

撥弦楽器におけるうなりを考慮した  
弦振動のモデリングに関する研究

小林 透

システム情報工学研究科

筑波大学

2014年 3月



## 概 要

楽器の発音メカニズムを物理モデルにより計算機上で再現し、楽器音を合成することが盛んに行われている。物理モデルによる楽器音の合成は楽器音響学だけでなく、実際の楽器の改造や改良において有用であると考えられる。この利点は現在も新しい構造が検討されているアコースティックギターにおいて期待できる。アコースティックギターのような撥弦楽器の演奏音を再現するにあたって実際の弦振動を忠実に再現できる振動モデルが求められるが、これまでの研究において弦の横振動に見られるうなりの発生メカニズムが明らかではなかった。そこで本研究は撥弦楽器における弦の横振動における減衰時の非周期的なうなりを再現できるモデルの構築を目的し、弦の伸長に伴う張力変化に起因する非線形性を考慮した弦の運動方程式を使用することで、減衰時の非周期的なうなりの発生メカニズムの解明を行った。実際のギターに張られた弦の 2 次元振動を計測する手法を構築し、その計測システムの有効性を確認した。端点が強固な実験系に 1 本弦を張り振動振幅に伴う非線形的な復元力と  $x$ ,  $y$  方向間の固有周波数の違いにより減衰過程において非周期的なうなりが発生することを考察した。その後実際のギターにおいて複数弦が小さな振幅で振動しているときの第 6 弦の振動に着目した。複数弦をいずれも小さな振幅で撥弦したときの第 6 弦において弦振動のうなりが見られなかった。これらの過程を通じて、実際のギターにおいて、ウルフトーンが生じない条件化でかつ複数弦の振動している状況でも、弦の伸びによる復元力と  $x$ ,  $y$  方向間の固有周波数の違いによる弦振動のうなりへの寄与の方が大きい場合が存在することが示された。このことは弦楽器の弦-胴との共振による寄与が大きい場合、振幅に由来する弦の伸びがうなりに支配的に寄与する状況があることを明らかにした。本研究成果は弦楽器の発音機構の解明について、今まで明らかにされてこなかった 1 本弦の非線形性が演奏音に寄与する現象に関する新たな知見を与えるものである。



# 目 次

第1章 序 論 .....	7
1.1 研究の背景 .....	7
1.2 研究目的 .....	8
1.3 本論文の構成 .....	8
第2章 弦振動の理論 .....	13
2.1 まえがき .....	13
2.2 伸びを考慮した弦振動モデル .....	13
2.2.1 振動方向によって振動周波数が等しい場合 .....	13
2.2.2 振動方向によって振動周波数が異なる場合 .....	18
2.3 弦振動のうなり .....	20
2.3.1 本研究におけるうなりの定義 .....	20
2.3.2 弦-胴共振によって発生するうなり .....	20
2.3.3 駆動点アドミタンスの計測に基づく胴モデルの作成 .....	26
2.3.4 弦の伸びに起因するうなり .....	34
2.4 まとめ .....	35
第3章 弦振動の計測手法 .....	41
3.1 まえがき .....	41
3.2 計測原理 .....	42
3.2.1 計測システム .....	42
3.2.2 画像上の位置から弦の変位への座標変換 .....	42
3.2.3 弦振動の撮影と画像処理 .....	44
3.2.4 画像の射影歪みによる計測結果への影響 .....	45
3.4 実験 .....	45
3.3.1 実験構成 .....	45
3.3.2 実験条件 .....	46
3.3.3 実験結果と考察 .....	47
3.3.3.1 弦の2次元横振動計測結果 .....	47
3.3.3.2 縦振動が計測結果に与える影響 .....	50
3.3.3.3 マーカの移動速度による計測誤差 .....	51
3.4 まとめ .....	54
第4章 1本弦の振動におけるうなり .....	57
4.1 はじめに .....	57
4.2 モデルパラメータ推定のための実験 .....	57

4.3	有限差分法による弦振動のシミュレーション	59
4.3.1	弦振動の計測とうなりの抽出	59
4.3.2	うなりを生じる弦振動のシミュレーション	61
4.3.3	弦の2次元振動での比較	63
4.4	まとめ	64
第5章	ギターにおける複数弦の振動による弦振動のうなりへの影響	69
5.1	はじめに	69
5.2	実験構成	69
5.3	複数弦振動の計測結果	71
5.4	複数弦振動の共振によるうなりの発生の観測	74
5.4	まとめ	81
第6章	結 論	83
	謝 辞	84
	参考文献	86
	著者文献	89
	著者紹介	91
付録	小川真, “アコースティックギターにおける弦振動シミュレーションに関する研究,” 筑波大学理工学群工学システム学類卒業研究, (2010). より抜粋	92

# 目 次

## 第 1 章

図 1.3 ギターの代表的な構造 .....	9
図 1.2 ギターにおける振動伝達.....	9
図 1.3 本論文の構成.....	10

## 第 2 章

図 2.1 本研究で使用する座標系の定義 .....	13
図 2.2 弦-胴連成モデル.....	20
図 2.3 質点-バネ-ダンパ系 .....	26
図 2.4 想定される実験条件 .....	30
図 2.5 インパルスハンマの概略図 .....	30
図 2.6 ギター胴駒部のアドミタンスの周波数特性 .....	31
図 2.7 ギター弦の 2 次元振動のシミュレーション .....	32
図 2.8 実測された第 6 弦の基本モードの 2 次元振動 .....	33
図 2.9 実測された第 6 弦の基本モードのリサーチ図形 .....	34
図 2.10 歳差運動が起きたときの弦振動の減衰曲線 .....	36
図 2.11 歳差運動が起きたときの弦の 2 次元振動 .....	36
図 2.12 弦の伸びを考慮せず歳差運動が起きたときの初期条件のときの弦振動の減衰曲線 .....	37
図 2.11 弦の伸びを考慮せず歳差運動が起きたときの初期条件のときの弦の 2 次元運動 .....	37
図 2.12 弦の伸びを考慮し初期条件に初期変位のみを与えたときの弦振動の減衰曲線 .....	38
図 2.13 弦の伸びを考慮し初期条件に初期変位のみを与えたときの弦振動の弦の 2 次元振動 .....	38

## 第 3 章

図 3.1 実際のギターを用いた場合の座標系の定義 .....	43
図 3.2 単一の高速カメラを用いる弦の 2 次元振動計測システム .....	43
図 3.3 射影ひずみと $\theta$ の関係 .....	44
図 3.4 撥弦の際の初期条件 .....	44
図 3.5 人工撥弦装置 .....	46
図 3.6 弦の 2 次元横振動の計測結果 .....	48

図 3.7 15 フレーム間の弦の 2 次元横振動の軌跡 .....	49
図 3.8 $u_x$ と $u_y$ のパワースペクトル .....	49
図 3.9 y 方向と z 方向の振動の測定 .....	50
図 3.10 y 方向と z 方向計測の弦の初期条件 .....	50
図 3.11 y 方向と z 方向の振動の計測結果 .....	52
図 3.12 $u_y$ と $u_z$ のパワースペクトル .....	53
図 3.13 撥弦直後の $u_y$ .....	53
図 3.14 高速移動時のマーカ .....	54
第 4 章	
図 4.1 弦の伸びによる復元力を測定する実験系 .....	58
図 4.2 負荷 $w$ と弦の変位 $h$ の関係 .....	58
図 4.3 座標系の定義と実験条件 .....	58
図 4.4 大振幅で撥弦されたときの弦の $x$ 方向の振動のスペクトログラム .....	60
図 4.5 大振幅で撥弦されたときの弦の $y$ 方向の振動のスペクトログラム .....	60
図 4.6 大振幅で撥弦されたときの第 1 次モードの比較 .....	61
図 4.7 小振幅で撥弦されたときの第 1 次モードの比較 .....	62
図 4.8 大振幅で撥弦されたときの第 1 次モードの 2 次元振動 .....	65
図 4.9 伸びを考慮した弦振動モデルに基づいてシミュレートされた大振幅で撥弦され たときの第 1 次モードの 2 次元振動 .....	66
第 5 章	
図 5.1 6 本それぞれの弦につけられたマーカを同時撮影したときの画像 .....	69
図 5.2 関心領域の操作によってそれぞれのマーカを抽出 .....	70
図 5.3 撥弦の際の実験条件 .....	72
図 5.4 第 1 弦から第 6 弦までのそれぞれの $x$ , $y$ 方向の弦振動の計測結果 .....	72
図 5.5 第 1 弦から第 6 弦までのそれぞれの $x$ 方向振動のパワースペクトル ..	73
図 5.6 第 1 弦から第 6 弦までのそれぞれの $y$ 方向振動のパワースペクトル ..	73
図 5.7 第 6 弦の $x$ , $y$ 方向振動の第 1 次, 第 2 次, 第 3 次モード .....	74
図 5.8 撥弦直後から約 20 秒間の第 6 弦の第 3 次モードと第 2 弦の第 1 次モードの減衰 曲線 .....	77
図 5.9 撥弦直後から約 2 秒間の第 6 弦の第 3 次モードと第 2 弦の第 1 次モードの減衰 曲線 .....	78
図 5.10 第 6 弦第 3 次モードの振動軌跡 .....	79
図 5.11 第 2 弦基本モードの振動軌跡 .....	79



