqrt{10}$, $AB = \sqrt{5}$ より，$s = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{13}}{2}$ なので，$\triangle ABC =$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{-\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{10}+\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{13}}{2}}$$

となり，面積が定まることは分かるが，計算は大変そうである．この計算で，ヘロンの公式は，

$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}$$

と書き換えられることに気付くので，具体的な値ではなく，a, b, c での式変形を考察する．

課題　3 辺の長さが a, b, c である三角形の面積 S を，ヘロンの公式を利用して，a, b, c の式で表せ．また，その式を変形し，できるだけ多くの (ある程度綺麗で意味のありそうな) 形で表せ．作った式に，順に⓪，①，… と名前を付けよ．

解答例

$$\begin{aligned}
S &= \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}} \quad \cdots ⓪ \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \quad \cdots ① \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)} \quad \cdots ② \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)} \quad \cdots ③ \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2} \quad \cdots ④ \qquad \square
\end{aligned}$$

⓪–③までは多くの生徒が気付くが，④はなかなか出て来ない．授業では，④の式を書き，①からの式変形を考えさせた．余弦定理を知っている生徒からは，「余弦定理」という声が出て来る．

発問 1　問 2 を解くには，どの式を使えば楽に計算できるか．

- ⓪，①は大変そう．
- 他の式は覚えられないから，とりあえず⓪．
- ルートがなくなるから，②，③，④のうちのどれか．
- 先生がわざわざ計算させたから，きっと④が楽なはずだ．
- ④が多少楽だが，本質的には②–④はそれほど変わらない．

根号内の式が 2 乗と 4 乗のみで表されていれば，根号内は自然数である 5, 10, 15 の計算で済むので，②–④が楽である．ただし，②，③では，$a^2b^2, b^2c^2, c^2a^2, a^4, b^4, c^4$ の計算が多少面倒ではある．一方，④では，$4a^2b^2$ と，まとめて計算できる $(a^2+b^2-c^2)^2$ だけ求めればよい．実際，④を利用すると，

$$\begin{aligned}
\triangle ABC &= \frac{1}{4}\sqrt{(2\sqrt{5}\sqrt{10})^2-(5+10-13)^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4(50-1)} = \frac{7}{2} \quad (\text{問 2 の解})
\end{aligned}$$

のように，最も楽な計算になる．ヘロンの公式を単純に適用し，⓪を用いると，一見すると複雑な 2 重根号の式に見えるが，その計算結果が有理数になるのは驚きである．

以下，⓪–④をそれぞれヘロンの公式⓪–④と呼ぶことにする．

問3　問2の結論は，$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{7}{2}$ であった．面積はたまたま有理数になったのだろうか．それとも何か理由があるのだろうか．このことを考察せよ．

理由を考えるが，明確な答えが得られない生徒が多い．一方で，すぐに「開くと正方形」の声が出たクラスもあった．説明してもらうと，まず，次の図を描いてくれた．

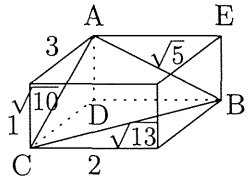


図1．直方体

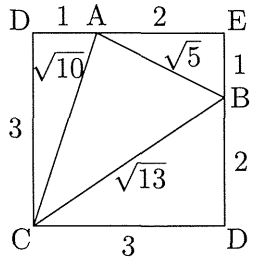


図2．正方形

図1において，△ABC と1辺を共有する3つの△ABE，△BCD，△CAD を△ABC と共に取り出して広げると，図2のように正方形になる．ここで，2つの線分 DA，AE が直線上にあること，2つの線分 EB，BD が直線上にあることが気になるかもしれないが，次のどちらかの方法で確認することができる．

- 1辺の長さが3の正方形の辺上に図のように点 A，B をとり，4つの三角形を作る．
- 2つの線分 DA，AE について，余弦定理を利用して，$\cos\angle\mathrm{DAC}$, $\cos\angle\mathrm{CAB}$, $\cos\angle\mathrm{BAE}$ を求め，加法定理で $\cos(\angle\mathrm{DAC}+\angle\mathrm{CAB}+\angle\mathrm{BAE})=-1$ を示す．2つの線分 EB，BD についても同様．

図2を利用して△ABC の面積を計算すると，1, 2, 3 は自然数 (有理数) なので，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=(\text{正方形})-(\triangle\mathrm{ABE}+\triangle\mathrm{BCD}+\triangle\mathrm{CAD})\\&=3^2-\left(\frac{1}{2}\cdot2\cdot1+\frac{1}{2}\cdot2\cdot3+\frac{1}{2}\cdot3\cdot1\right)=\frac{7}{2}\end{aligned}$$

のように有理数と有理数の差になり，求める面積は有理数である (問3の解)．

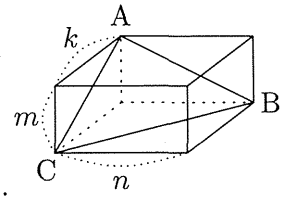
折り紙を利用すると，より理解が深まる．また，図を眺めていると，簡単に一般化できることに気付く．

発問2　このような関係があるのは，どのようなときか．一般化せよ．

- どのクラスでも，すぐに「$1+2=3$」の声．
- 幅と高さの和が奥行きになればいいはず．

理由が予想できれば，後は，次の問のように単純に計算して確認するのみでよい．

問4　右の直方体において，△ABC の面積を S とおく．このとき，次に答えよ．



(1) S を m, n, k の式で表せ．

(2) 特に $m+n=k$ をみたすとき，S を m, n の式で表せ．

略解　(1) ヘロンの公式④を用いると，$S=$
$\dfrac{1}{4}\sqrt{4(m^2+n^2)(n^2+k^2)-(m^2+n^2+n^2+k^2-(k^2+n^2))^2}$
$=\dfrac{1}{2}\sqrt{m^2n^2+m^2k^2+k^2n^2}$.

(2) 図2と同様に，

$$S=k^2-\left(\frac{1}{2}mn+\frac{1}{2}nk+\frac{1}{2}km\right)$$

が成立するので，$k=m+n$ を代入して，$S=\dfrac{m^2+mn+n^2}{2}$. □

授業では，(2) の結果の確認として，(1) の結果に $k=m+n$ を代入して，代数的にも必ず根号が外れることを確かめた．これは，因数分解のよい練習になると共に，図2の一般化を思い付かなくても，単純に (2) の結果が得られるという安心感に繋がるからである．

発問2の解答例　問4の記号の下で，(2) の結果より，$m+n=k$ のとき，$S=\dfrac{m^2+mn+n^2}{2}$ なので，m, n が有理数ならば，S も有理数になる．□

次の結果は授業では扱わなかったが，記述だけしておく．問4(2) で，さらに S をヘロンの公式⓪で表すと，次の代数的な一般化が得られる：

> $m>0,\ n>0,\ k=m+n,\ a=\sqrt{m^2+n^2},$
> $b=\sqrt{n^2+k^2},\ c=\sqrt{k^2+m^2}$ のとき，
> $\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$
> $=2(m^2+mn+n^2)$.

これは，a, b, c を代入したとき，一見すると複雑な2重根号の式である左辺が，右辺のように根号のない式で表せることを示している．

(3) ヘロンの公式の座標平面への応用

ヘロンの公式を座標平面に応用していく．ここでの最終的な目標は，回転移動した放物線の方程式を求めることである．

まず，座標平面における三角形の面積をその頂点の座標で表す．

問5　座標平面において，3 点 O(0, 0)，A(a, b)，B(c, d) を頂点とする △OAB の面積を a, b, c, d の式で表せ．

略解　$\mathrm{OA} = \sqrt{a^2+b^2}$, $\mathrm{OB} = \sqrt{c^2+d^2}$, $\mathrm{AB} = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$ なので，ヘロンの公式④より，$\triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{1}{4}\sqrt{4\mathrm{OA}^2\mathrm{OB}^2-(\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2)^2}$ $= \dfrac{1}{4}\sqrt{4(ad-bc)^2} = \dfrac{|ad-bc|}{2}$ である．　□

次に，この結果を利用して，座標平面における直線と点との距離を求める．

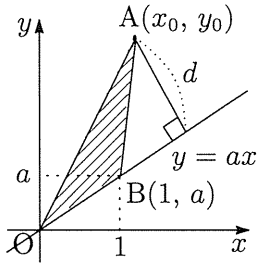
問6　座標平面において，次の距離を求めよ．

(1) 直線 $y = ax$ とその直線上にない点 A(x_0, y_0) との距離

(2) 直線 $y = ax + b$ とその直線上にない点 A(x_0, y_0) との距離

(3) 直線 $ax + by + c = 0$ と点 A(x_0, y_0) との距離

略解　求める距離を d とおく．



(1) 直線上の点 B$(1, a)$ をとり，△OAB の面積を問5の結果と定義の2種類で表すと，

$$\frac{|x_0\cdot a - y_0\cdot 1|}{2} = \triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+a^2}\cdot d$$

より，$d = \dfrac{|ax_0 - y_0|}{\sqrt{a^2+1}}$ である．

(2) 平行移動で (1) に帰着させ，$d = \dfrac{|ax_0 - y_0 + b|}{\sqrt{a^2+1}}$.

(3) (i) 点 A が直線上にあるとき：$d = 0$.

(ii) 点 A が直線上にないとき：

$b \neq 0$ のとき，(2) の結果を利用して，

$d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$b = 0$ のとき，直線は $x = -\dfrac{c}{a}$ $(a \neq 0)$ なので，

$d = \left|x_0 - \left(-\dfrac{c}{a}\right)\right| = \dfrac{|ax_0 + 0\cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2+0^2}}$.

(i)，(ii) より，$d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である．　□

放物線の回転を扱うため，放物線の幾何的な定義から2次関数のグラフが得られることを確認する．

問7　$a \neq 0$ に対して，点 F$(0, a)$，直線 $\ell : y = -a$ とおく．次の条件

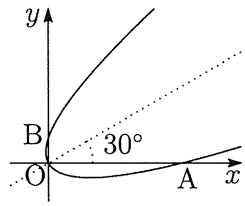
$$\mathrm{PF} = (\text{点 P と直線 } \ell \text{ との距離}) \quad \cdots (*)$$

をみたすような点 P(x, y) の集まりのなす図形の方程式を求めよ．

略解　$\sqrt{(x-0)^2+(y-a)^2} = |y-(-a)|$ より，両辺を2乗して，$y = \dfrac{1}{4a}x^2$ である．　□

放物線の幾何的な定義を次のようにまとめる．直線 ℓ とその直線上にない点 F に対して，条件 $(*)$ をみたす点 P の集まりとして**放物線**は定義される．このとき，直線 ℓ を**準線**，点 F を**焦点**という．

問8　$y = x^2$ のグラフを原点 O を中心として 60° だけ回転させた右図の放物線について，次の問いに答えよ．



(1) 焦点 F の座標と準線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 放物線上の点 P(x, y) について，x と y のみたす方程式を求めよ．

略解　(1) 問7の結果より，放物線 $y = x^2$ の焦点は $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$，準線は $y = -\dfrac{1}{4}$ である．$\mathrm{OF} = \dfrac{1}{4}$ より，F$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{8}, \dfrac{1}{8}\right)$，$\ell$：$\sqrt{3}x + y + \dfrac{1}{2} = 0$ である．

(2) 問6 (3) の結果より，放物線上の点 P(x, y) は

$$\sqrt{\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\left(y-\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{\left|\sqrt{3}x+y+\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}$$

をみたすので，両辺を 2 乗して整理すると，$x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 2\sqrt{3}x - 2y = 0$ を得る．　□

g3-4.4　アンケート調査

中学3年の1学期の期末考査後にアンケート調査 (記名式) を行った．123 名のうち 118 名の回答が得られ，ほぼ全数調査と考えられる．調査内容は

- 1学期の授業内容について (表1)
- 1学期の期末考査について (表2)
- 各項目での自由記述

である．内容と結果の詳細は以下に記述する．

(1) 1学期の授業内容について

表 1. 授業内容についてのアンケート

授業で扱った内容	理解	興味・関心
A. ヘロンの公式の証明 (傍接円)	2.70 (0.981)	2.69 (0.863)
B. ヘロンの公式の式変形	2.92 (0.921)	2.32 (0.894)
C. 三角形の面積の公式 (座標)	3.12 (0.944)	2.60 (0.929)
D. 点と直線との距離	2.79 (0.996)	2.59 (0.941)
E. グラフの平行移動	3.15 (0.887)	2.60 (0.843)
F. グラフの拡大・縮小	2.93 (0.888)	2.50 (0.827)
G. 複数のグラフの和集合	2.48 (1.063)	2.66 (0.945)
H. 複数のグラフの共通集合	2.48 (1.063)	2.60 (0.930)
I. 放物線の定義（焦点等）	2.68 (0.906)	2.72 (0.876)
J. 放物線の回転	2.31 (0.889)	2.70 (0.898)
K. 放物線の相似（平行等）	2.77 (0.883)	2.56 (0.844)
L. 2次関数の演習問題	2.99 (0.870)	2.98 (0.928)
上記全項目	2.78 (0.972)	2.63 (0.902)