# 表 目 次

表 2.1 シミュレーションに用いた物理定数 .....	29
表 2.2 第 3 次モードまでの $x$ 方向, $y$ 方向の固有周波数 .....	30



# 第1章 序 論

## 1.1 研究背景

音楽という人間の文化活動は人間の文明と同じくらい古くから存在してきており、今でも世界の多くの地域で行われている文化活動である。それに伴い、音楽を演奏するための楽器の開発も古くから行われてきており、時代や地域によって多様な楽器がこれまでに開発されてきた。またその音楽と楽器の発展の傍らで、19世紀末に楽器や音楽に対して科学的なアプローチによる研究が Helmholtz によって行われた。その研究ではバイオリンの擦弦時の弦振動を観測する手法が開発され、それによって観測された弦振動は Helmholtz 運動と呼ばれている<sup>[1]</sup>。その後現在まで、このような楽器や音楽を対象とする科学的なアプローチによる研究を行う研究者が現れ、音響学という学問において音楽音響という一つの分野を確立するまでに至った。現在の音楽音響の分野における研究としては音楽という対象に対して、楽器の振動や音波の伝搬に対して機械・振動学的なアプローチや、楽曲情報を対象とした情報工学の技術の応用や、音楽に対する聴取者の心理的影響に対する心理学的なアプローチの研究が行われている。

これまでに行われてきた音楽音響の分野における研究として、楽器の構造を物理計測に基づいてモデル化し、その発音機構を解明する研究が盛んに行われている<sup>[2]</sup>。ここでアコースティックギターは現在でも新しい構造が検討されており<sup>[3]</sup>、物理モデルの貢献するところが大きい。アコースティックギターの代表的な構造を図 1.1 に示す。またギターにおける振動伝達の概略を図 1.2 に示す。図 1.2 において、ギターでは弦の振動によって演奏音を出力し、弦の低周波数の振動は主に表面板、裏板、及び響孔から音として放射され、高周波数の振動は主に表面板から音として放射される。ここでギター胴の表面板の構造を有限要素法でモデリングし、力木の配置による振動特性の違いをシミュレートした研究<sup>[4]</sup>も行われており、物理モデルを楽器製作へ応用することに対して関心が向けられている。このギターの発音機構を表現するための物理モデルにおいて、弦振動を忠実に再現できる弦振動モデルが果たす役割は大きい。ここで弦振動モデル自身は電子楽器における物理モデル音源への応用という観点でも注目されており、また弦振動モデル自身を信号処理の技術として応用する研究<sup>[5]</sup>も行われて

いる。

弦振動は 2 次元の横振動と 1 次元の縦振動によって構成される。これまで 1 次元の弦振動を計算機上で再現する研究<sup>[6]</sup>が行われ、また 2 次元の振動モデルを作成することによって実際の撥弦楽器の演奏音の余韻に見られるうなりまでを表現するモデル<sup>[7]</sup>まで研究されてきた。ピアノのように同じ音高に対して複数の弦が使用される場合、わずかなピッチの相違からうなりを生じることは良く知られている<sup>[8]</sup>。しかし、1 つの音高において 1 本の弦しか用いない場合でも、うなりを生じる場合がある。先行研究では 2 次元の横振動モデルによって弦振動の減衰時における周期的なうなりが再現できることが明らかになっている<sup>[9]</sup>。このモデルは弦の 2 次元横振動の連成現象を考慮しているが、その連成メカニズムは明らかでない。我々は先行研究で実際の弦振動のうなりには非周期的なうなりをもつ場合があることを観測した<sup>[10]</sup>。この現象は前述のモデル<sup>[9]</sup>では再現することができない。この研究結果から著者らは弦の伸びによる非線形性<sup>[11]</sup>を考慮することを検討した。この非周期的なうなりに対して、著者らは弦の 2 次元横振動間に弦の伸長に伴う非線形な復元力を表現した振動子モデルを用いると、初期振幅などの条件によってはうなりが再現されることを確認した<sup>[12]</sup>。

## 1.2 研究の目的

本研究は撥弦楽器における弦の横振動における減衰時の非周期的なうなりを再現できるモデルの構築を目的とする。本研究では弦の伸長に伴う張力変化に起因する非線形性を考慮した弦の運動方程式を使用することで、減衰時の非周期的の発生メカニズムを明らかにする。

## 1.3 本論文の構成

本論文の構成を図 1.3 に示す。本章において研究背景と研究目的について述べた。第 2 章において弦の伸びを考慮した弦振動モデルを示す。またそのモデルによって得られる特徴は弦-胴共振によって得られる弦振動のうなりとはどのように違うのかを述べる。第 3 章においてはモデルの検証において必要な弦振動を計測するための手法について述べる。第 4 章では弦-胴の共振や複数弦の共振を除くため、1 本弦を強固な端点に固定する実験系を作製し、その実験系において振動振幅の違いと弦振動のうなりの違いについて調査した結果を述べる。

第 5 章では第 4 章での知見をもとに実際のギターに張られた弦の振動における振動振幅の違いと弦振動のうなりの違いについて調査した結果を述べる。第 6 章において本研究において得られた結果をもとに結論を述べる。

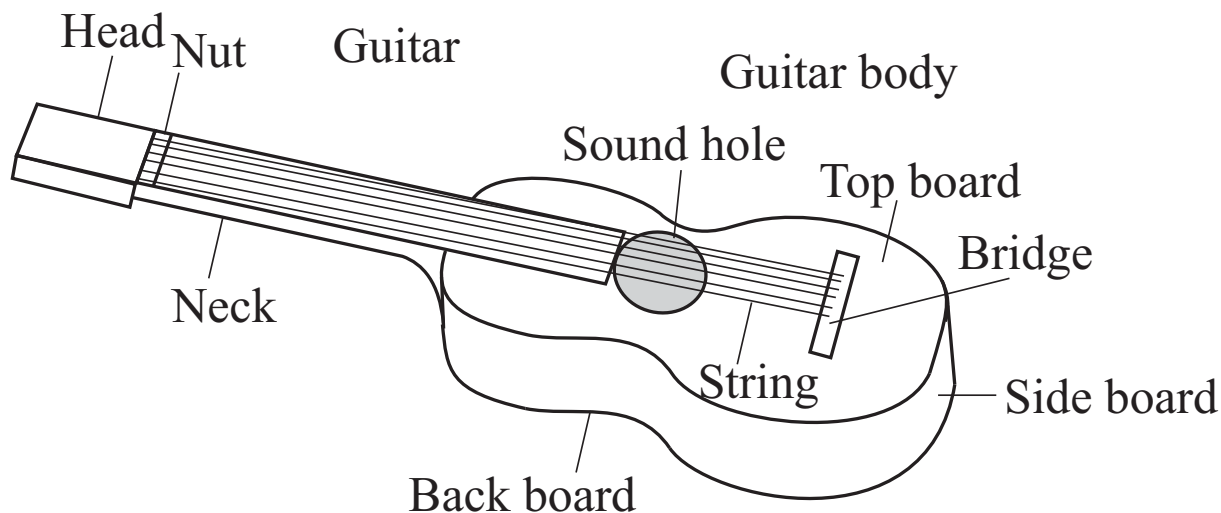


図 1.1 ギターの代表的な構造

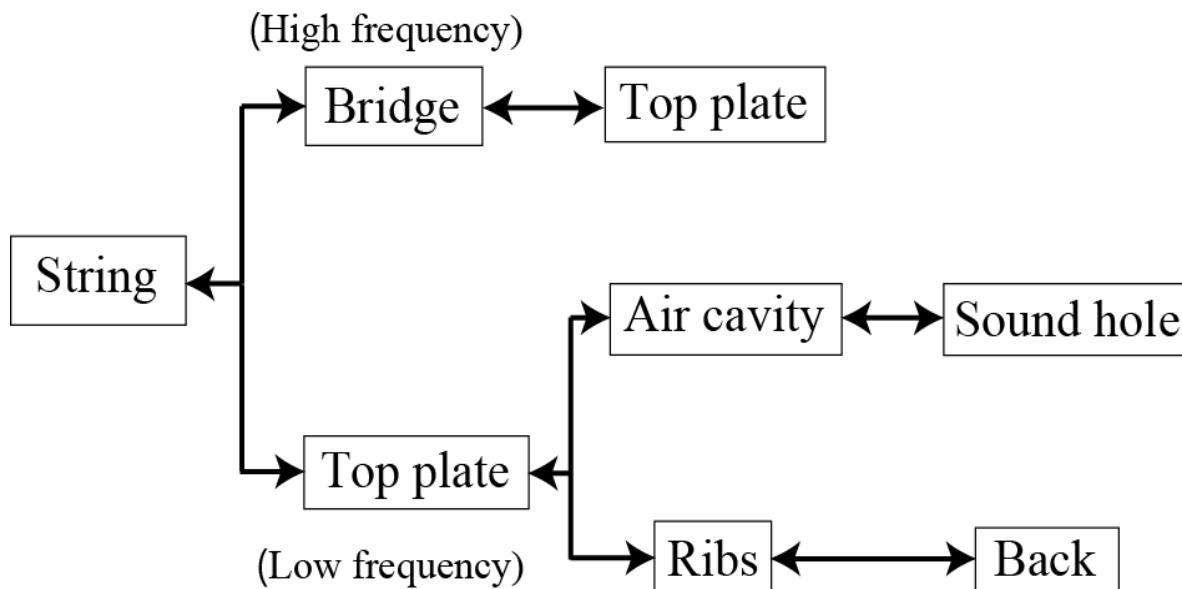


図 1.2 ギターにおける振動伝達

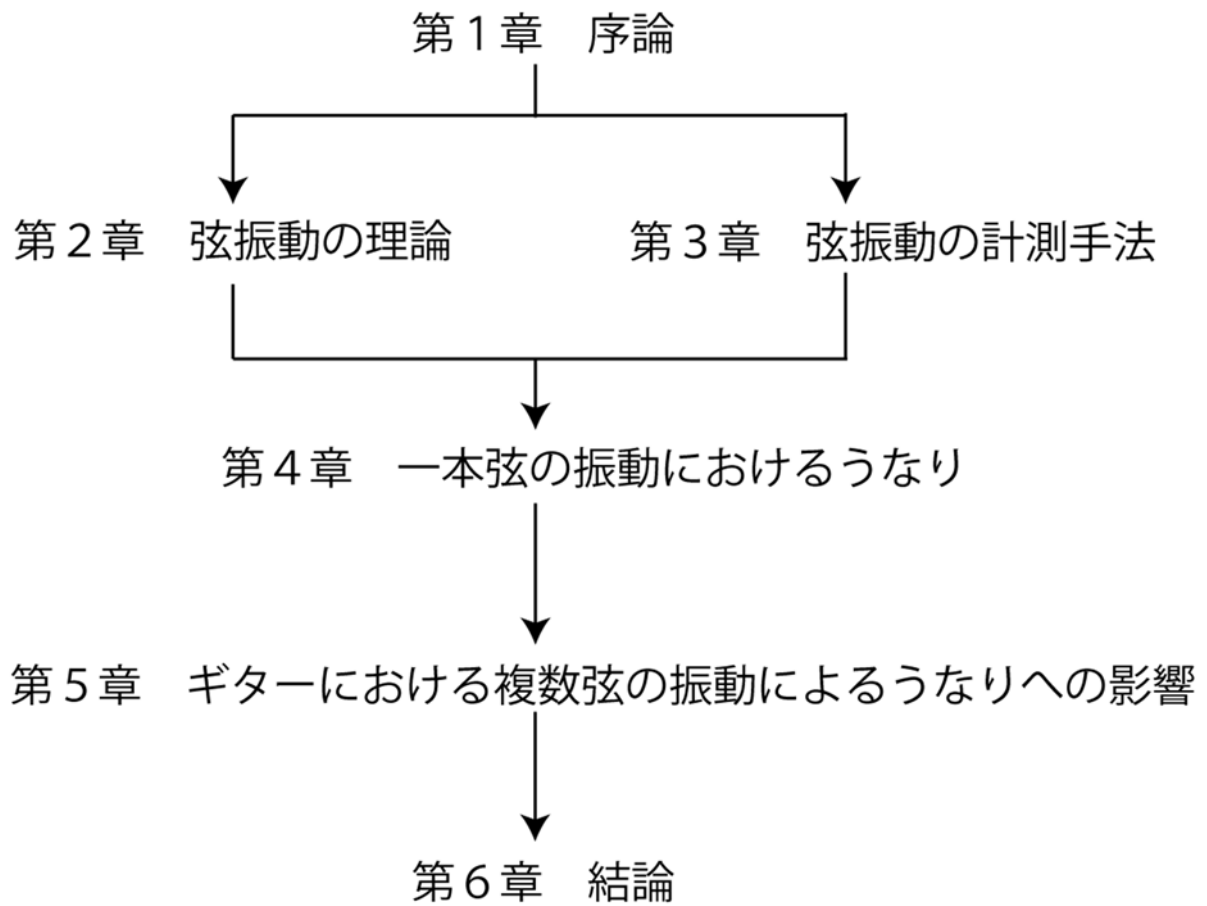


図 1.2 本論文の構成







## 第2章 弦振動の理論

### 2.1 まえがき

弦振動においてうなりが発生するメカニズムについて、本章では先行研究にて述べられてきた理論や自身で導出した理論を用いて考察する。まず 2.2.1 において弦が振動方向において共振周波数が等しい場合にうなりが発生する場合について Anand が導出した大振幅振動時の弦振動の理論<sup>[13]</sup>を用いて考察する。次に 2.2.2 において実際のギターなどの撥弦楽器において共振周波数が等しくない場合にうなりが発生する条件について考察する。2.3 において弦振動においてうなりを発生させる、あるいは振動方向によって共振周波数を変化させる要因となりうる弦-胴共振についての理論を導出する。

### 2.2 伸びを考慮した弦振動モデル

#### 2.2.1 振動方向によって振動周波数が等しい場合

本研究で用いる座標系の定義を図 2.1 に示す。弦長  $l$  に対して、弦が固定される端点の片方を原点とし、水平方向を  $x$  方向、鉛直方向を  $y$  方向、弦に沿う方向を  $z$  方向とする。また弦の平衡点からの  $x$ ,  $y$ ,  $z$  方向の変位をそれぞれ  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  とする。

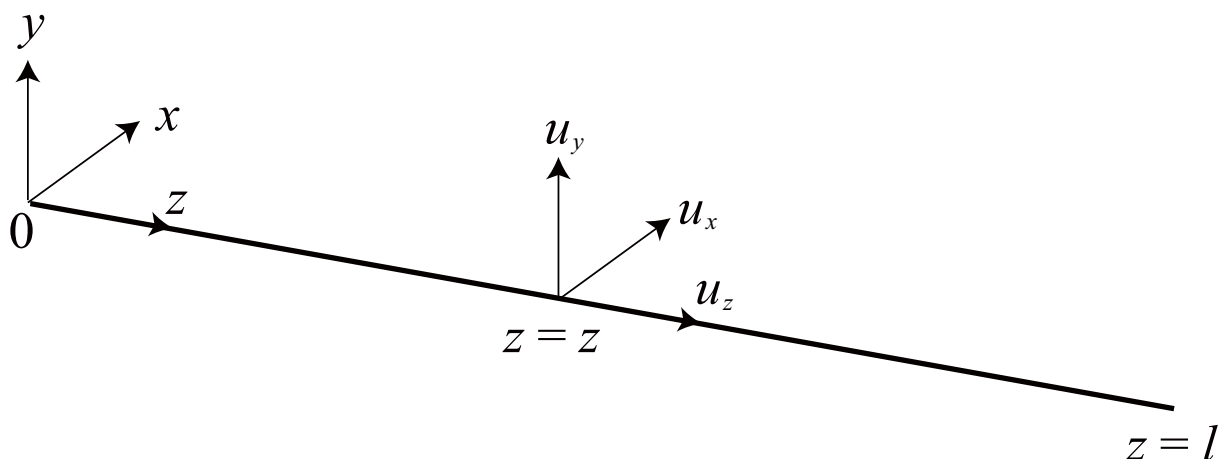


図 2.1 本研究で使用する座標系の定義

ここで点  $z$  における  $z$  軸方向の弦の微小部分を  $\delta z$  とし、それに対応する弦の微小部分を  $\delta s$

とすると、長さ  $\delta s$  は次式で表される、

$$\delta s = \left[ (1 + u_z)^2 + \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \delta z. \quad (2-1)$$

ここで  $u_z$ ,  $\frac{\partial u_x}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial u_y}{\partial z}$  は 1 に比べて非常に小さいので式(1)では次のように近似できる.

$$\delta s = \left( 1 + u_z + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right) \delta z. \quad (2-2)$$

点  $z$  における張力について考える. ここで,  $T_0$  を静止状態の張力,  $E$ ,  $A$  をそれぞれ弦のヤング率と断面積とすると, 弦が伸びたときの張力は,

$$T(z, l) = T_0 + EA \left( \frac{\delta s - \delta z}{\delta z} \right) = T_0 + EA \left( u_z + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right), \quad (2-3)$$

により表される. 張力の  $z$  成分は  $T(1+u_z)\delta x/\delta s$  となるので縦振動の運動方程式は次式になる.

$$m \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ T(1 + u_z) \frac{\delta z}{\delta s} \right]. \quad (2-4)$$

ここで  $m$  は弦の単位当たりの質量である. また式(2-1)より次の近似解が得られる.

$$\frac{\delta z}{\delta s} = 1 - u_z + \frac{1}{2} u_z^2 - \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right). \quad (2-5)$$

式(2-5)においては 3 次以上の高い項を省略してある. さらに式(2-3)と式(2-5)とを式(2-4)に代入し, 高次の項を省略すると次式が得られる.

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{1}{2} (c_1^2 - c_0^2) \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right) = 0. \quad (2-6)$$

式(6)の  $c_0$ ,  $c_1$  は次式で定義され,  $c_0$ ,  $c_1$  はそれぞれ横振動と縦振動の波動の伝搬速度である.

$$c_0 = (T_0/m)^{1/2} \quad c_1 = (EA/m)^{1/2}. \quad (2-7)$$

弦の横振動は空気による粘性抵抗を受けるとし, 抵抗率を  $2R$  とすると  $x$  方向の運動方程式は次式になる.

$$m \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = (\partial/\partial z)(T\delta x/\delta s) - 2Rm \frac{\partial u_x}{\partial t} = (\partial/\partial z) \left( T \frac{\partial u_x}{\partial z} \delta z/\delta s \right) - 2Rm \frac{\partial u_x}{\partial t}. \quad (2-8)$$

ここで式(8)において  $T$  に式(3)を,  $\delta x/\delta s$  には式(5)を代入すると次式が得られる.

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + 2R \frac{\partial u_x}{\partial t} - c_0^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} - (c_1^2 - c_0^2) \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[ \frac{\partial u_x}{\partial z} \left( u_z + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right) \right] = 0, \quad (2-9-1)$$

同様に  $y$  方向に対しても次式が得られる.