理解は,「理解できている…4点」,「やや理解できている…3点」,「やや理解できていない…2点」,「理解できていない…1点」，興味・関心は,「面白い問題である…4点」,「やや面白い問題である…3点」,「ややつまらない問題である…2点」,「つまらない問題である…1点」として調査した．表の数値はその点の平均，括弧内の数値は標準偏差を表す．

3章で説明しなかった内容について，簡単に補足しておく．グラフの平行移動，拡大・縮小は，関数のグラフ $y = f(x)$ に対して，$y - q = f(x - p)$, $\dfrac{y}{q} = f\left(\dfrac{x}{p}\right)$ のことであり，方程式のグラフ $f(x, y) = 0$ についても同様に扱った．複数のグラフの和集合，共通集合については，次の同値変形

$$f(x, y)g(x, y) = 0$$
$$\Leftrightarrow\ f(x, y) = 0 \text{ または } g(x, y) = 0,$$
$$|f(x, y)| + |g(x, y)| = 0 \ \Leftrightarrow\ f(x, y) = 0 = g(x, y)$$
$$(\ \Leftrightarrow\ f(x, y)^2 + g(x, y)^2 = 0\ )$$

によるグラフの表現の拡張である．放物線の相似は，2つの放物線 $y = ax^2$, $y = bx^2$ は相似であり，また，直線 $y = mx\,(m \neq 0)$ との原点以外の交点をA，B，もう1つの直線 $y = nx\,(n \neq 0)$ との原点以外の交点をC，Dとしたとき，$\triangle$OAC $\backsim$ $\triangle$OBD，AC $/\!/$ BDなどの性質があることである．2次関数の演習問題は，国立大学附属高校を中心とした高校入試の過去問題である．

(2) 1学期の期末考査について

表 2. 期末考査についてのアンケート

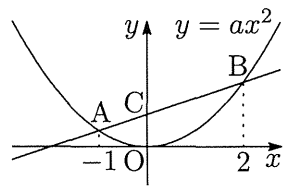
1学期期末考査の内容	理解	興味・関心
1 (1) 放物線と直線の決定	3.77 (0.674)	2.81 (0.967)
(2) 三角形の面積の2等分	3.63 (0.725)	2.83 (0.951)
(3) 放物線と直線の交点	3.14 (0.796)	2.88 (0.910)
2 (1) グラフの拡大，和集合	2.61 (0.870)	2.68 (0.967)
(2) 放物線の回転	2.26 (0.780)	2.64 (1.020)
3 (1) 放物線と正八角形の関係	3.21 (0.940)	2.92 (0.924)
(2) 正八角形と直線の方程式	2.91 (0.931)	3.00 (0.903)
(3) 等積変形	2.43 (0.744)	2.94 (0.916)
4 放物線と定点を通る直線	2.47 (0.955)	2.60 (0.880)
5 (1) ヘロンの公式の式変形	3.29 (0.893)	2.47 (0.971)
(2) ヘロンの公式の応用	3.09 (0.892)	2.54 (0.932)
(3) 有理数の性質	3.04 (0.948)	2.48 (0.990)
上記全項目	2.99 (0.952)	2.73 (0.957)

理解は,「試験中に解けた…4点」,「時間があれば自力で解ける…3点」,「解答を見れば理解できる…2点」,「解答を見ても理解できない…1点」，興味・関心は表1と同様，として調査した．表の数値は，表1と同様のものを表す．

参考までに，1学期期末考査の成績の結果は，100点満点で平均53.8点，標準偏差18.65，最高点96点，最低点13点であった．また，問題の内容，配点，解は次の通りである．

1学期期末考査 中学3年 数学（代数）

1 a が正の定数のとき，関数 $y = ax^2$ のグラフ上に2点A，Bがあり，A，Bの x 座標はそれぞれ -1，2で，直線ABの傾きは $\dfrac{1}{3}$ である．また，直線ABと y 軸との交点をCとする．原点をOとして，次の問いに答えよ．



(1) a の値，直線ABの方程式をそれぞれ求めよ．

(2) 直線OB上に点Dがあり，直線CDが $\triangle$OABの面積を2等分するとき，Dの座標を求めよ．

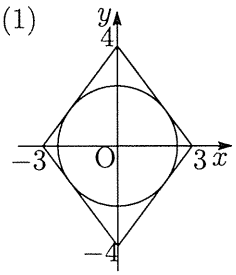
(3) $y = ax^2$ のグラフ上に点Pをとる．(2) で求めたDについて，△PBCと△DBCの面積が等しくなるようなPの x 座標をすべて求めよ．

2 次の図形を表す方程式を求めよ．結果のみでも構わない．また，式を整理しなくもよい．

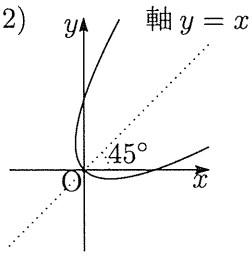
(1) ひし形とそれに内接する円

(2) 放物線 $y = 2\sqrt{2}x^2$ を原点Oを中心として回転させた放物線

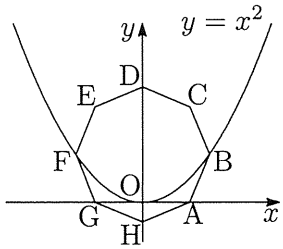
(1)



(2)



3 $y = x^2$ のグラフがあり，図のように，正八角形ABCDEFGHの2つの頂点B，Fがこのグラフ上に，2つの頂点A，Gが x 軸上にある．次の問いに答えよ．



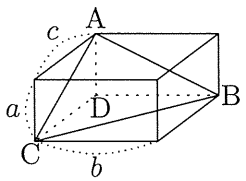
(1) 点Aの座標，点Bの座標を求めよ．

(2) 直線EFの方程式を求めよ．

(3) 直線EFが y 軸と交わる点をP，x 軸と交わる点をQとする．△OPQの面積は△EFHの面積の何倍かを求めよ．

4 $x \neq 1$ のとき，$t = -\dfrac{x^2+2}{x-1}$ とおく．x が1を除くすべての実数の値をとるとき，t のとり得る値の範囲を求めよ．

5 図の直方体において，△ABCの面積を S とおく．ただし，DA $= a$，DB $= b$，DC $= c$ である．このとき，次の問いに答えよ．



ただし，必要であれば，次の結果を用いてもよい．

> 3辺の長さが α, β, γ である三角形の面積は
>
> $\dfrac{1}{4}\sqrt{(2\alpha\beta)^2 - (\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}$ である．

(1) S を a, b, c の式で表せ．

(2) 特に $a + b = c$ をみたすとき，S を a, b の式で表せ．ただし，できるだけ簡単な形まで整理して答えること．

(3) (2) において，a, b が有理数ならば，S も有理数となる．この理由を答えよ．

配点 **1** (1) は12点，その他は各8点で100点満点．

解 **1** (1) $a = \dfrac{1}{3}$，$y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$　(2) D$\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$

(3) $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{1 \pm \sqrt{15}}{2}$

2 (1) $\left(\left|\dfrac{x}{3}\right| + \left|\dfrac{y}{4}\right| - 1\right)\left(x^2 + y^2 - \dfrac{144}{25}\right) = 0$

(2) $\sqrt{\left(x - \dfrac{1}{16}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{16}\right)^2} = \dfrac{\left|x + y + \dfrac{1}{8}\right|}{\sqrt{2}}$

$\left(\Leftrightarrow\ x^2 - 2xy + y^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}y = 0\right)$

3 (1) A$\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$，B$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

(2) $y = (\sqrt{2}+1)x + \dfrac{\sqrt{2}+3}{2}$　(3) $\dfrac{5\sqrt{2}+1}{2}$

4 $t \leqq -2 - 2\sqrt{3}$，$-2 + 2\sqrt{3} \leqq t$

5 (1) $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$

(2) $S = \dfrac{a^2 + ab + b^2}{2}$　(3) 2つの有理数の和・差・積・商 (分母0は除く) はまた有理数となる．ゆえに，$a, b, 2$ は有理数なので，$S = \dfrac{a^2 + ab + b^2}{2}$ もまた有理数となる．

(3) 各項目での自由記述

一部の項目の自由記述の内容を紹介する．

- A. ヘロンの公式の証明 (傍接円)

○ 肯定的：発想が面白かった．思いついた時の証明はとても綺麗．傍接円を使って楽に証明できた．ちょっと面倒臭いけど面白い．よくできててすごい．幾何的考え方好き．JMOなどで使える．図形はおもしろい．逆から考えないと証明できないから面白い．傍心の使い方がおもしろい．○ 中間的：面白いが需

要ない．証明はできたら嬉しいけどできないとイライラする．知ってた．○否定的：他の証明だけでいい．面倒臭かった．使えなそう．需要ない．難しい．テストで全然できなかった．計算キツイ．分かりにくい．簡単．

- B. ヘロンの公式の式変形

形によって使いやすさが変わって面白い．単なる計算問題だが頭は使う．式変形だけで面白くない．

- C. 三角形の面積の公式，D. 点と直線との距離

ヘロンの公式が関数にも使えるのが面白いと思った．式の変形がピタッとはまって面白い．関数を図形で解くのが面白かった．便利で楽しい．今後使えそう．公式を覚えるだけでいい．ヘロンの公式の変形を使用するため，元がなければとけない．

- $\boxed{5}$ (1)–(3) ヘロンの公式の式変形・応用，有理数

頑張って計算する他に図形から簡単に正解を出せるという方法に良さを感じた．図で表して面積を求めるのは面白い．幾何的な要素も使うから面白い．有理数の問題は興味深い．単なる計算問題．

- L. 2次関数の演習問題

難しいが面白いし考えがいがある．パズルのようで面白い．関数を図形で解くのが面白い．

(4) 分析

まず，表1，2において，特徴的な数値とその項目に着目する．表1において，興味・関心で最大値となった項目は「L. 2次関数の演習問題」である．表2においても，興味・関心で平均の2.73以上である項目は，$\boxed{1}$(1)–(3)，$\boxed{3}$(1)–(3)であり，これらはすべて表1のLの内容に該当し，理解も高い数値を示しているものが多い．一方，表2の理解で平均の2.99以上であるこれら以外の項目は，$\boxed{5}$(1)–(3)であり，内容が一致する表1の「B. ヘロンの公式の式変形」と共に，理解で高い数値，興味・関心で低い数値を示している．逆に，表1，2の両方で理解が最小値となった項目は「J. 放物線の回転」と$\boxed{2}$(2)である．共に「放物線の回転」に関する内容で，最も難易度が高かったが，興味・関心は平均の前後に位置している．全体的な分布を考えると，理解と興味・関心の相関係数は，表1で-0.129，表2で0.097であり，理解と興味・関心にほとんど相関関係はない．

次に，3章の「ヘロンの公式に関する授業実践」に関連する項目を自由記述の内容を含めて考察する．3章1節「ヘロンの公式の証明(内接円と傍接円を利用)」について，Aより，理解こそ平均より少し低めであるが，ある程度の興味・関心を引き出せたようである．自由記述によれば，幾何的な発想と綺麗な証明を評価する声が多い．3章2節「ヘロンの公式の式変形の利用」については，B，$\boxed{5}$(1)–(3)より，理解し易く興味・関心の低い内容と言える．これは，式変形のみと捉えられたためだろうが，自由記述によれば，利用の場面である図1，2の発想には面白さが認められる．3章3節「ヘロンの公式の座標平面への応用」に関しては，問5，6について，C，Dより，理解に差があるが，興味・関心は平均的である．自由記述からは，幾何的なヘロンの公式を関数分野でも使えること，ヘロンの公式の式変形の有用性，導いた公式自体の実用性，に良さを感じたことが伺える．また，問7，8について，I，J，$\boxed{2}$(2)より，難易度の高さにも関わらず，ある程度の興味・関心はあるようである．

g3-4.5 まとめ

ヘロンの公式の内接円と傍接円を利用した証明については，公式の幾何的意味が分かると共に，証明における幾何的発想の見事さがあり，この点で生徒の関心は非常に高かった．一方で，十分に理解できない生徒には，「難しくて面倒だ」と感じられたようである．これは，生徒の習熟度に応じて，設問をより丁寧に作ることによって，改善する必要がある．ヘロンの公式の式変形自体については，「単なる式変形で面白くない」という意見が多かった．公式をそのまま適用したときの煩雑さをもっと体験させてから取り組ませると，生徒の印象も変わるはずである．一方，立体図形・座標平面への応用の場面では，ヘロンの公式の式変形の有用性を見い出せた．代数的な操作だけでなく，幾何的な要素もあると，特に生徒の関心が高まる．

参考文献

[1] 安藤清・佐藤敏明 (1994)「初等幾何学」森北出版.