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + 2R \frac{\partial u_y}{\partial t} - c_0^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} - (c_1^2 - c_0^2) \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[ \frac{\partial u_y}{\partial z} \left( u_z + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right) \right] = 0. \quad (2-9-2)$$

また通常の弦においては

$$\frac{c_1^2}{c_0^2} = \frac{EA}{T_0} \gg 1. \quad (2-10)$$

であり金属弦ではこの比は 400 ~ 1000 になるので、 $c_1^2$  に対して  $c_0^2$  を省略することができる。このことを考慮すると縦振動と横振動の運動方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{1}{2} c_1^2 \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right) = 0, \quad (2-11-1)$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + 2R \frac{\partial u_x}{\partial t} - c_0^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} - (c_1^2 - c_0^2) \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[ \frac{\partial u_x}{\partial z} \left( u_z + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right) \right] = 0, \quad (2-11-2)$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + 2R \frac{\partial u_y}{\partial t} - c_0^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} - (c_1^2 - c_0^2) \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[ \frac{\partial u_x}{\partial z} \left( u_z + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right) \right] = 0. \quad (2-11-3)$$

ここで横振動においては低い次元の振動モードしか考慮しない場合には式(2-11-1)、式(2-11-2)、式(2-11-3)は簡略化される。式(2-11-1)においてその最後の項は横振動から縦振動への強制振動であり、これによって縦振動が励起される。しかしながら、その強制振動に含まれる周波数が、縦振動の最も低い固有周波数よりも遥かに低いならば縦振動は励起されない。従って、 $\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0$  になり、次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right). \quad (2-12)$$

弦の両端が固定されている条件、

$$u(0, l) = u(l, t) = 0. \quad (2-13)$$

から、式(2-12)を積分すると次式が得られる。

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{1}{2l} \int_0^l \left( \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right) dz. \quad (2-14-1)$$

式(2-14-1)を積分すると次式が得られる。

$$u_z = -\frac{1}{2} \int_0^z \left( \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right) dz + \frac{z}{2l} \int_0^l \left( \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right) dz. \quad (2-14-2)$$

式(2-14-1)を式(2-11-2)、式(2-11-3)に代入すると次の2式が得られる。

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + 2R \frac{\partial u_x}{\partial t} - c_0^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} - \frac{c_1^2}{2l} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \int_0^l \left( \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right) dz = 0, \quad (2-15-1)$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + 2R \frac{\partial u_y}{\partial t} - c_0^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} - \frac{c_1^2}{2l} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \int_0^l \left( \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right) dz = 0. \quad (2-15-2)$$

式(2-15-1)、式(2-15-2)の一般解は次のように固有モードの和で表すことができる。

$$u_x = e^{-Rt} \sum_i X_i(t) \sin(i\pi z/l), \quad (2-16-1)$$

$$u_y = e^{-Rt} \sum_i Y_i(t) \sin(i\pi z/l). \quad (2-16-2)$$

ここで式(2-16-1), 式(2-16-2)を式(2-15-1), 式(2-15-2)に代入すると次式が得られる.

$$\frac{\partial^2 X_n}{\partial t^2} + \left[ \left( \frac{n\pi c_0}{l} \right)^2 - R^2 \right] X_n + \left\{ \sum_i \frac{1}{4} \left( \frac{i n \pi^2 c_1}{l} \right)^2 (X_i^2 + Y_i^2) \right\} X_n e^{-2Rt} = 0, \quad (2-17-1)$$

$$\frac{\partial^2 Y_n}{\partial t^2} + \left[ \left( \frac{n\pi c_0}{l} \right)^2 - R^2 \right] Y_n + \left\{ \sum_i \frac{1}{4} \left( \frac{i n \pi^2 c_1}{l} \right)^2 (X_i^2 + Y_i^2) \right\} Y_n e^{-2Rt} = 0. \quad (2-17-2)$$

弦の初期状態として,

$$u_x(z, 0) = u_{x_0} \sin\left(\frac{i\pi z}{l}\right), \quad \frac{\partial u_x}{\partial t}(z, 0) = \frac{\partial u_{x_0}}{\partial t} \sin\left(\frac{i\pi z}{l}\right), \quad (2-18-1)$$

$$u_y(z, 0) = u_{y_0} \sin\left(\frac{i\pi z}{l}\right), \quad \frac{\partial u_y}{\partial t}(z, 0) = \frac{\partial u_{y_0}}{\partial t} \sin\left(\frac{i\pi z}{l}\right). \quad (2-18-2)$$

になっている場合について考える. ここで  $j$  は正の整数であり, その値は  $c_1/c_0$  に比べて小さい. このことから次のことが成り立つ.

$$Y_i = Z_i = 0, \quad i \neq j. \quad (2-19)$$

ここで添え字を省略して式(2-16-1), 式(2-16-2)を次のように書き換える.

$$u_x = \varepsilon e^{-Rt} X(t) \sin\left(\frac{j\pi z}{l}\right), \quad (2-20-1)$$

$$u_y = \varepsilon e^{-Rt} Y(t) \sin\left(\frac{j\pi z}{l}\right). \quad (2-20-2)$$

式(2-20-1), 式(2-20-2)における  $\varepsilon$  は  $u_x$  と  $u_y$  の振幅で大きい方のものである. またここで次の無次元の量を導入する.

$$p = \frac{\left[ \left( \frac{j\pi c_0}{l} \right)^2 - R^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{j}, \quad k = \frac{R}{jp}, \quad (2-21-1)$$

$$\alpha = \frac{1}{4} \left( \frac{j\pi^2 \epsilon c_1}{pl^2} \right)^2, \quad T = jpt. \quad (2-21-2)$$

式(2-21-1), 式(2-21-2)より式(2-17-1), 式(2-17-2)は以下のようになる.

$$X'' + X + \alpha(X^2 + Y^2)X e^{-2kT} = 0, \quad (2-22-1)$$

$$Y'' + Y + \alpha(X^2 + Y^2)Y e^{-2kT} = 0. \quad (2-22-2)$$

ここでプライム(')は  $T$  に関する微分演算子を表す. また初期条件は次のように表すことができる.

$$X(0) = u_{x_0}, X'(0) = X'_0, Y(0) = 0, Y'(0) = Y'_0. \quad (2-23)$$

また式(2-22-1), 式(2-22-2)において  $X, Y$  を以下の式に示すような形で極座標系に変換する.

$$X = r \cos \theta, \quad (2-24-1)$$

$$Y = r \sin \theta. \quad (2-24-2)$$

式(2-24-1), 式(2-24-2)を式(2-22-1), 式(2-22-2)に代入することで, 最終的に以下の式で示される関係が導かれる.

$$A^2 = \frac{1}{4}(X_0^2 - X_0'^2 - Y_0'^2 + \alpha X_0^4)^2 + X_0^2 X_0'^2, \quad (2-25-1)$$

$$B = \frac{1}{2}(X_0^2 + X_0'^2 + Y_0'^2 - \alpha Y_0^4), \quad (2-25-2)$$

$$g_1 = X_0 Y_0', \quad (2-25-3)$$

$$g_2 = -\frac{1}{2} X_0 Y_0' (B^2 - A^2)^{-\frac{1}{2}} \times \sin^{-1}[(A + B \cos \varphi_0)/X_0^2], \quad (2-25-4)$$

$$\cos \varphi_0 = (X_0^2 - B)/A, \quad (2-25-5)$$

$$r^2 \{A \sin[(2 - \alpha X_0^4/Y_0'^2)(\theta + g_2)] + B\} = B^2 - A^2, \quad (2-25-6)$$

ここで注目したいのが式(2-25-6)であり, 式(2-25-6)より弦の振動を点  $z$  における  $x - y$  平面で観測したときに, 弦の振動の軌跡は楕円が縮小しながら回転する歳差運動を示すことが報告されている<sup>[12]</sup>. またそのとき弦の横振動において振幅の大小によって周期が変化するうなりが発生することもまた理論的に示されている<sup>[13]</sup>. この式(2-25-6)が導出されるにあたっては弦振動において以下のことが考慮されている.

- (1) 弦には振動振幅に起因して伸びが生じる.
- (2) 弦の振動周波数は振動方向によって変化しない.
- (3) 弦の初期条件として初期振幅が与えられる方向と垂直な方向に初期速度が存在する.

ここで条件(2)に注目する. 実際の撥弦楽器では弦の片方の終端を駒で共鳴胴に固定することが一般的である. このことを考慮すると弦は振動方向によって実際は振動周波数が異なるということが起こりうる. すると条件(2)のような, 弦の振動周波数が振動方向によって変化しないという条件は実際の楽器において満たされているとは考えがたい. そこで次節において弦の振動周波数が振動方向によって異なる場合について理論とそれに基づくシミュレーションによって議論する.

### 2.2.2 振動方向によって振動周波数が異なる場合

式(2-15-1), 式(2-15-2)に示した式を元に, 伸びを弦の運動方程式に考慮したときに弦の振動方向によって弦の方向に伝搬する横波の伝搬速度が異なる場合について考察する. 式(2-25-1), 式(2-25-2)において弦の横波の伝搬速度が振動方向によって異なることを以下の式で表わす.

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + b \frac{\partial u_x}{\partial t} - \left[ c_x^2 + \frac{EA}{2\rho} \cdot \frac{1}{l} \int_0^l \left\{ \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right\} dz \right] \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = 0, \quad (2-27-1)$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + b \frac{\partial u_y}{\partial t} - \left[ c_y^2 + \frac{EA}{2\rho} \cdot \frac{1}{l} \int_0^l \left\{ \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right\} dz \right] \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} = 0. \quad (2-27-2)$$

$E$  は弦のヤング率,  $A$  は弦の断面積,  $t$  は時間,  $\rho$  は弦の線密度,  $b$  は減衰定数,  $l$  は弦長 (= 635 mm),  $c_x, c_y$  は振動振幅がないときのそれぞれ  $x, y$  方向の弦の振動速度である. 式 (2-27-1), 式(2-27-2)にはそれぞれ  $u_x, u_y$  が含まれていることから,  $x$  方向と  $y$  方向の振動が独立ではなく結合していることが分かる. ここで,

$$\frac{EA}{\rho} = c_1^2. \quad (2-28)$$

とすると式(2-27-1), 式(2-27-2)は以下のようなになる.