[2] T. L. ヒース (訳 平田寛他) (1998)「復刻版 ギリシア数学史」共立出版.

[3] 細矢治夫 (2013)「三角形の七不思議」講談社.

[4] 君島巌 (2008)「数研通信 62号 内接円と傍接円を用いたヘロンの公式の簡明な証明」数研出版.

(2013年　須田)

G1－3. 正多角形と等積な正方形の作図法

関連分野：幾何分野，代数分野
高等数学：幾何学
対象学年：高校１年生
関連単元：「図形の性質」
教 材 名：「正多角形と等積な正方形の作図法」

≪作図≫

学習指導要領が改訂され，作図が数学Aに追加された．いままでは中学１年で作図を学習しており，高校で新たに学ぶことはなかった．そこで，今回の改訂で追加された作図の学習内容を検討し，中学の作図とは異なる作図を試みた．

改訂された指導要領には，数学Aの(3)図形の性質の分野に「ｱ平面図形 (ｳ)作図　基本的な図形の性質などをいろいろな図形の作図に活用すること．」とあり，その解説に，「中学校において学習した基本的な作図や三角形の合同条件，相似条件などの図形の性質を基にして，三角形の性質や円の性質など平面図形に関する基礎的な内容についての理解を深め，それらを事象の考察に活用できるようにするとともに，図形に対する直観力・洞察力を養い，図形の性質を論理的に考察し表現する能力を育成する．また，基本的な図形の性質を作図に活用し，図形に対する見方を豊かにし，数学の学習に対する興味や関心を高める．(後略)」とかかれている．さらに，詳しく

(ｳ)作図

中学校では，第１学年で角の二等分線，線分の垂直二等分線，垂線，円の接線などの「基本的な作図の方法とその活用」を扱っている．

ここでは，中学校の学習内容や「(ｱ)三角形の性質」，「(ｲ)円の性質」での学習内容を基にして，平行な直線，線分を与えられた比に内分する点や外分する点，<u>１の大きさの線分が与えられたときのある大きさの線分，正五角形などの作図を扱うことが考えられる．</u>

指導に当たっては，作図のための方針を明確にすること，作図の後でその方法が正しいことを証明することや作図した全ての点が条件を満たしていることを確認することを大切にする．

とある．

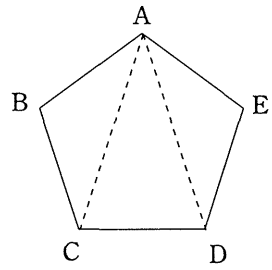
これらのことをふまえて，高校の作図を考えてみる．

G1－3.1. 正五角形の作図

学習指導要領には，『正五角形の作図』が，高校の作図の学習内容の例として示されている．そこで，実際に，正五角形の作図をやってみる．

問１　一辺の長さが１である正五角形を作図しなさい．

正五角形 ABCDE を作図するには，右図のように３つの三角形に分け，まず，△ACD を作図し，次に△ABC と△ADE を作図する．



作図①

長さ１の線分 CD が与えられている．

i)CD の垂直二等分線ℓをひき，CD との交点をＦとする．(CF＝1/2)

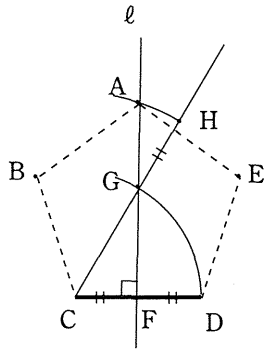
ii)ℓ上にFG＝1 となる点Ｇをとる．(CG＝$\sqrt{5}$/2)

iii)CG の延長上に GH＝1/2 (＝CF) となる点Ｈをとる．(CH＝(1＋$\sqrt{5}$)/2)

iv)ℓ上に CH＝CA となる点Ａをとる．

v)AB＝CB＝1 となる点 B，AE＝DE＝1 となる点 E を，△ACD の辺上でないようにとる．

vi)５点 A,B,C,D,E を結び，一辺の長さが１の正五角形 ABCDE が作図できる．



この作図では，対角線の長さの値が必要である．

求めると，AB : AC＝1 : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ であることから，長さ１に対する $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ の長さの線分の作図が学習の目標となることがわかる．

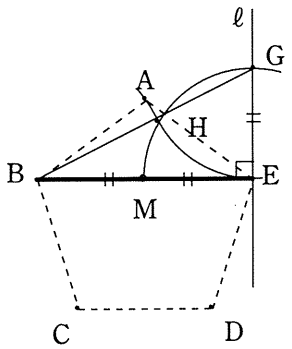
このことから，高校の作図では，図形的な性質だけ

ではなく，代数的要素を絡めた作図が求められていることが伺える．そこで，次のような正五角形の作図も試みた．

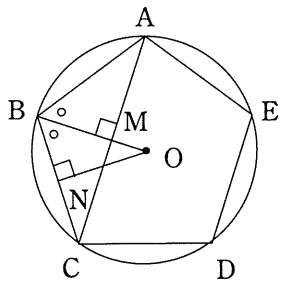
> 問２　次のような正五角形を作図しなさい．
> (1)　対角線の長さが１である正五角形
> (2)　外接円の半径が１である正五角形

(1)　問１と同様に考える．対角線の長さ１に対する一辺の長さは$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$である．よって，次のように作図できる．

作図②
長さ１の線分BEが与えられている．
ｉ)BEの中点をＭとする．(EM=1/2)
ii)Eを通りBEに垂直な直線ℓをひく．
iii)ℓ上にEG=EMとなる点Gをとる．(BG=$\sqrt{5}$/2)
iv)BG上にGH=GE(=1/2)となる点Hをとる．(BH=($\sqrt{5}$−1)/2)
v)２点B，EからBA=EA=BHとなる点Aをとる．
vi)点BからBC=BA，点EからEC=EBとなる点C，点BからBD=BE，点EからED=EAとなる点Dを，それぞれ直線BEに対して点Aと反対側にとる．
vii)５点A,B,C,D,Eを結び，対角線の長さが１の正五角形ABCDEが作図できる．



(2)　まず，外接円の半径１に対する正五角形の一辺の長さを求める．



上図のように点をおき，AB=a，AC=b，OB=1とする．AM=AC/2=b/2　で，
△ABM∽△OBNより　ON=b/2a
問１よりa：b=1：(1+$\sqrt{5}$)/2だから
ON=(1+$\sqrt{5}$)/4
△OBNにおいて，三平方の定理より

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=1^2 \qquad \therefore a^2=\frac{10-2\sqrt{5}}{4}$$

$a>0$より　$a=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$

これが正五角形の一辺の長さである．

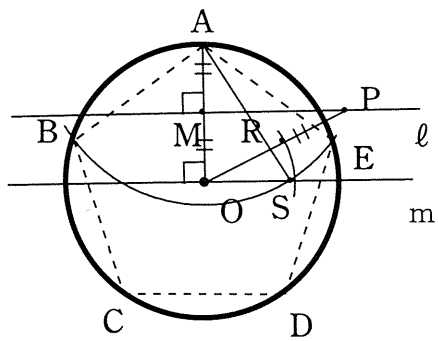
この長さを作図するために，次のように変形すると，

$$4a^2=10-2\sqrt{5} \quad より \quad (2a)^2=(\sqrt{5}-1)^2+2^2$$

$$a^2=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+1^2 \quad という関係式が得る．$$

よって，(2)で求めた長さ$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$を利用して，直角三角形を作図することから一辺の長さが作図できる．

作図③
半径１の円Ｏが与えられている．
ｉ)円周上に点Ａをとり，線分OAの垂直二等分線ℓをひき，ℓとOAとの交点をＭとする．(OM=1/2)
ii)ℓ上にMP=OA(=1)となる点Ｐをとる．(OP=$\sqrt{5}$/2)
iii)OP上にPR=OM(=1/2)となる点Ｒをとる．(OR=($\sqrt{5}$−1)/2)
iv)Ｏを通りOAに垂直な直線mとひく．
v)m上にOR=OSとなる点Ｓをとる．(AS=a)
vi)円Ｏの円周上にAB=AE=AS(=a)となる点B，Eをとる．
vii)点BからBC=aとなる点C，点EからED=aとなる点Ｄを円Ｏの円周上にとる．
viii)５点A,B,C,D,Eを結び，対角線の長さが１の正五角形ABCDEが作図できる．



G1－3.2.　正三角形と等積な正方形の作図

正五角形の作図では，必要な長さを代数的要素と三平方の定理を利用して，作図している．

そこで，次のような問題を試みた．

> 問３　正三角形 ABC と面積が等しい正方形 DEFG を作図したい．次の問いに答えなさい．
> (1)　正三角形ABC の一辺の長さを２とするとき，正方形 DEFG の一辺の長さを求めなさい．
> (2)　正方形DEFG を作図しなさい．

(1)　正三角形の面積は $\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$

よって正方形の面積も $\sqrt{3}$ であるから，

正方形の一辺の長さは $\sqrt{3}$ の平方根，

つまり，$\sqrt{\sqrt{3}}=\sqrt[4]{3}$ である．（およそ 1.316…）

(2)　一辺の長さが $\sqrt[4]{3}$ の正方形を作図するには，$\sqrt[4]{3}$ を作図できればよい．そこで，$\sqrt[4]{3}=\sqrt{\sqrt{3}}$　つまり，3 の 4 乗根は $\sqrt{3}$ の平方根であることから，次のように変形し，作図できる．

$$\sqrt[4]{3}=\sqrt{\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}$$

作図④

一辺の長さ２の正三角形ABC が与えられている．

ⅰ)A からBC に垂線を下ろし，BC との交点をD とする．

ⅱ)AD の延長上にDH=DC（=1）となる点H をとる．

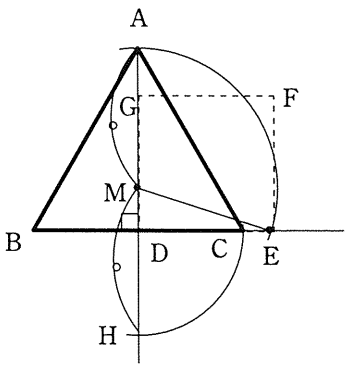
（AH=$\sqrt{3}+1$）

ⅲ)AH の中点M をとる．

（AM=($\sqrt{3}$+1)/2，MD=$\sqrt{3}$ −AM=($\sqrt{3}$ −1)/2）

ⅳ)BC の延長上にME=AM となる点E をとる．

ⅴ)DE を一辺とする正方形DEFG が作図できる．



G1－3.3.　正五角形と等積な正方形の作図

前節の「正三角形と面積が等しい正方形を作図する」問題を授業で取り組んだところ，他の正多角形についても同様な正方形を作図できるかを調べた生徒が，次の結果を報告してきた．その内容を示す．

> 問４　一辺の長さが１である正五角形と面積が等しい正方形を作図しなさい．

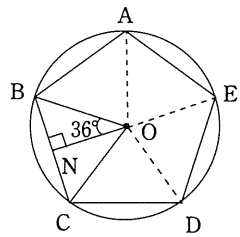
まず，一辺の長さが１である正五角形の面積を求める．

BC=1，∠BON=36°

$\cos 36^\circ=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

$\tan 36^\circ=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

$ON=\frac{1}{2\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$



面積は　$\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2\sqrt{5-2\sqrt{5}}}\times 5=\frac{5}{4\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$

よって，面積の等しい正方形の一辺の長さは

$\sqrt{\frac{5}{4\sqrt{5-2\sqrt{5}}}}$　となる．

この値の線分を作図するために，次の変形をする．

$$\frac{\sqrt{5}}{2}\times\sqrt{\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}}=\frac{\sqrt{5}}{2}\times\sqrt{\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}}}\times\sqrt{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{\sqrt{5}}\times\sqrt{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$m=\sqrt{5+2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2-1^2}$ とすると

$$①=\frac{1}{4}\times\sqrt{\sqrt{5}}\times\sqrt{(m+1)^2-(m-1)^2}\ \cdots\cdots★$$

となり，これにしたがって，次のような作図をすればよい．

作図⑤

一辺の長さ１の正五角形ABCDE が与えられている．

ⅰ)AE の延長上にAF＝２となる点F，∠GAE=90°，

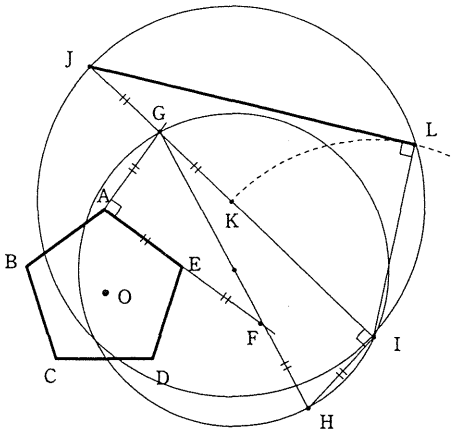
AG＝1となる点Gをとる．（GF＝$\sqrt{5}$）

ii)GFの延長上にFH＝1となる点Hをとる．（GH＝$\sqrt{5}$＋1）

iii)GHを直径とする円をかき，円周上にHI＝1となる点Iをとる．（GI＝$\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2-1^2}$＝m）

iv)IGの延長上にGJ＝1となる点J，線分GI上にGK＝1となる点Kをとる．（IJ＝m＋1，IK＝m－1）

v)IJを直径とする円をかき，円周上にIK＝ILとなる点Lをとる．（JL＝$\sqrt{(m+1)^2-(m-1)^2}$）



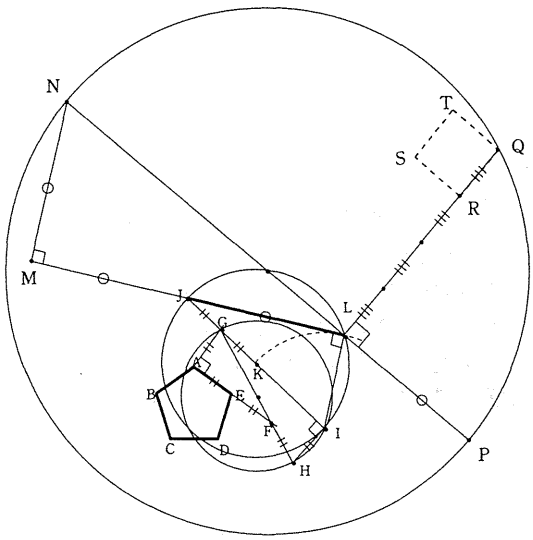
vi)LJの延長上にJM＝JLとなる点Mをとり，∠LMN＝90°，MN＝JLとなる点Nをとる．（NL＝$\sqrt{5}$ JL）

vii)NLの延長上にLP＝JLとなる点Pをとる．（NL：LP＝$\sqrt{5}$：1）

viii)NPを直径とする円をかき，Lを通りNPに垂直な直線をひき，円との交点をQとする．（LQ＝$\sqrt{\sqrt{5}}$ JL）

ix)LQを4等分し，Qに近い点をRとする．（QR＝$\sqrt{\sqrt{5}}$ JL/4）

x)QRを一辺とする正方形QRSTが作図できる．



G1－3.4. 正多角形と等積な正方形の作図

面積が求められている正方形を作図するため，正方形の一辺の長さの値として，平方根や平方根の平方根である4乗根が頻出する．そこで，4乗根を作図する方法として，次の2つのテクニックが多いに有効である．

・式変形

$$\sqrt[4]{t}=\sqrt{\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{t}+1\right)^2-\left(\sqrt{t}-1\right)^2}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sqrt{t}+1\right)^2-\left(\sqrt{t+1}\right)^2}$$

前節の解説★や作図⑤iii～vがこれにあたり，

$m=\sqrt{5+2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2-1^2}$ とおき，

$m^2+1^2=\left(\sqrt{5}+1\right)^2$ より，mが作図できる．

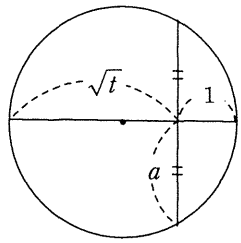
・図形の性質

方べきの定理より

右図において

$a^2=\sqrt{t}\times 1$

$a>0$ より　$a=\sqrt{\sqrt{t}}$



作図⑤viiiの作図がこれにあたる．

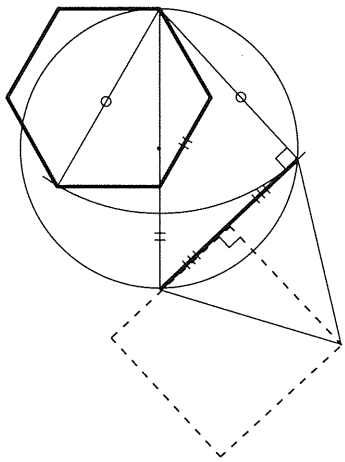
その他の多角形についても試みた。ポイントと図のみを示したので，途中の過程を考えてほしい．

> 問5　一辺の長さが1である次の正多角形と面積が等しい正方形を作図しなさい．
> (1)　正六角形
> (2)　正八角形

(1)　一辺の長さを1とする正六角形の面積は$\frac{3\sqrt{3}}{2}$だから，面積の等しい正方形の一辺の長さは$\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$である．これを次のように式変形する．

$$\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2-2^2}$$

作図は次のようになる．



(2)　一辺の長さを１とする正八角形の面積は

$2\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ となる．よって，面積の等しい正方形の一辺の長さは $\sqrt{2\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$ である．

この長さ $\sqrt{2\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$ は，

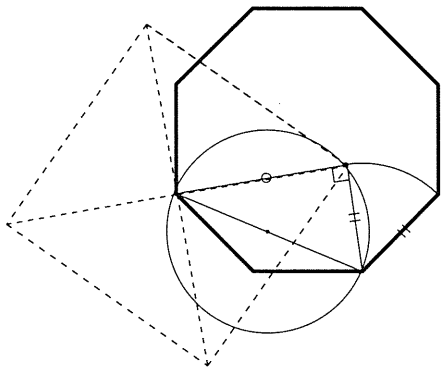
$$\sqrt{2}\times\sqrt{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}=\sqrt{2}\times\sqrt{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}}$$
$$=\sqrt{2}\times\sqrt{\sqrt{2}+1}$$

これを次のように式変形する．

$m=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$　$\left(=\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$ とおき，

$$\sqrt{2}\times\sqrt{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}\times\sqrt{(2m)^2-1^2}$$

となるので，作図は次のようになる．

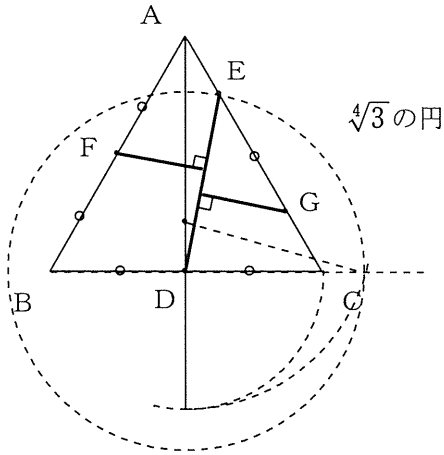


G1－3.5.　今後の展開

その他の正多角形として，正十七角形と等積の正方形の作図も試みた．発表は次回にする．それ以外の正多角形についても，今後試みていきたい．また，今回の作図は，正多角形の一辺の長さを１として，正方形の面積や一辺の長さを表してきたが，問２や問３と同じように，基準を変えて取り組むこともできるだろう．なお，問１，問２に出てくる $\sqrt{5}$ の作図に，$1:2:\sqrt{5}$ の直角三角形を用いたが，$2:\sqrt{5}:3$ の直角三角形を用いた生徒もいた．これらを比較しても良いだろう．

今回の教材は，次ページにあるように，海外交流事業の一貫で，本校にシンガポールの高校生が来校し，一緒に授業を行ったときも扱った．数学で用いる数式や記号は世界共通であり，特に，幾何については，進度に関係なく，一緒に楽しめる教材と考えられる．そこで，グループ活動的にこれらの教材を用いた．最後に，正三角形と正方形の面積が等しいことを示すのに，鳩目返しを使って，視覚的にも示した．シンガポールの生徒達にとっても新鮮だったようで，大変興味を示していた．

> やってみよう
> 　正三角形を４つのパーツに切り分けて，そのパーツを組み合わせて正方形をつくる．どのように切り分けるとよいか．ただし，パーツは直線で切り分けることとする．



作図⑥

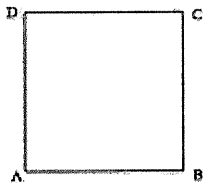
作図④で一辺の長さ $\sqrt[4]{3}$ の正方形が作図できている．

ⅰ)中点Ｄより長さ $\sqrt[4]{3}$ のＤＥをひく．
ⅱ)ＡＢの中点ＦよりＤＥに垂線を下ろす．
ⅲ)ＡＣ上にＥＧ＝ＡＦとなる点Ｇをとる．
ⅳ)ＧよりＤＥに垂線を下ろす．
ⅴ)上図の太線を切る．

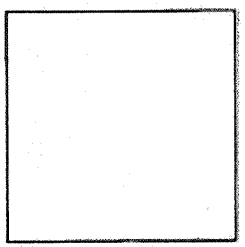
数学Ⅰ　特別授業　「Equilateral Triangles & Squares」

Gr. 1　class (　　) No.(　　) Name(　　)

1 Square AEFG shares vertex A, side AB and side AD with square ABCD. Its area is three times as large as square ABCD's. Construct square AEFG.



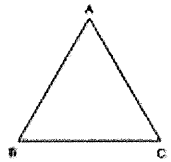
2 Fold origami into a square whose area is one-fifth of the original. How would you do it?



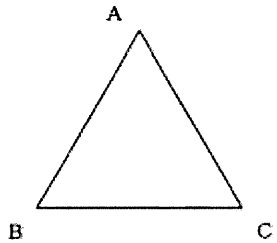
3 We want to construct square DEFG whose area is as large as that of Equilateral triangle ABC.

Answer the following questions.

(1) One side of Equilateral triangle ABC is 2 units long. Find out the length of a side of square DEFG.

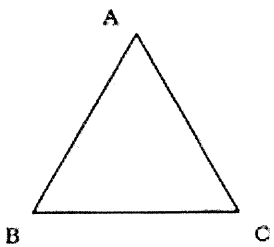


(2) Construct square DEFG.



4 Cut a Equilateral triangle into four parts and make a square with them.

You must cut the parts with straight lines.