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + b \frac{\partial u_x}{\partial t} - \left[ c_x^2 + \frac{c_1^2}{2l} \int_0^l \left\{ \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right\} dz \right] \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = 0, \quad (2-29-1)$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + b \frac{\partial u_y}{\partial t} - \left[ c_y^2 + \frac{c_1^2}{2l} \int_0^l \left\{ \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right\} dz \right] \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} = 0. \quad (2-29-2)$$

ここで時間  $t$ , 変位  $u_x, u_y, z$  に対して以下のような形で規格化を行う.

$$t = \frac{\sqrt{2}l}{c_1} t^*, \quad (2-30-1)$$

$$u_x = lX, u_y = lY, z = l\zeta, \quad (2-30-2)$$

式(2-30-1), 式(2-30-2)において  $t^*$  は規格化された無次元の時間,  $X, Y, Z$  はそれぞれ弦長  $l$  で規格化された無次元のパラメータである. 式(2-30-1), 式(2-30-2)に基づいて式(2-29-1), 式(2-29-2)を変形させると,

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^{*2}} + \frac{\sqrt{2}bl}{c_1} \cdot \frac{\partial X}{\partial t^*} - \left[ 2 \left( \frac{c_x}{c_1} \right)^2 + \int_0^1 \left\{ \left( \frac{\partial X}{\partial \zeta} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \zeta} \right)^2 \right\} d\zeta \right] \frac{\partial^2 X}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (2-31-1)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^{*2}} + \frac{\sqrt{2}bl}{c_1} \cdot \frac{\partial Y}{\partial t^*} - \left[ 2 \left( \frac{c_y}{c_1} \right)^2 + \int_0^1 \left\{ \left( \frac{\partial X}{\partial \zeta} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \zeta} \right)^2 \right\} d\zeta \right] \frac{\partial^2 Y}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (2-31-2)$$

ここで、以下のようなパラメータを設定する.

$$\frac{\sqrt{2}bl}{c_1} = 2R, \quad (2-32-1)$$

$$v_x = \frac{c_x}{c_1}, \quad v_y = \frac{c_y}{c_1}, \quad (2-32-2)$$

式(2-32-1), 式(2-32-2)を式(2-31-1), 式(2-31-2)に代入すると,

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^{*2}} + 2R \frac{\partial X}{\partial t^*} - \left[ 2v_x^2 + \int_0^1 \left\{ \left( \frac{\partial X}{\partial \zeta} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \zeta} \right)^2 \right\} d\zeta \right] \frac{\partial^2 X}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (2-33-1)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^{*2}} + 2R \frac{\partial Y}{\partial t^*} - \left[ 2v_y^2 + \int_0^1 \left\{ \left( \frac{\partial X}{\partial \zeta} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \zeta} \right)^2 \right\} d\zeta \right] \frac{\partial^2 Y}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (2-33-2)$$

式(2-33-1), 式(2-33-2)の解として次のような固有モードを考える.

$$X = g(t^*) \sin k\pi\zeta, \quad (2-34-1)$$

$$Y = h(t^*) \sin k\pi\zeta. \quad (2-34-2)$$

ここで式(2-34-1), 式(2-34-2)を式(2-29-1), 式(2-29-2)に代入すると次式が得られる.

$$g'' + 2Rg' + 2v_x^2 k^2 \pi^2 g + \frac{1}{2} k^4 \pi^4 (g^2 + h^2) g = 0, \quad (2-35-1)$$

$$h'' + 2Rh' + 2v_y^2 k^2 \pi^2 h + \frac{1}{2} k^4 \pi^4 (g^2 + h^2) h = 0. \quad (2-35-2)$$

ここで(・)は $t^*$ に関する微分を意味する. 式(2-35-1), 式(2-35-2)において第1項から第3項まではそれぞれ独立した減衰を考慮した単振動系のもので扱えるものである. 第4項に非線形なパラメータ励振項が存在し, さらに第4項には $g$ と $h$ に関するクロスタームが含まれている.

このクロスタームにより, それぞれ異なる振動周波数をもつ単振動系が結合し, 振動の減衰過程においてうなりを生じることが考えられる.

## 2.3 弦振動のうなり

### 2.3.1 本研究におけるうなりの定義

振動におけるうなりとは一般的には周期的に振幅が変動する振動を示す。代表的な例としては、周波数が異なる二つの音波を合成したときにそれらの周波数の差に相当する周期で音の強弱が聞こえることがある。しかしながら本研究で扱ううなりはそのような周期的なものではなく、振動振幅の減衰部分において、単調に減衰し続けるものではなく、非周期的な変動を伴うものを「非周期的なうなり」と定義する。

### 2.3.2 弦-胴共振によって発生するうなり

図 2.2 に本項で扱うモデルを示す。このモデルは弦の剛性と空気抵抗による減衰を考慮した 1 次元の弦が端点において質点-バネ-ダンパ系と結合する状況を表しており、弦の  $y$  方向振動のみが胴振動の影響を受けるという条件に対応している。次節において、このモデルで表せられる弦の自由振動における固有周波数を導出するための理論を示す。なお理論の導出にあたっては、剛性を考慮した弦の振動を求めるための理論を記述した Morse の文献<sup>[15]</sup>,

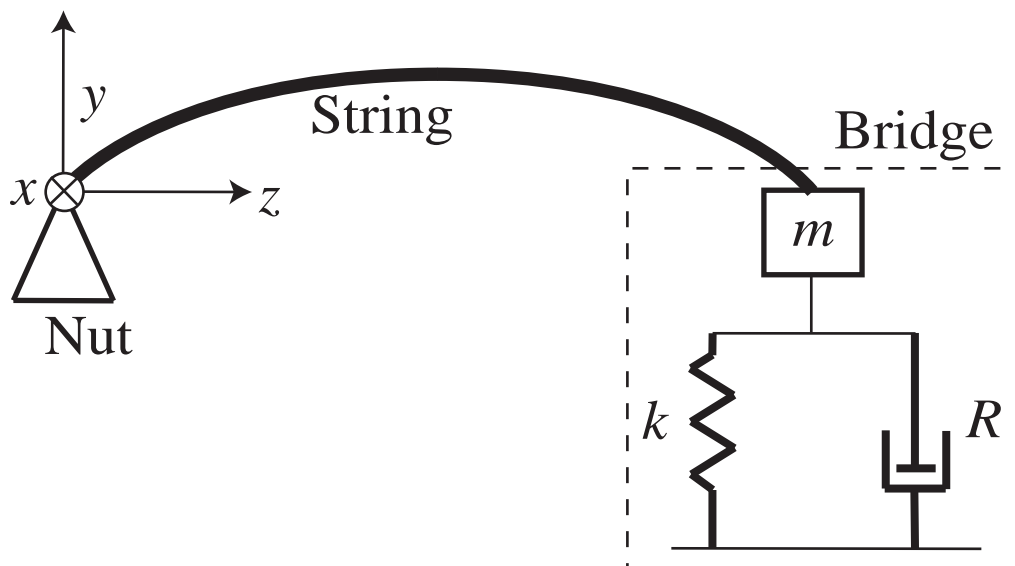


図 2.2 弦-胴連成モデル

高澤らが弦の境界条件に質点-バネ系を与えたときの弦の固有周波数を導出した理論<sup>[16]</sup>および 1 次元波動方程式の解析解を変数分離法によって導出する方法を記述した Kreyszig の文献



[17]を参考にした。

剛性と減衰を考慮した弦を張力がかかった状態の梁としてモデル化した。その弦の運動方程式を次式で示す。ここで、 $y$ : 弦の変位、 $z$ : 弦の位置、 $T$ : 張力、 $\rho$ : 線密度、 $E$ : ヤング率、 $I$ : 断面二次モーメント、 $b_1$ : 減衰定数である。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + 2b_1 \frac{\partial y}{\partial t} = 0. \quad (2-36)$$

弦長を  $l$  とし、 $z=0$  における境界条件を

$$y(0,t) = 0, \quad (2-37-1)$$

$$\frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial z^2} = 0, \quad (2-37-2)$$

$z=l$  における境界条件に図 2.2 に示す質点-バネ-ダンパ系を与えたとき、その境界条件は、

$$m \frac{\partial^2 y(l,t)}{\partial t^2} + R \frac{\partial y(l,t)}{\partial t} + ky(l,t) = -T \frac{\partial y(l,t)}{\partial z}, \quad (2-38-1)$$

$$\frac{\partial^2 y(l,t)}{\partial z^2} = 0, \quad (2-38-2)$$

と記述される。ここで、 $m$ : ギター表面板の駒の位置におけるある振動モードの有効質量、 $R$ : 等価抵抗、 $k$ : 等価バネ定数である。式(2-36)において、 $y(z,t)$ を変数分離法を用いて、

$$y(z,t) = B_{ny} X(z) e^{\alpha t}, \quad (2-39-1)$$

とする。また  $\alpha$  は、

$$\alpha = -(b_1 + b_2) + j\omega, \quad (2-39-2)$$

とする。 $B_{ny}$  は撥弦条件によって決定される定数、 $X(z)$  は境界条件によって決定される関数、 $b_2$  は表面板の振動に起因する減衰率である。また  $\omega$  は胴振動の影響を受けないとき弦振動の角周波数である。この時式(2-36)は、

$$EI \frac{d^4 X(z)}{dz^4} - T \frac{d^2 X(z)}{dz^2} + (\rho \alpha^2 + 2b_1 \alpha) X(z) = 0, \quad (2-40)$$