(2013年　町田)

d3−4.　放物線で囲まれる部分の面積

関連分野：代数分野
高等数学：2 次関数
対象学年：中学３年生
関連単元：2 次関数
教 材 名：放物線で囲まれる部分の面積

≪微分積分における極限の概念を生み出す教材≫

中学数学において，座標平面上で計量のできる面積は，直線で囲まれる部分または円に限られてしまう。曲面で囲まれる体積であれば，公式として球面の体積や，円錐なども紹介されている。しかしそれらについて，詳細な証明は紹介されず，あくまで当てはめの公式として使われることが一般的である。しかし本来は，曲線で囲まれる部分についても求積をしっかりと極限の概念を用いて証明をする必要があり，そこには数学的な面白さが無数に存在する。ここでは，曲線で囲まれる部分の求積として，2 次関数と直線で囲まれる部分の面積の計算を考える。放物線には相似性がある為，最も簡単な放物線 $y=x^2$ と x 軸と $x=1$ の直線で囲まれる部分の面積について考えれば，2 次関数で囲まれる部分はどのような場合にあっても求積がほぼ可能になる。もちろん，定積分の計算をすれば，単純にその面積は $\frac{1}{3}$ であるのだが，この証明を中学 3 年生に考えさせたところ，述べ 15 通り以上の証明が多くの生徒から提案された。その証明は極限の考え方だけではなく，幾何の相似拡大，また無限級数の概念の導入など，沢山の数学的なアイデアが詰まっており，こちらも大変勉強になった。ここに，その証明の数々を紹介したいと思う。

1−1.　微小距離に注目した証明

放物線で囲まれる部分の面積は，一般には定積分により計算される。しかし，中学での授業で定積分を導入することは不可能なので，まずは，図形の紹介と，本校開発教材の「d1. 自然数・平方数・立方数の和」の概念を使って，区分求積法による証明を紹介する。実際の授業においては，この証明方法も生徒から提案された。問題提示は以下の通り，至って簡単なものである。

問題

$y=x^2$ と x 軸と $x=1$ の直線で囲まれる部分の面積 $S=\frac{1}{3}$ を示せ。

①区分求積法（長方形分割）

放物線 $y=x^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ と x 軸の間にある部分を、y 軸に平行な直線 $x=\frac{k}{n}$ $(k=1,2,3,\cdots)$ で分割する。n が大きいとき、

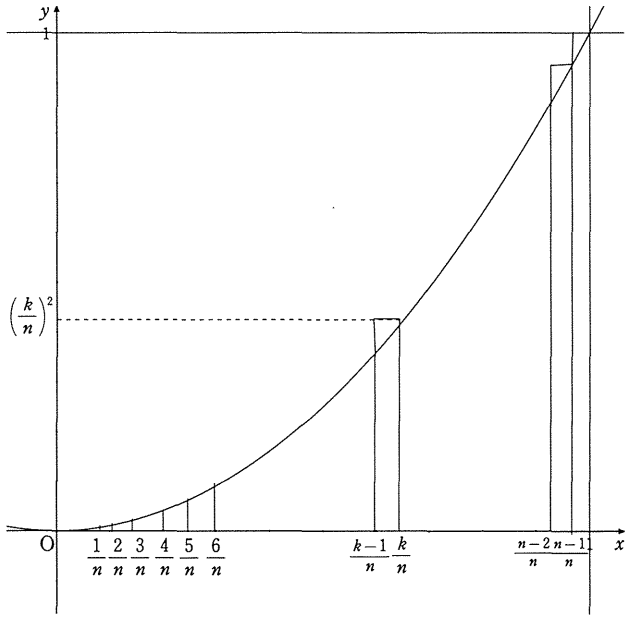
$$\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots(n-1)^2+n^2)$$

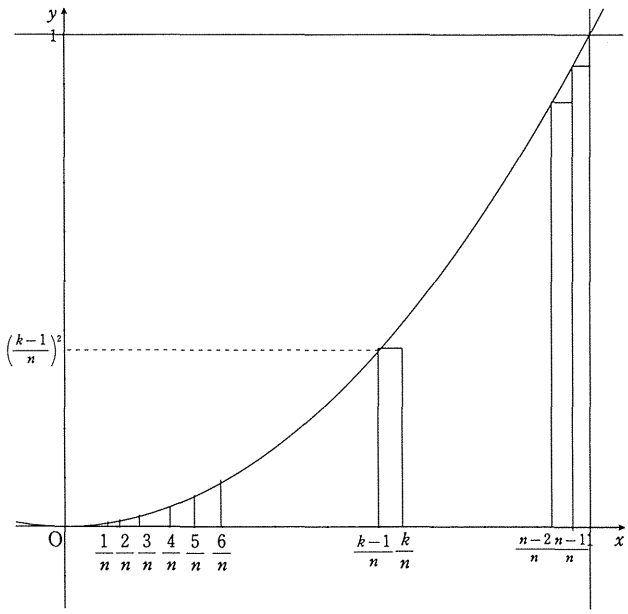
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}=S_1$$

これより、n が大きくなればなるほど、上の式の値は、に近づくことがわかる。

（ $n \to \infty$ のとき、$\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2} \to \frac{1}{3}$ ）



つぎに，下の図のようにn−1 個の長方形を考えて，



同様にそれらの和を計算すると，

$$\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots(n-1)^2)$$

$$=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}=\mathrm{S}_2$$

こちらも、n が大きくなればなるほど、上の式の値は、に近づくことがわかる。

（ $n\to\infty$ のとき、$\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\to\frac{1}{3}$ ）

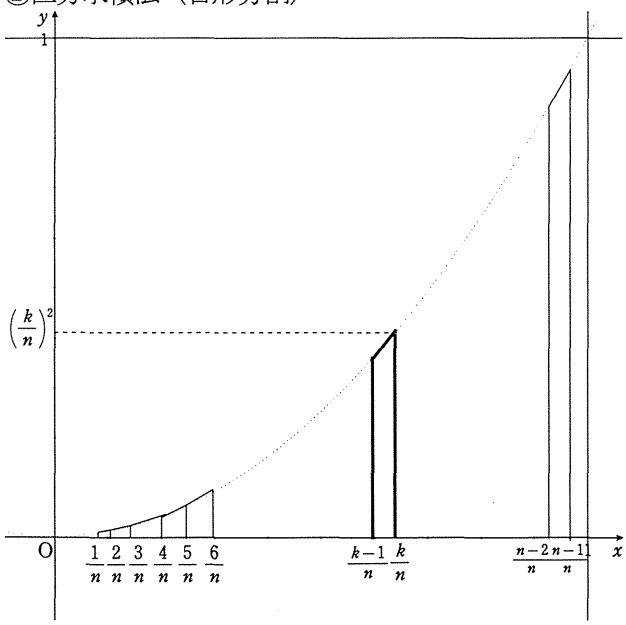
もとめる面積を S とすると，

$$\mathrm{S}_2<\mathrm{S}<\mathrm{S}_1$$

であるから，$\mathrm{S}=\frac{1}{3}$ を得る。

次に，これを台形に分割する（一つ目は三角形）ことで，平方数の和ではなく，連続する整数の積の和で計算した生徒がいた。

②区分求積法（台形分割）



つぎに，上の図のようにn個の台形（一つ目は三角形）を考えて，同様にそれらの和を計算すると，

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\left\{\frac{(i-1)^2+i^2}{n^2}\right\}=\frac{1}{2n^3}\sum_{i=1}^{n}\{2i(i-1)+1\}$$

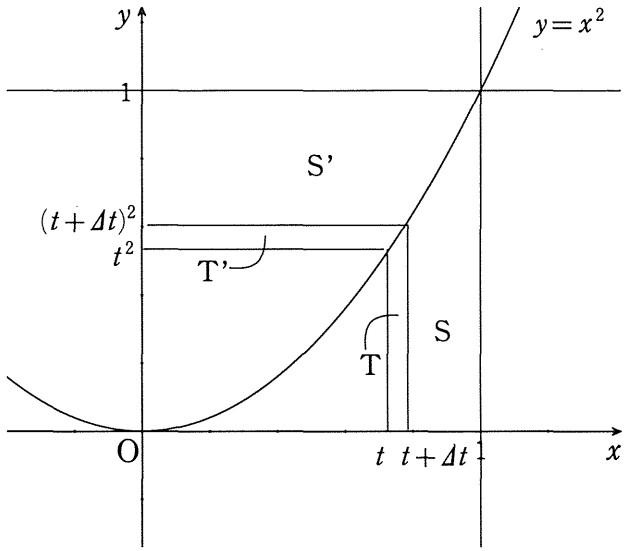
$$=\frac{1}{2n^3}\left\{\frac{2}{3}(n-1)n(n+1)+n\right\}$$

$$=\frac{2n^2+1}{6n^2}\to\frac{1}{3}$$

1－2．　微小面積に注目した証明

つぎに，区分求積法ではなく，正方形の放物線による分割を考え，その面積比に注目する考え方での解法を紹介する。

③台形の微小面積比



S' を残りの部分の面積とする。このとき，$\mathrm{S}':\mathrm{S}=2:1$ が示されれば良い。また，それぞれの部分を小さな台形の集合として考えることで，$\mathrm{T}':\mathrm{T}=2:1$ を示せば良い。

図の台形部分をT',T とするとき，

$$\mathrm{T}'=\frac{1}{2}\big(t+(t+\Delta t)\big)\big((t+\Delta t)^2-t^2\big)$$

$$=\frac{1}{2}\Delta t(2t+\Delta t)^2$$

$$\mathrm{T}=\frac{1}{2}\big((t+\Delta t)-t\big)\big((t+\Delta t)^2+t^2\big)$$

$$=\frac{1}{2}\Delta t(2t^2+2t\Delta t+\Delta t^2)$$

より，

$$\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}}=\frac{(2t+\Delta t)^2}{2t^2+2t\Delta t+\Delta t^2}=2-\frac{\Delta t^2}{2t^2+2t\Delta t+\Delta t^2}$$

であるから，dt を微小な距離だと考えれば，

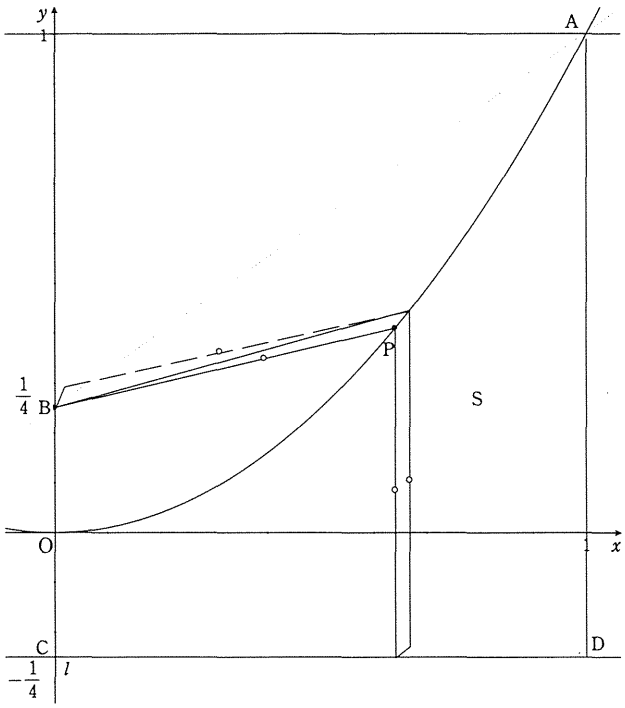
$$\mathrm{T}':\mathrm{T}=2:1$$

である。

従って，$\mathrm{S}':\mathrm{S}=2:1$

次に，放物線の焦点と，準線に注目し，求めたい面積を導出した非常にユニークな解法を紹介する。

④焦点と準線を利用した微小面積



焦点Bから，放物線上の点Pに引いた線分と，Pからら準線に下した垂線の長さは等しい。それぞれの線分を右上に平行移動し，平行四辺形を考える。上側の平行四辺形の対角線によって作られた三角形と平行四辺形の面積比は1:2 である。放物線の上側部分は微小な三角形で埋め尽くし，下側部分は微小な平行四辺形で埋め尽くされる。したがって，台形ABCDは放物線によって，1:2の比で分割されている。
よって，Sを含む部分の面積は，

$$\text{台形 ABCD} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{4}\right)\cdot 1 = \frac{7}{8}$$

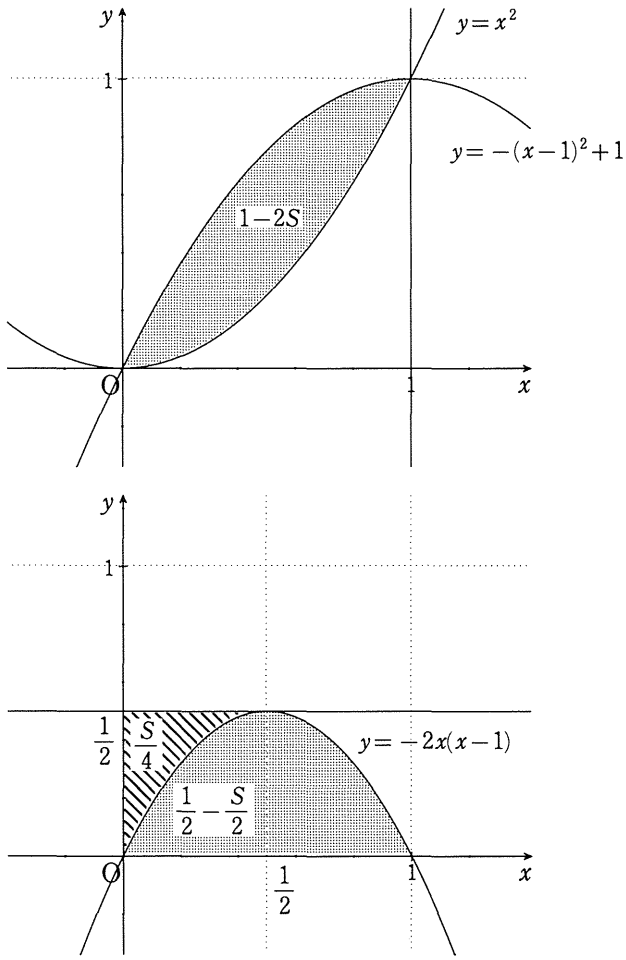
$$\therefore\quad S = \frac{7}{8}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

以上の4つが区分求積法から着想を得た解法である。本校開発教材集にも多数出てくる通り，微分方程式を意識した教材を中学1年生の時から多く取り上げてきている。これらのような考え方を引き出すためには，教材を工夫し，関数の概念を様々な角度から見せておくことが必須であろう。特に，④の焦点と準線に注目した面積は，微分積分を学習していたとしてもまず思いつくような考え方ではない。この証明を考えた生徒によると，この教材を扱う直前に，放物線の焦点と準線に関する性質を扱ったことがきっかけで生まれた発想だということである。

2－1. 面積の相似拡大に注目した証明

本校が発行した『創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発～中高6カ年から大学へ ～ 開発教材集（2004年度～2011年度）』に掲載されている教材の中に，カバリエリの原理を使って放物線で囲まれる部分の面積を考えるものが多数ある。カバリエリの原理の基本的な考え方は，そちらを参照されたい。ここではそれらを駆使した証明を紹介する。

⑤相似拡大とカバリエリの原理Ⅰ



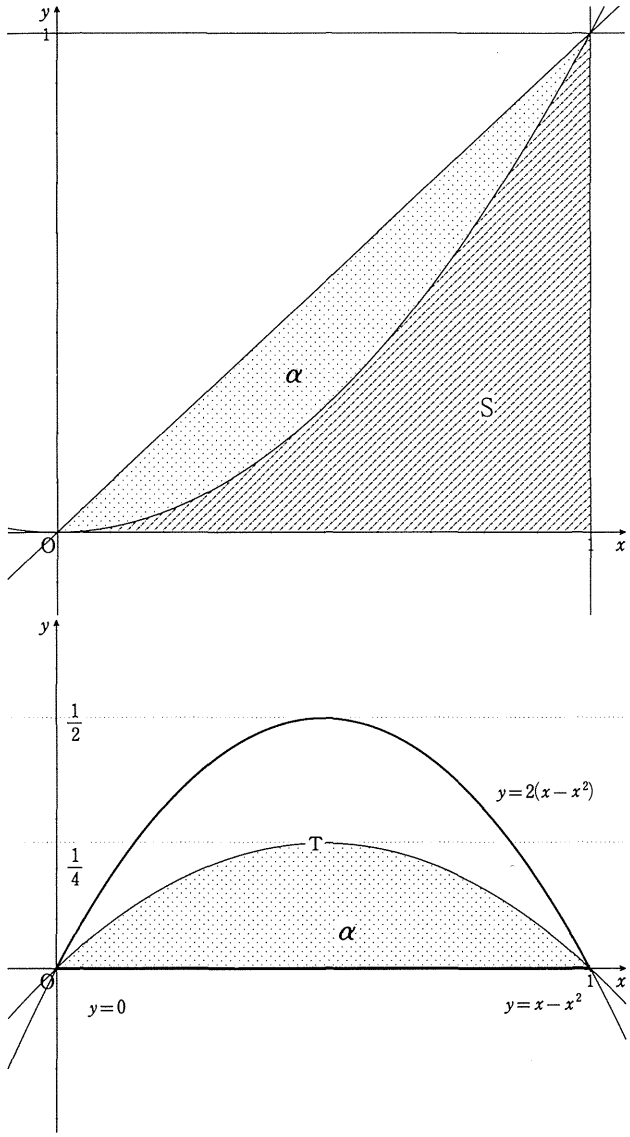
カバリエリの原理より，上図の打点部が下図の打点部と面積が等しい。したがって，

$$\frac{1}{2}-\frac{S}{2} = 1-2S$$

$$\Leftrightarrow\quad S = \frac{1}{3}$$

次に，同じような考え方だが，注目する部分が異なる証明を紹介する。

⑥相似拡大とカバリエリの原理Ⅱ



上図と下図において，カバリエリの原理により

$$\mathrm{T}=2\alpha \text{ かつ } \mathrm{T}=\frac{1}{4}(1-\mathrm{S})\cdot 2$$

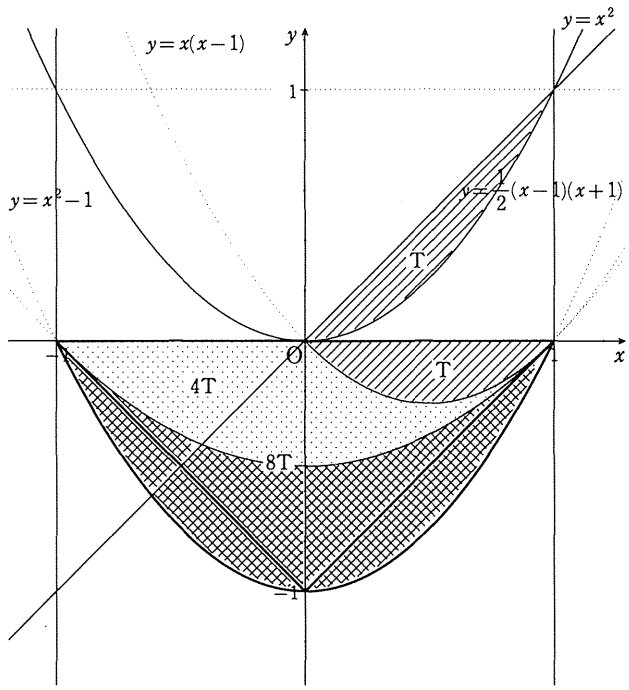
が成立する。ここで$\alpha=\frac{1}{2}-\mathrm{S}$ より，

$$2\left(\frac{1}{2}-\mathrm{S}\right)=\frac{1}{2}(1-\mathrm{S})$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{S}=\frac{1}{3}$$

次に，直線 $y=x$ を考え，三角形の面積と，相似拡大した放物線で囲まれる部分の面積の関係から導出した方法である。特に，放物線と直線 $y=x$ で囲まれる部分の相似拡大を繰り返すことで，求めたい面積を計算していることに留意したい。

⑦相似拡大とカバリエリの原理Ⅲ



図の直線 $y=x$ と放物線 $y=x^2$ で囲まれる部分の面積をT として，$\mathrm{T}=\frac{1}{6}$ であることを示せば良い。

カバリエリの原理より，Tは $y=x(x-1)$ と x 軸で囲まれる部分の面積に等しい。

ここで，$y=\frac{1}{2}(x+1)(x-1)$ と x 軸で囲まれる部分は，T を水平方向と垂直方向にそれぞれ2倍に引き伸ばした図形となるので，その面積は4T となる。

また$y=x^2-1$ と x 軸で囲まれる部分はその図形をさらに垂直方向に2倍に引き伸ばした図形となるのでその面積は8T である。

この面積は，斜辺の長さが2 の直角二等辺三角形とTを2個合わせた部分の面積に等しい。

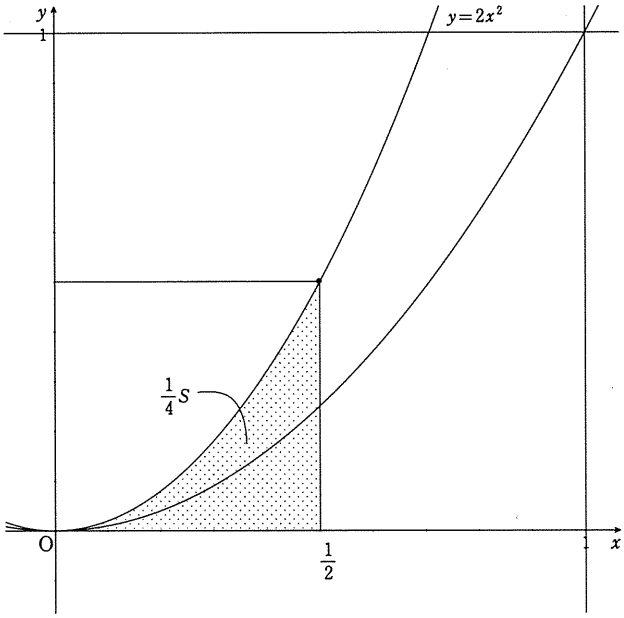
従って，

$$8\mathrm{T}=1+2\mathrm{T}$$

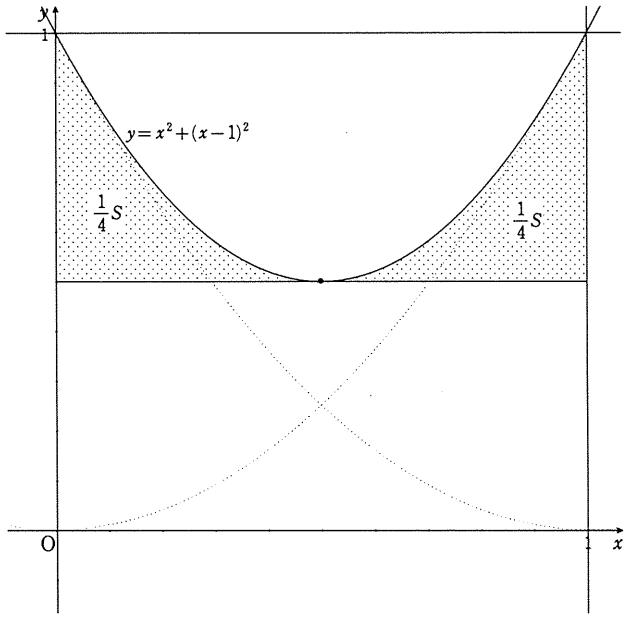
$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{T}=\frac{1}{6}$$

続いて，本校開発教材集に掲載されている「An1-3 和や積のグラフ」にあるような，関数同士の和に関するグラフを単純に式で考えるのではなく，グラフそのものの移動を考えて描くことを意識した証明である。カバリエリの原理を柔軟にとらえた発想の解法となっている。

⑧相似拡大とカバリエリの原理Ⅳ



まず, $y=2x^2$ と $x=\frac{1}{2}$, x 軸で囲まれた部分は, 水平方向・垂直方向にそれぞれ $\frac{1}{2}$ 倍しているので, その面積は $\frac{1}{4}S$ である。



更に, カバリエリの原理より, 上の図のように, $y=x^2+(x-1)^2$ と $x=1$, x 軸および y軸で囲まれた部分の面積は2S である。したがって,

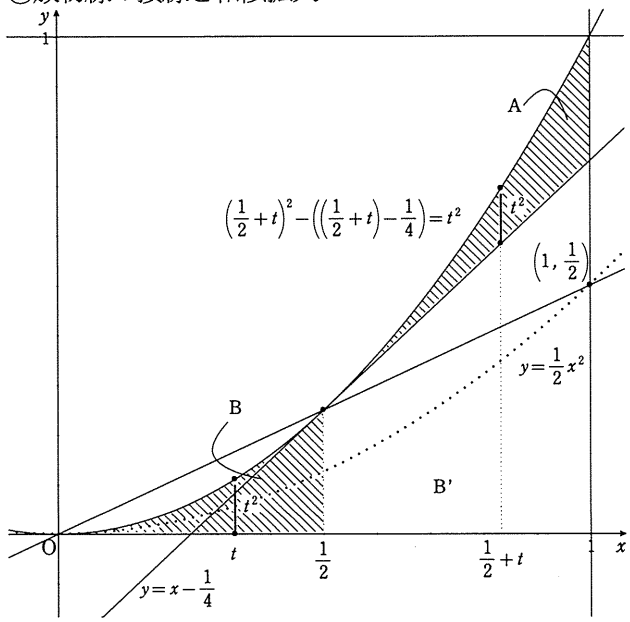
$$2S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}S\cdot 2$$

$$\Leftrightarrow \quad S=\frac{1}{3}$$

２－２．接線と放物線で囲まれる部分に注目した証明

今度は, 放物線の接線を考え, 接線と放物線で囲まれる部分に注目し, 相似拡大と, カバリエリの原理を駆使した証明を紹介する。接線についても本校開発教材集に掲載されている「d3 放物線の接線」に紹介されている通り, この教材を扱う前に授業で取り上げてある。そちらも, 微分を使うことなく, カバリエリの原理から接線を考えることを基本として, この面積の教材に繋げている。