となる。ここで、

$$\frac{T}{EI} = 2\beta^2, \quad (2-41-1)$$

$$\frac{\rho\alpha^2 + 2b_1\alpha}{EI} = \gamma^4, \quad (2-41-2)$$

とすれば式(2-40)は,

$$\frac{d^4 X(z)}{dz^4} - 2\beta^2 \frac{d^2 X(z)}{dz^2} + \gamma^4 X(z) = 0, \quad (2-42)$$

と変形できる. 式(2-42)において,

$$X(z) = e^{\mu z}, \quad (2-43)$$

とおくと,

$$\mu^4 - 2\beta^2 \mu^2 + \gamma^4 = 0. \quad (2-44)$$

が得られるよって,

$$\mu^2 = \beta^2 \pm \sqrt{\beta^4 - \gamma^4}. \quad (2-45)$$

$$\mu = \pm\mu_1, \pm j\mu_2, \quad (2-46)$$

とすれば,

$$\mu_1^2 = \sqrt{\beta^4 - \gamma^4} + \beta^2, \quad (2-47-1)$$

$$\mu_2^2 = \sqrt{\beta^4 - \gamma^4} - \beta^2. \quad (2-47-2)$$

よって  $X(z)$  は以下のようになる.

$$X(z) = A \cosh \mu_1 z + B \sinh \mu_1 z + C \cos \mu_2 z + D \sin \mu_2 z. \quad (2-48)$$

ここで  $A$ ,  $B$ ,  $C$  および  $D$  は任意定数であり, 境界条件である 4 つの条件, 式(2-37-1), 式(2-37-2), 式(2-38-1), 式(2-38-2)より決定される. 式(2-37-1)より,

$$A + C = 0. \quad (2-49)$$

式(2-37-2)より,

$$\mu_1^2 A - \mu_2^2 C = 0. \quad (2-50)$$

式(2-49), 式(2-50)より,

$$A = C = 0. \quad (2-51)$$

よって式(2-48)は式(2-51)より,

$$X(x) = B \sinh \mu_1 z + D \sin \mu_2 z. \quad (2-52)$$

式(2-52)において, 式(2-38-1)より,

$$B(m\alpha^2 + R\alpha + k) \sinh \mu_1 l + D(m\alpha^2 + R\alpha + k) \sinh \mu_2 l + BT\mu_1 \cosh \mu_1 l + DT\mu_2 \cosh \mu_2 l = 0. \quad (2-53)$$

よって

$$B\{(m\alpha^2 + R\alpha + k) \sinh \mu_1 l + T\mu_1 \cosh \mu_1 l\} + D\{(m\alpha^2 + R\alpha + k) \sinh \mu_2 l + T\mu_2 \cosh \mu_2 l\} = 0. \quad (2-54)$$

式(2-52)において, 式(2-38-2)より,

$$B\mu_1^2 \sinh \mu_1 l - D\mu_2^2 \sin \mu_2 l = 0. \quad (2-55)$$

式(2-54)と式(2-55)は  $B, D$  に関する連立方程式であり,  $B = D = 0$  でない解が存在するためには次の行列式が 0 でなければならない.

$$\begin{vmatrix} (m\alpha^2 + R\alpha + k) \sinh \mu_1 l + T\mu_1 \cosh \mu_1 l & (m\alpha^2 + R\alpha + k) \sinh \mu_2 l + T\mu_2 \cosh \mu_2 l \\ \mu_1^2 \sinh \mu_1 l & -\mu_2^2 \sin \mu_2 l \end{vmatrix} = 0. \quad (2-56)$$

式(2-56)に示す行列式を展開すると,

$$-\mu_2^2 \sin \mu_2 l \{(m\alpha^2 + R\alpha + k) \sinh \mu_1 l + T\mu_1 \cosh \mu_1 l\} - \mu_1^2 \sinh \mu_1 l \{(m\alpha^2 + R\alpha + k) \sinh \mu_2 l + T\mu_2 \cosh \mu_2 l\} = 0, \quad (2-57)$$

となり, 式(2-57)の両辺を  $-\mu_1^2 \mu_2^2 \sin \mu_2 l \sinh \mu_1 l$  で割ると,

$$\frac{(m\alpha^2 + R\alpha + k) \sinh \mu_2 l + T\mu_2 \cosh \mu_2 l}{\mu_1^2 \sinh \mu_2 l} + \frac{(m\alpha^2 + R\alpha + k) \sinh \mu_1 l + T\mu_1 \cosh \mu_1 l}{\mu_2^2 \sin \mu_2 l} = 0, \quad (2-58)$$

$$\frac{m\alpha^2 + R\alpha + k}{\mu_1^2} + \frac{T}{\mu_2} \cdot \frac{1}{\tanh \mu_2 l} + \frac{m\alpha^2 + R\alpha + k}{\mu_2^2} + \frac{T}{\mu_1} \cdot \frac{1}{\tan \mu_2 l} = 0, \quad (2-59)$$

$$\left( \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{\mu_1^2 \mu_2^2} \right) \cdot (m\alpha^2 + R\alpha + k) + \frac{T}{\mu_1} \cdot \frac{1}{\tanh \mu_1 l} + \frac{T}{\mu_2} \cdot \frac{1}{\tan \mu_2 l} = 0, \quad (2-60)$$

式(2-47-1), 式(2-47-2)より,

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 = 2\sqrt{\beta^4 - \gamma^4}, \quad (2-61-1)$$

$$\mu_1^2 \mu_2^2 = \gamma^4, \quad (2-61-2)$$

が導かれるので，式(2-60)は，

$$\frac{2\sqrt{\beta^4 - \gamma^4}}{\gamma^4} (m\alpha^2 + R\alpha + k) + \frac{T}{\mu_1} \cdot \frac{1}{\tanh \mu_1 l} + \frac{T}{\mu_2} \cdot \frac{1}{\tan \mu_2 l} = 0, \quad (2-62)$$

となり，

$$2\sqrt{\beta^4 - \gamma^4} \left( m \frac{\alpha^2}{\gamma^4} + R \frac{\alpha}{\gamma^4} + \frac{k}{\gamma^4} \right) + \frac{T}{\sqrt{2\beta^2 + \mu_2^2}} \cdot \frac{1}{\tanh l \sqrt{2\beta^2 + \mu_2^2}} + \frac{T}{\mu_2} \cdot \frac{1}{\tan \mu_2 l} = 0, \quad (2-63)$$

式(2-61-1)，式(2-61-2)を用いて $\gamma^4$ を消去し，

$$2(\beta^2 + \mu_2^2) \cdot \left( m \frac{\alpha^2}{\mu_2^2(2\beta - \mu_2^2)} + R \frac{\alpha}{\mu_2^2(2\beta - \mu_2^2)} + \frac{k}{\mu_2^2(2\beta - \mu_2^2)} \right) + \frac{T}{\sqrt{2\beta^2 + \mu_2^2}} \cdot \frac{1}{\tanh l \sqrt{2\beta^2 + \mu_2^2}} + \frac{T}{\mu_2} \cdot \frac{1}{\tan \mu_2 l} = 0 \quad (2-64)$$

$\beta^2$ は1または $\mu_2$ と比べてより十分大きい( $\beta^2 \gg 1, \mu_2$ )ので，式(2-64)を

$$\left( m \frac{\alpha^2}{\mu_2^2} + R \frac{\alpha}{\mu_2^2} + \frac{k}{\mu_2^2} \right) + \frac{T}{\mu_2} \cot \mu_2 l = 0. \quad (2-65)$$

と近似する．また式(2-39-2)より，

$$\frac{m(-(b_1 + b_2) + j\omega)^2 + R(-(b_1 + b_2) + j\omega) + k}{\mu_2^2} + \frac{T}{\mu_2} \cot \mu_2 l = 0, \quad (2-66)$$

式(2-66)において実数部分と虚数部分をそれぞれまとめると，

$$\frac{\{m(b_1 + b_2)^2 - m\omega^2 - R(b_1 + b_2) + k\} + j\{-2m(b_1 + b_2)\omega + R\omega\}}{\mu_2^2} + \frac{T}{\mu_2} \cot \mu_2 l = 0, \quad (2-67)$$

となる．虚数部分に注目すると，

$$-2m(b_1 + b_2)\omega + R\omega = 0, \quad (2-68)$$

より，

$$(b_1 + b_2) = \frac{R}{2m}, \quad (2-69)$$

という関係が求まる．式(2-69)を式(2-67)に代入すると，

$$k - \frac{R^2}{4m} - m\omega^2 + \frac{T}{\mu_2} \cot \mu_2 l = 0. \quad (2-70)$$

式(2-70)において,

$$\mu_2 = \frac{\pi p_n}{l}, \quad (2-71)$$

とすれば,

$$T \cot \pi p_n = \frac{l(4m^2 \omega^2 + R - 4mk)}{4m \pi p_n}, \quad (2-72)$$

となる. ここで  $p_n$  は駒部振動の影響を受けるときのモード次数(非整数倍)である. ここで式(2-63)はまた以下のようになる,

$$\cot \pi p_n = \frac{1}{p_n} \left( \frac{\pi n}{\rho l} + \frac{l(R - 4mk)}{4mT\pi} \right). \quad (2-73)$$

一方, 式(2-38-2)において, 式(2-47-2)より,

$$\gamma^4 = 2\beta^2 \mu_2^2 + \mu_2^4, \quad (2-74)$$

という関係が導かれるので, 式(2-41-2)は,

$$\alpha^2 + \frac{2b_1}{\rho} \alpha - \frac{EI}{\rho} (2\beta^2 \mu_2^2 + \mu_2^4) = 0, \quad (2-75)$$

と変形できる. 式(2-75)より  $\alpha$  について求めると,

$$\alpha = -\frac{b_1}{\rho} + j \sqrt{\frac{EI}{\rho} \left( \frac{T}{EI} \mu_2^2 + \mu_2^4 \right) - \left( \frac{b_1}{\rho} \right)^2}, \quad (2-76)$$

となる. ここで虚数部分に注目すると第  $n$  次モードの各周波数  $\omega_n$  が求まる.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho} \left\{ \frac{T}{EI} \left( \frac{\pi p_n}{l} \right)^2 + \left( \frac{\pi p_n}{l} \right)^4 \right\} - \left( \frac{b_1}{\rho} \right)^2}. \quad (2-77)$$

式(2-77)に式(2-73)を満たす  $p_n$  の値を代入すれば  $\omega_n$  が求まり, 第  $n$  次モードの周波数  $f_n$  が次式で求まる.

$$f_n = \frac{f_0 l}{\pi} \sqrt{\left( \frac{\pi p_n}{l} \right)^2 + \frac{EI}{T} \left( \frac{\pi p_n}{l} \right)^4 - \frac{b_1^2}{\rho T}}. \quad (2-78)$$

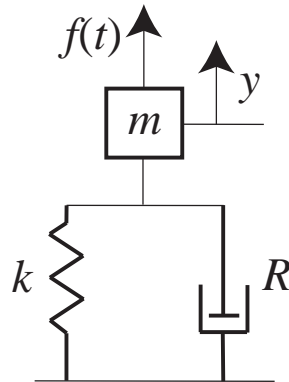


図. 2.3 質点-バネ-ダンパ系

### 2.3.3 駆動点アドミタンスの計測に基づく胴モデルの作成

胴共振特性のモデル化を行うにあたって、本研究では胴駒部の弦が固定されている位置における駆動点アドミタンスの計測に着目した。計測された駆動点アドミタンス(以下 アドミタンス)より、胴駒部のモデルパラメータ値を求める。アドミタンス  $Y(\omega)$  は対象に入力される力  $F(\omega)$  とその力によって加振された対象の速度  $v(\omega)$  を用いて以下の関係から導かれる<sup>[16]</sup>。

$$Y(\omega) = \frac{v(\omega)}{F(\omega)} \quad (2-79)$$

この力  $F(\omega)$  と速度  $v(\omega)$  を測定できれば、胴駒部のアドミタンスが求められる。図. 2.3 に示される質点が外力  $f(t)$  で駆動されるとき運動方程式は次式のようになり、

$$m\ddot{y} + R\dot{y} + ky = f(t), \quad (2-80)$$

この系におけるアドミタンスは次式ようになる<sup>[18]</sup>。

$$Y(\omega) = \frac{1}{R + j(\omega m - k/\omega)} \quad (2-81)$$

式(2-81)よりアドミタンスの計測から、ギター胴の駒部のモデルにおける  $m$ ,  $R$ ,  $k$  が推定できる。それらの値を推定する際には以下の関係式を用いる。

$$\omega = 2\pi f_0, \quad (2-82)$$

のとき、式(2-82)を式(2-81)に代入すると、

$$Y(2\pi f_0) = \frac{1}{R}, \quad (2-83)$$

質点-バネ-ダンパ系の共振ピークの  $Q$  値を  $Q$  とすると

$$m = \frac{QR}{2\pi f_0}, \quad (2-84)$$

$$k = 2\pi f_0 QR, \quad (2-85)$$

ここで  $f_0$  は質点-バネ-ダンパ系の共振周波数で以下の式で示される。

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2-86)$$

2.2.2 にて導出した質点-バネ-ダンパ系を境界条件にもつ弦の固有周波数の数式を基に、胴と結合する弦振動シミュレーションを行う。このシミュレーションにおいて、 $x$  方向振動は胴との連成による影響は受けず、 $y$  方向のみが影響を受けるという条件が設定されている。

$x, y$  方向の撥弦される位置での初期変位をそれぞれ  $h_x, h_y$  とし、モード次数を  $n$  とする。

図 2.4 にシミュレーションにおいて想定される撥弦条件を示す。図 2.3 に示すように弦が弦長  $l (= 650 \text{ mm})$  の  $9/13$  に相当する  $z = 450 \text{ mm}$  の位置で撥弦されるなら、

$$B_{xn} = \frac{169h_x}{18n^2\pi^2} \sin \frac{9n\pi}{13}, \quad (2-87-1)$$

$$B_{yn} = \frac{169h_y}{18n^2\pi^2} \sin \frac{9p_n\pi}{13}, \quad (2-87-2)$$

と定義される  $B_{xn}, B_{yn}$  を用いることによって弦振動のシミュレーションができる。 $y$  方向振動の変位を算出する場合は式(2-40-1)に式(2-87-2)を代入すればよい。また  $x$  方向振動を導出する場合は胴との連成による影響を受けないので、 $x$  方向振動の角周波数を  $\omega_{xn}$  とすると、式(2-78)の右辺において  $p_n$  を  $n$  に置き換える形で、

$$\omega_{xn} = 2f_0 l \sqrt{\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 + \frac{EI}{T} \left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 - \frac{b_1^2}{\rho T}}. \quad (2-88)$$

として  $\omega_{xn}$  を求めた。式(2-87-1)、式(2-87-2)、式(2-88)を用いて第  $n$  次の  $x$  方向、 $y$  方向の振動変位  $x_n, y_n$  を以下のように表した<sup>[7]</sup>。

$$x_n(z, t) = B_{xn} e^{-t/\tau_{xn}} \cos \omega_{xn} t \cdot \sin \frac{2\pi n}{l} z, \quad (2-89-1)$$

$$y_n(z, t) = B_{yn} e^{-t/\tau_{yn}} \cos \omega_{yn} t \cdot \sin \frac{2\pi p_n}{l} z, \quad (2-89-2)$$

ここで $\omega_{yn}$ は式(2-78)より $\omega_n = \omega_{yn}$ として,

$$\omega_{yn} = 2f_0 l \sqrt{\left(\frac{\pi p_n}{l}\right)^2 + \frac{EI}{T} \left(\frac{\pi p_n}{l}\right)^4 - \frac{b_1^2}{\rho T}}, \quad (2-90)$$

とした. また,  $t$ は時間である. また式(2-89-1), 式(2-89-2)における $\tau_{xn}$ ,  $\tau_{yn}$ は弦振動の空気抵抗による減衰の次定数であり, 以下の4つの式で表される.

$$\tau_{xn} = \frac{\rho}{\omega_{xn} \rho_a} \left( \frac{2M_{xn}^2}{2\sqrt{2}M_{xn} + 1} \right), \quad (2-91)$$

$$\tau_{yn} = \frac{\rho}{\omega_{yn} \rho_a} \left( \frac{2M_{yn}^2}{2\sqrt{2}M_{yn} + 1} \right), \quad (2-92)$$

$$M_x = (r/2) \sqrt{\omega_{xn} / \eta_a}, \quad (2-93)$$

$$M_y = (r/2) \sqrt{\omega_{yn} / \eta_a}. \quad (2-94)$$

式(2-89-1), 式(2-89-2)より  $x$  方向,  $y$  方向の弦の変位  $u_x$ ,  $u_y$  は以下で記述される.

$$u_x(z, t) = \sum_n^N x_n(z, t). \quad (2-95-1)$$

$$u_y(z, t) = \sum_n^N y_n(z, t). \quad (2-95-2)$$

$m$ ,  $k$ ,  $R$ の値は胴駒部のアドミタンスの計測をもとに推定した. 実験で使用したギターは Morris W-16である. アドミタンスは, 胴駒部をインパルスハンマで加振し, その応答をレーザドップラ振動計(GRAPHTEC製 AT3600)で計測することによって求めた. 計測の際のサンプリング周波数は100 kHzで計測時間は2秒間である. インパルスハンマは小川らが卒業研究において作製したもの<sup>[18]</sup>を使用した. 図2.5にインパルスハンマの概略図を示す. 柄にはマホガニーの角材を, ハンマの頭には $10 \times 10 \times 15 \text{ mm}^3$ のアルミ片を用いた. アルミ片の一面に圧電素子と樹脂で作られた円錐を貼り付ける. 圧電素子は圧電体を2枚の電極で挟んだもので, 圧電体は外部から加えられた歪みや電荷を打ち消すように電荷や歪みを生ずる特性を有する. この特性を利用し, ハンマ先端の歪みを電荷に変換する事でハンマ先端に加わった力を計測する. 図2.6にアドミタンスの周波数特性を示す. 弦の基本周波数 $f_0$ が82.4 Hzだったため, 99.5 Hzに見られる共振ピークが弦振動に大きく影響すると考え, そのピーク値とQ値



から、式. (2-75), 式. (2-76), 式. (2-77)を用いて $m$ ,  $k$ ,  $R$ の値を算出した. また $h_x$ ,  $h_y$ の値は次章で示す弦振動の計測結果から弦の初期変位を求めることによって決定した.

図 2.7 にシミュレーション結果を示す. (a)から(d)は撥弦直後からの時間経過に対応しており, また図中矢印はその時の弦の回転方向を示す. 図 2.7 (a)において時計回りで直線の形で回転していた軌跡が, 図 2.7 (b)において 8 の字のような捻じれた形を経て, 反時計回りに回転する楕円の軌跡へと変化した. 図 2.7 (c)から図 2.7 (d)への時間帯においても同様の現象が見られる. この回転方向の変化は  $x$  方向と  $y$  方向の固有周波数が異なるという状態に起因しており, その違いは弦の  $x$  方向と  $y$  方向の端点における境界条件がそれぞれ異なることに由来する.