⑨放物線の接線と相似拡大



まず, $x=\frac{1}{2}$ における接線と, 放物線で囲まれる部分に注目する。図中の式を考えると, A=B である。

B の面積を相似比２倍で拡大すると, B' となり, B' を垂直方向に２倍に拡大すれば S となるので, 4B=B' かつ B' ×2=S より, 8B= S である。したがって,

$$B=\frac{1}{8}S \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

となる。

このとき, S から A と B を除いた台形の面積は,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

であるから, 求める面積 S は

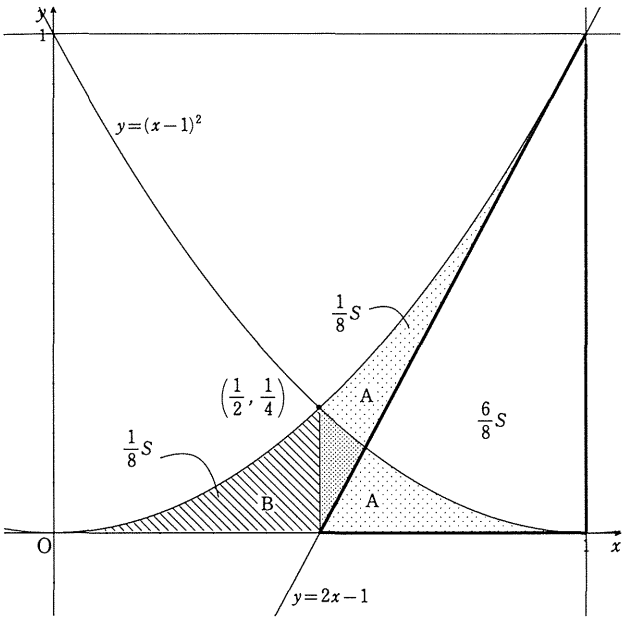
$$S=\frac{1}{8}S\cdot 2+\frac{1}{4}$$

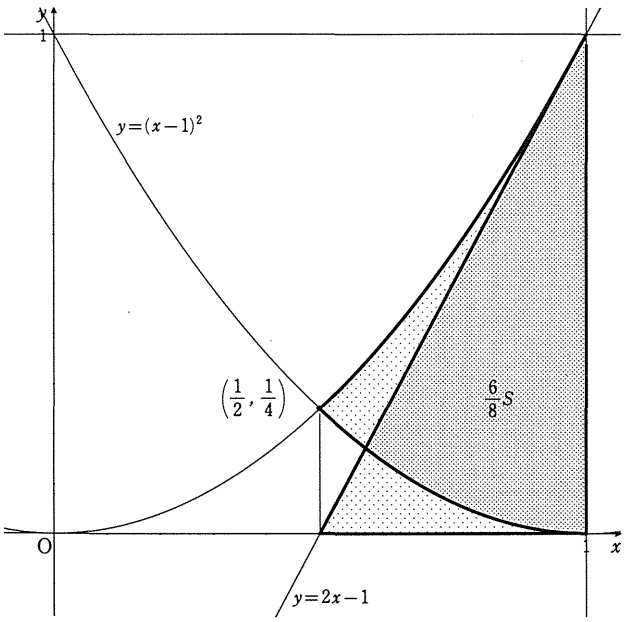
$$\Leftrightarrow \quad S=\frac{1}{3}$$

ここで(*)の式に注目すると, 他にもいろいろな考え方で証明することが可能となる。また, 接線の引き方も様々であるが, 中点・端点における接線を引く生徒が多くいた。

次に，端点における接線とカバリエリの原理を考えた証明である。

⑩放物線の接線とカバリエリの原理Ⅰ





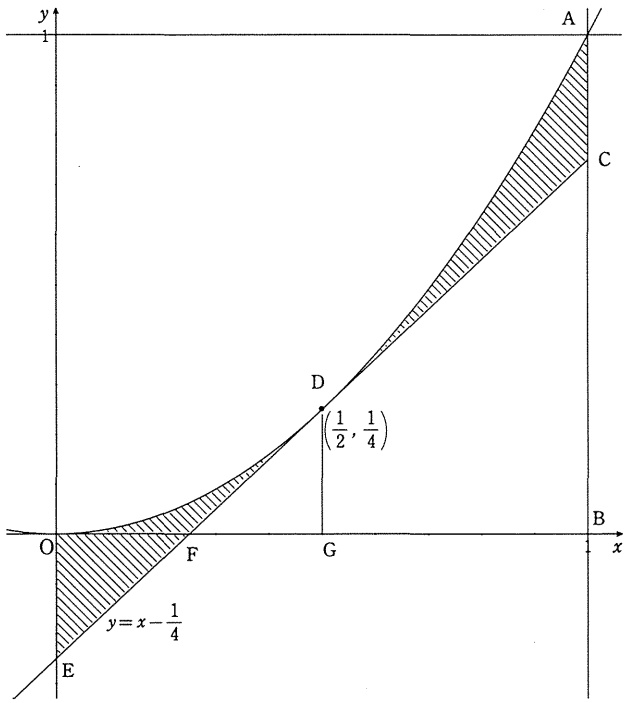
端点の接線 $y=2x-1$ と放物線で囲まれる部分Aの面積は，カバリエリの原理より，$y=(x-1)^2$ と x 軸で囲まれる部分Aの面積と等しい。したがって，前述の(＊) より，直角三角形の面積は $\frac{6}{8}$ S である。ゆえに，

$$\frac{6}{8}S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ S=\frac{1}{3}$$

さらに，中点における接線と，カバリエリの原理を考えた証明である。

⑪放物線の接線とカバリエリの原理Ⅱ



$$x^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ x^2-\left(x-\frac{1}{4}\right)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

と考えることで，図の斜線部分の面積は等しい。

一方，△OFE≡△GFD なので，斜線部は(＊)のBの面積 $\frac{1}{8}$S に等しい。したがって，求める面積Sは，台形DGBCの面積と斜線部の面積を合わせた面積となる。したがって，

$$S=\frac{1}{8}S+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{8}S$$

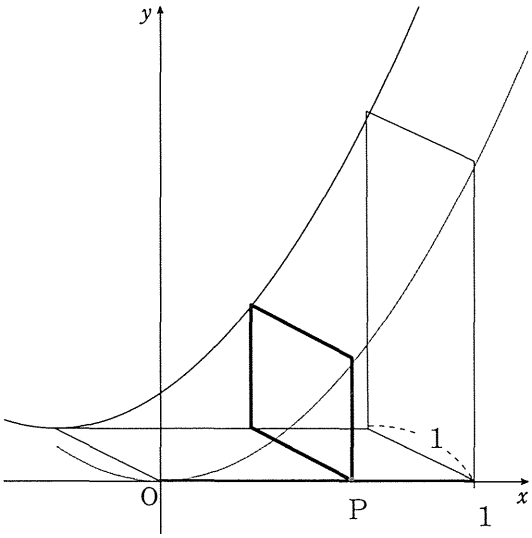
$$\Leftrightarrow\ S=\frac{1}{3}$$

接線と放物線の関係は，それぞれの関数の和や差を考えることで，常に完全平方式が導出される。すなわちそれは，x 軸に接する放物線であり，そこに注目して放物線の面積を求める生徒が多くいた。

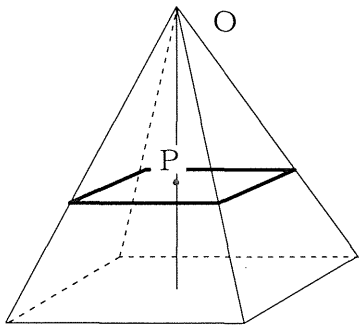
3．カバリエリの原理を基づく証明

本校開発教材集に掲載されている「d3-2 面積・体積」にも取り上げられているが，放物線を柱体に拡張し，四角錐と同じ体積になることを利用した証明がある。こちらも，生徒から提案された方法である。

⑫錐体と柱体の体積



図のように，放物線をz 軸方向に1だけ平行移動し，点Pを通る平面にある断面積を考えると，次の四角錐の点Pを含む平面にある断面積と等しくなる。

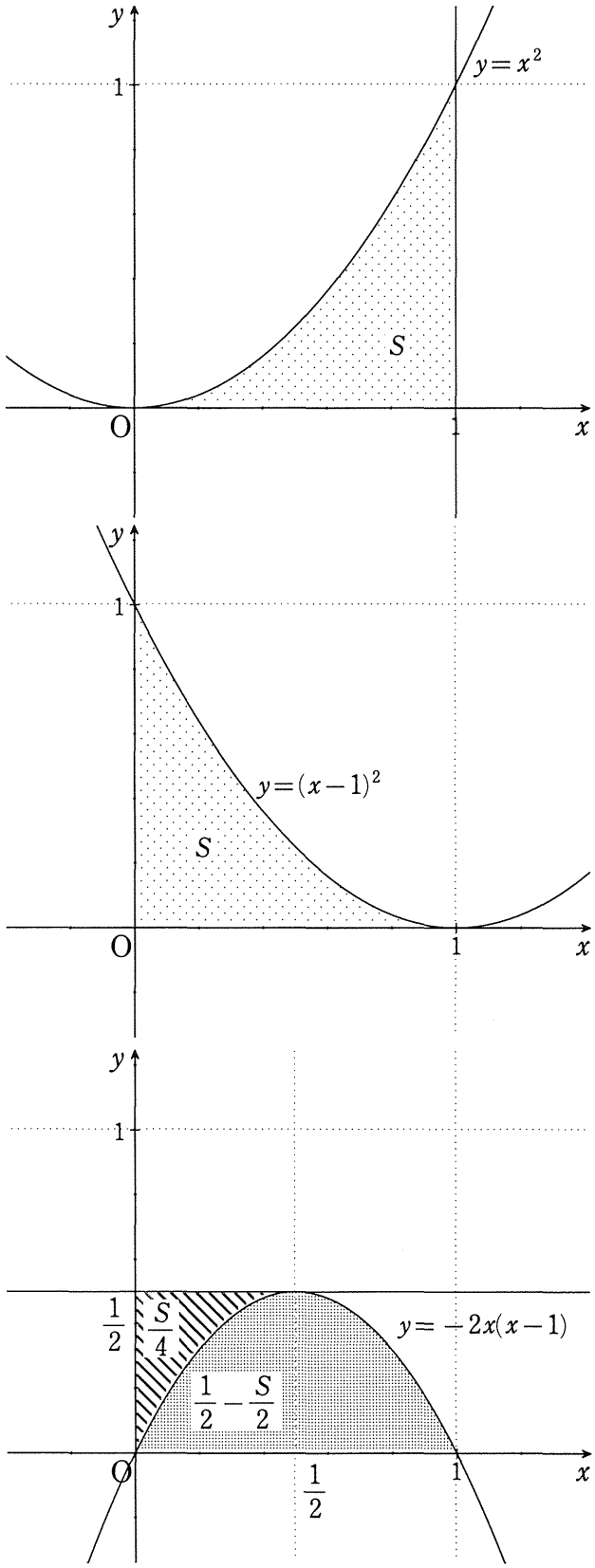


高さ１で底面が1辺１の
正方形である四角すい

したがって放物線で作られた柱体の体積は $\frac{1}{3}$ である。よって，z 軸方向の長さ１ を高さと考えれば，その底面積は求める面積と一致する。よって，$S=\frac{1}{3}$ である。

次に，平面で考えたカバリエリの原理による証明。

⑬3 つの放物線の和



まず次の式を考える。

$$\begin{cases} y = x^2 & \cdots ① \\ y = (x-1)^2 & \cdots ② \\ y = -2x(x-1) & \cdots ③ \end{cases}$$

①②③の右辺をすべて加えると，

$$x^2 + (x-1)^2 - 2x(x-1) = 1$$

となる。すなわち，閉区間[0 , 1]においても常に 1 である。したがって，図より

$$\mathrm{S} + \mathrm{S} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{S}}{2}\right) = 1$$

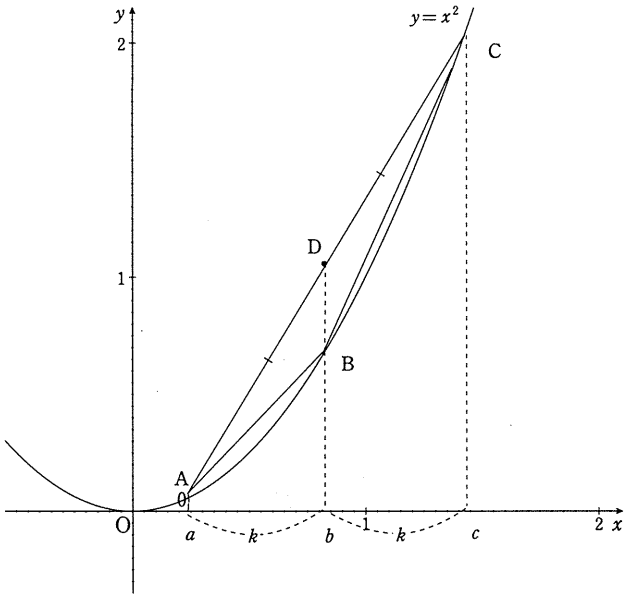
$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{S} = \frac{1}{3}$$

4．取り尽くしによる証明

「アルキメデスの取り尽くし法」という古典的な方法が有名である。放物線で囲まれる部分を三角形で埋め尽くし，無限級数によって求積するという方法である。この考え方によく似た証明も生徒から提案された。

⑭三角形の取り尽くし法

まず，下図の△ABC の面積を考える。ただし，$0 < a < b < c$ ，$b - a = c - b = k$ とする。



AC の中点を D とすると，D のy座標 d は

$$d = \frac{a^2 + c^2}{2} = \frac{a^2 + (a+2k)^2}{2} = a^2 + 2ka + 2k^2$$

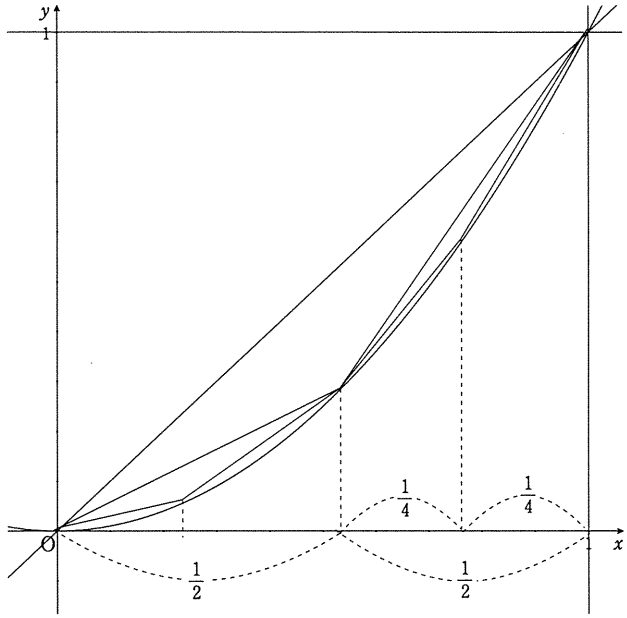
$$\therefore \ \mathrm{BD} = d - b^2 = d - (a+k)^2 = k^2$$

従って，

$$\triangle \mathrm{ABC} = k^2 \cdot 2k \cdot \frac{1}{2} = k^3$$

となるので，a の値によらず面積は k の値によって決められることが分かる。

次の図のように，直線 $y = x$ と放物線 $y = x^2$ で囲まれる部分を三角形で分割することを考える



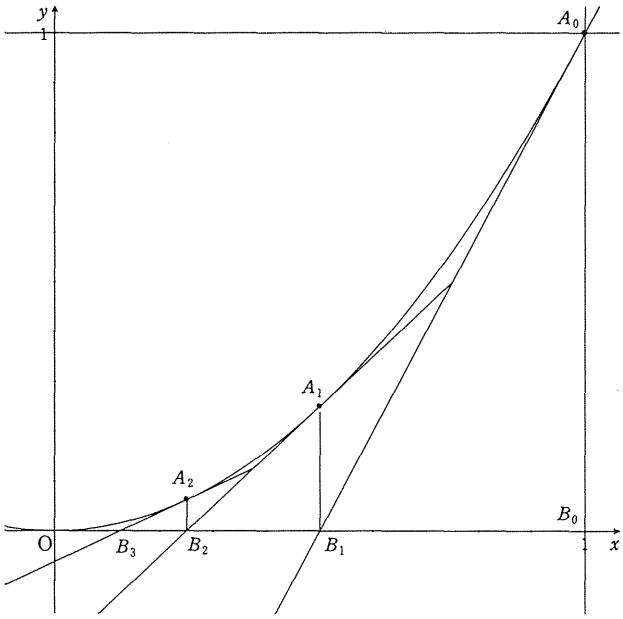
このとき，直線 $y = x$ と放物線 $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を T とすると，

$$\begin{aligned} \mathrm{T} &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{8}\right)^3 + 8\left(\frac{1}{16}\right)^3 + \cdots \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^2 + \cdots \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^4 + \cdots \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{8}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

この方法は，アルキメデスの取り尽くし法である。しかし，この方法を提案した生徒は，三角形の面積を一般化してから証明をしているので，式が煩雑にならずにとてもわかりやすい。

次に，放物線の接線をいくつも引いて，問題の部分を三角形に分割し，取り尽くす方法である。無限級数を用いた証明なのだが，考え方がとてもユニークである。次の⑮と⑯は着眼点が違うが，本質的には同じ証明である。

⑮放物線の接線と無限級数



図のように，点(1 , 1) をA_0 ，そこから下した垂線の足をB_0とし，A_n を $y=x^2$ と $x=(B_n$のx座標)との交点，B_n を $y=x^2$ の A_n における接線とx軸の交点とする。このとき，$OB_n=2OB_{n+1}$ が成り立つ。また，⑩と同様に，

$(OB_{n+1}A_{n+1}$で囲まれる部分の面積)

$=(A_nB_{n+1}A_{n+1}$で囲まれる部分の面積)

であり，これをS_nとおく。

ここで，

$$\begin{aligned}
S &= 2S_1 + \triangle A_0B_0B_1 \\
&= 2(S_2 + \triangle A_1B_1B_2) + \frac{1}{4} \\
&= 4(S_3 + \triangle A_2B_2B_3) + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \\
&\quad \vdots \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{2^nS_n + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^i\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{2^nS_n + \frac{\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{1}{4}}\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\{2^nS_n\} + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

ここで明らかに $2S_{n+1} < S_n$ が成立するので，

$$\frac{2^{n+1}S_{n+1}}{2^nS_n} < 1$$

したがって，$\{2^nS_n\}$は正の等比数列であり，公比は1よりも小さいので，$\lim_{n\to\infty}\{2^nS_n\}=0$ である。

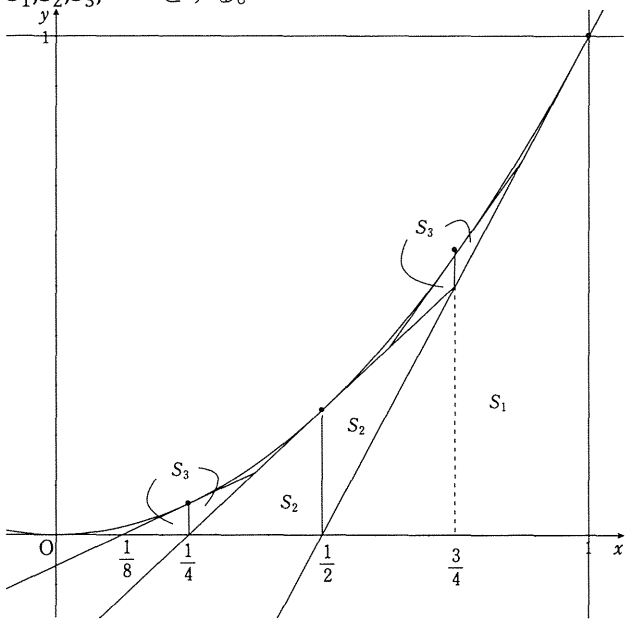
$$\therefore S = \frac{1}{3}$$

⑯接線による三角形の取り尽くし法

まず，次の図のように，放物線 $y=x^2$ の

$$x=\frac{i}{2^n} \quad (1 \leqq i \leqq 2^n)$$

における接線をひき，いくつかの三角形を作る。また，このように分割した三角形の面積をそれぞれ$S_1, S_2, S_3, \cdots\cdots$とする。



このとき，

$$S=S_1+2S_2+4S_3+\cdots+2^{n-1}S_n$$

によって近似され，$n\to\infty$ を考えることにより，

$$S=S_1+2S_2+4S_3+8S_4+\cdots$$

を得る。

ここで，

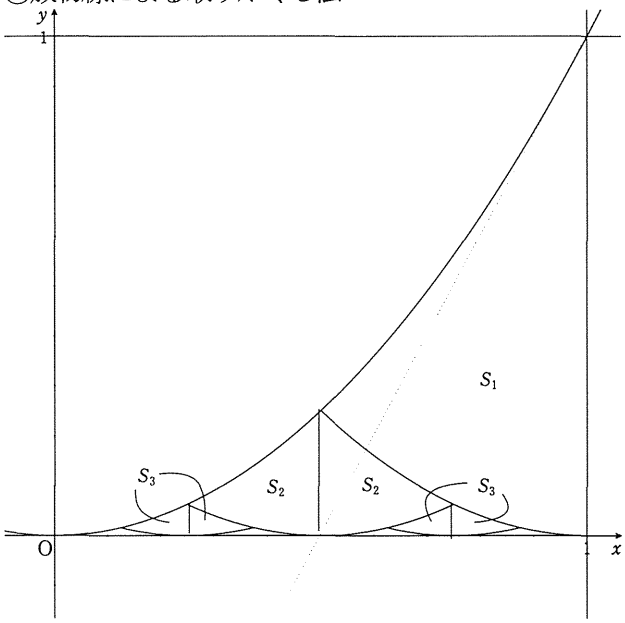
$$S_1=\frac{1}{4}$$
$$S_2=\frac{1}{32}$$
$$S_3=\frac{1}{256}$$
$$S_4=\frac{1}{2048}$$
$$\vdots$$

なので，

$$\begin{aligned}
S&=S_1+2S_2+4S_3+8S_4+\cdots \\
&=\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4+\cdots \\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

同様な無限級数の式になる図形の分割方法として，接線ではなく，カバリエリの原理を逆に用いて，放物線によって囲まれる部分で取り尽くす方法が提案された。曲線に囲まれた図形による取り尽くしなので，非常に興味深い。

⑰放物線による取り尽くし法



図のように，$y=(x-1)^2$，$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$，$y=\left(x-\frac{1}{4}\right)^2$，$y=\left(x-\frac{3}{4}\right)^2$，…… のグラフを書く。

このとき，⑩のように，カバリエリの原理から，すべて三角形の面積で考えることができる。したがって，⑯と同様に

$$S_1=\frac{1}{4}$$
$$S_2=\frac{1}{32}$$
$$S_3=\frac{1}{256}$$
$$S_4=\frac{1}{2048}$$
$$\vdots$$

なので，

$$\begin{aligned}S&=S_1+2S_2+4S_3+8S_4+\cdots\\&=\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4+\cdots\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

ここに取り上げた，⑮・⑯・⑰の計算で出てくる，「初項 $\frac{1}{4}$ 公比 $\frac{1}{4}$ の無限級数」は放物線で囲まれる部分の面積の近似式であることが分かる。いずれも接線と放物線で囲まれる部分をカバリエリの原理によって面積を捉えている。とても興味深い結果である。

以上のように大きく４つに分けて証明の方法を紹介した。他にも提案された証明はいくつかあるのだが，基本的な考え方がここに紹介したものに類するものに関しては割愛した。

中学代数の授業において，中学１・２年次に本校で開発された教材を様々な場面で利用し，中学３年の最後にこの面積の問題を取り扱った。それまでに培ったアイデアと，新しい発想で試行錯誤し，証明にチャレンジしてくれた。証明に使える道具はそれほど多くはないからこそ，生まれた証明も数多く見ることができる。一つの証明を紹介すると，それを発展させた証明を考えてくる生徒も多く，授業でも盛り上がって楽しんで取り組んでくれた。

扱っている題材としてはとてもシンプルであり，定積分を学習した高校３年生にとっては当たり前の結果である。しかし，その当たり前の単純な証明だからこそ，時間をかけて深く考えさせることでこれだけ沢山の証明を引き出すことができた。ここで挙げられた証明に使ったアイデアは，それぞれが高校・大学への数学に繋がっている。微分積分への応用だけではなく色々な場面で応用が期待できる発想である。

(2013　三井田)