弦の  $y$  方向の境界条件に質点-バネ-ダンパ系を与えることにより, 胴と連成振動するギター弦の 2 次元振動モデルを作成した. アドミタンスの計測に基づき質点-バネ-ダンパ系のパラメータを決定し, 胴と連成する弦振動のシミュレーションを行った. シミュレーションでは  $x$  方向と  $y$  方向において固有周波数が異なるという状態が表現されていることが確認できた. また第 3 次モードまでの  $x$ ,  $y$  方向の振動周波数を 表 2.2 に示す.

表 2.1 シミュレーションに用いた物理定数

記号	定数名	数値	単位
$f_0$	基本周波数	82.4	Hz
$L$	弦長	0.650	m
$T$	張力	1	N
$r$	弦の半径	$0.6 \times 10^3$	m
$\rho$	弦の線密度	$6.5 \times 10^{-3}$	kg/m
$\rho_a$	空気の密度	1.2	kg/m <sup>3</sup>
$\eta_a$	空気の動粘性係数	$15 \times 10^{-6}$	m <sup>2</sup> /s
$h_x$	$x$ 方向の初期変位	$0.31 \times 10^{-3}$	m
$h_y$	$y$ 方向の初期変位	$1.7 \times 10^{-3}$	m
$N$	モード数	10	なし
$E$	弦のヤング率	110	GPa
$I$	弦の断面二次モーメント	$2.0 \times 10^{-15}$	m <sup>4</sup>
$m$	ギター胴駒部の有効質量	$1.4 \times 10^{-3}$	kg
$k$	等価弾性係数	$0.56 \times 10^3$	N/m
$R$	抵抗	0.04	Ns/m

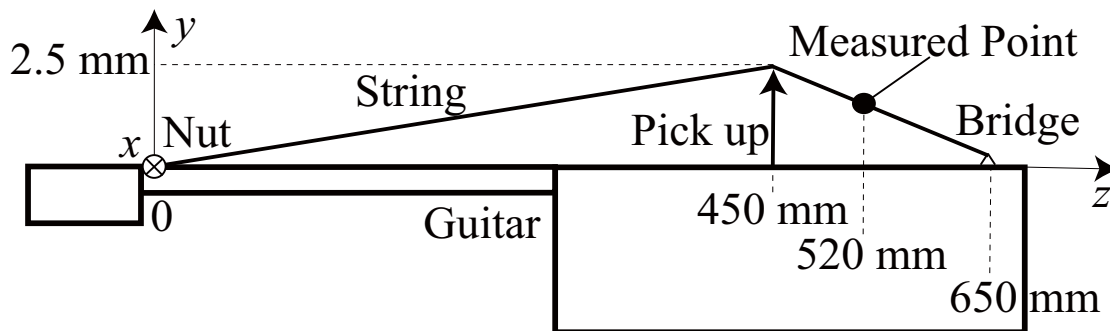


図 2.4 想定される撥弦条件

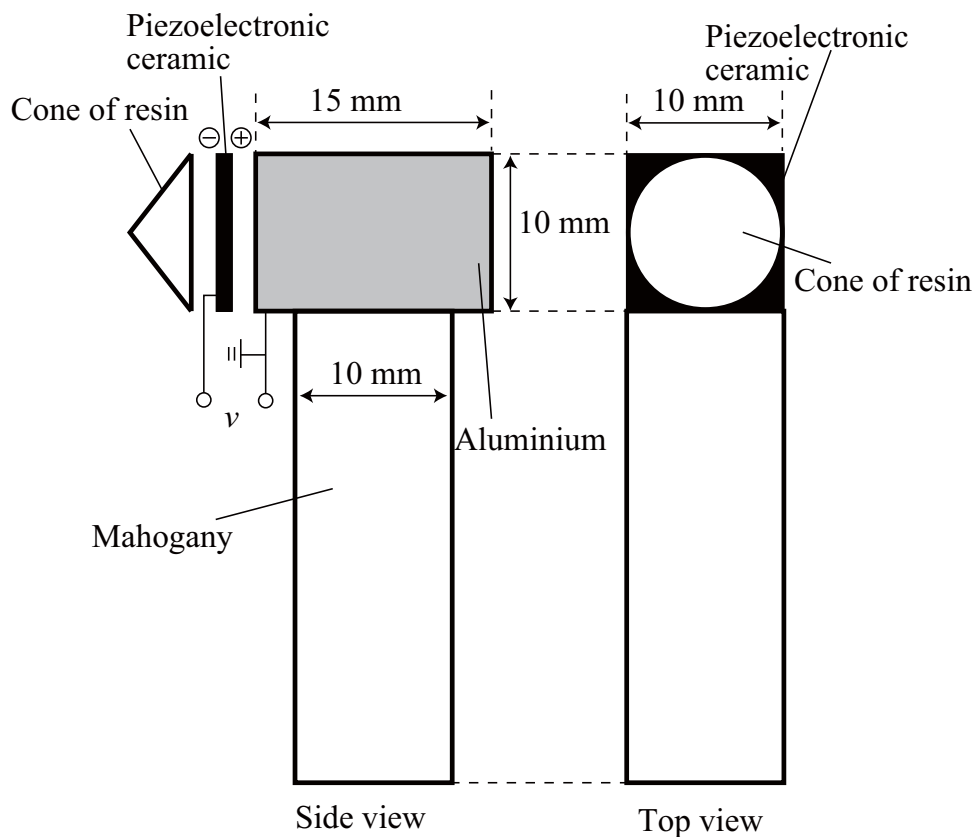


図. 2.5 インパルスハンマの概略図

表 2.2 第 3 次モードまでの  $x$  方向,  $y$  方向の固有周波数

モード次数	実測結果 (Hz)		計算結果 (Hz)	
	$x$ 方向	$y$ 方向	$x$ 方向	$y$ 方向
1	82.6	82.4	82.6	82.4
2	165.0	165.0	166.0	165.0
3	247.5	247.9	248.8	248.1

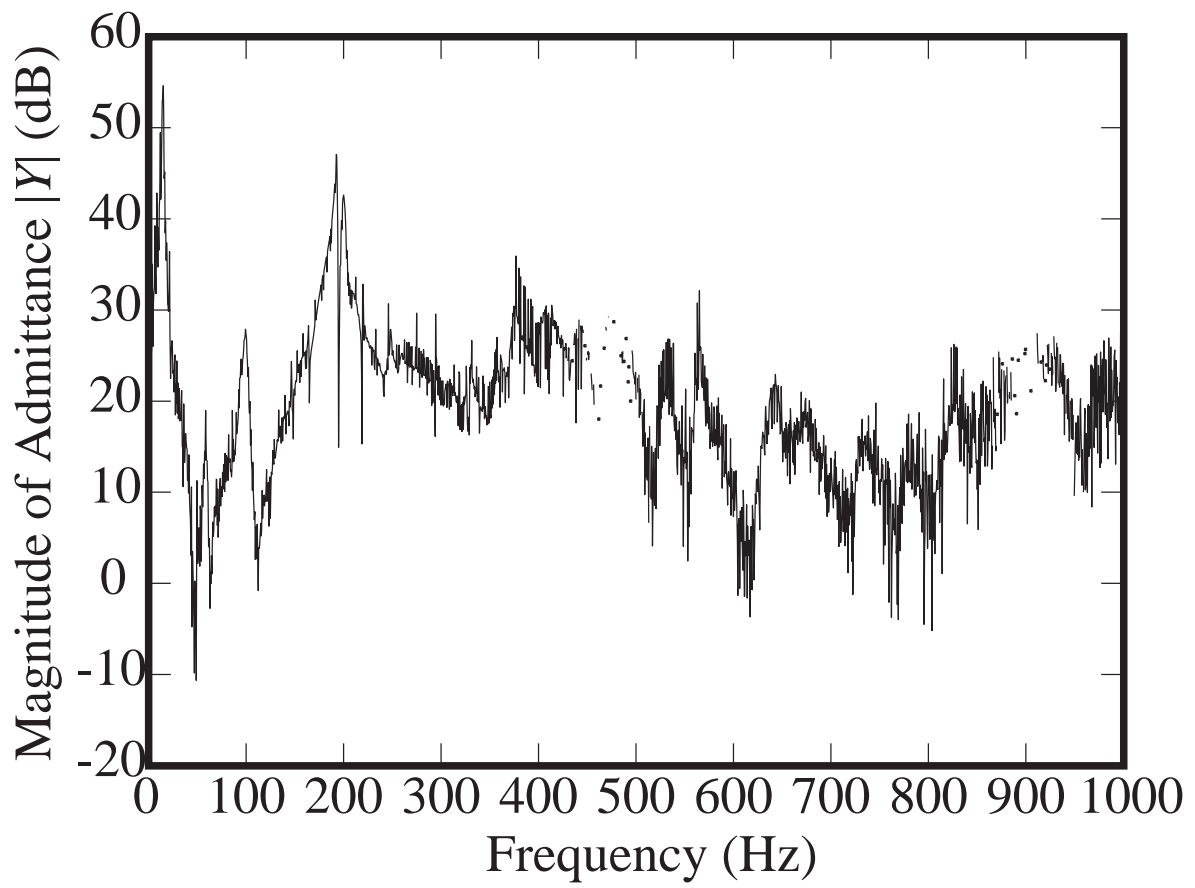


図.2.6 ギター胴駒部のアドミタンスの周波数特性

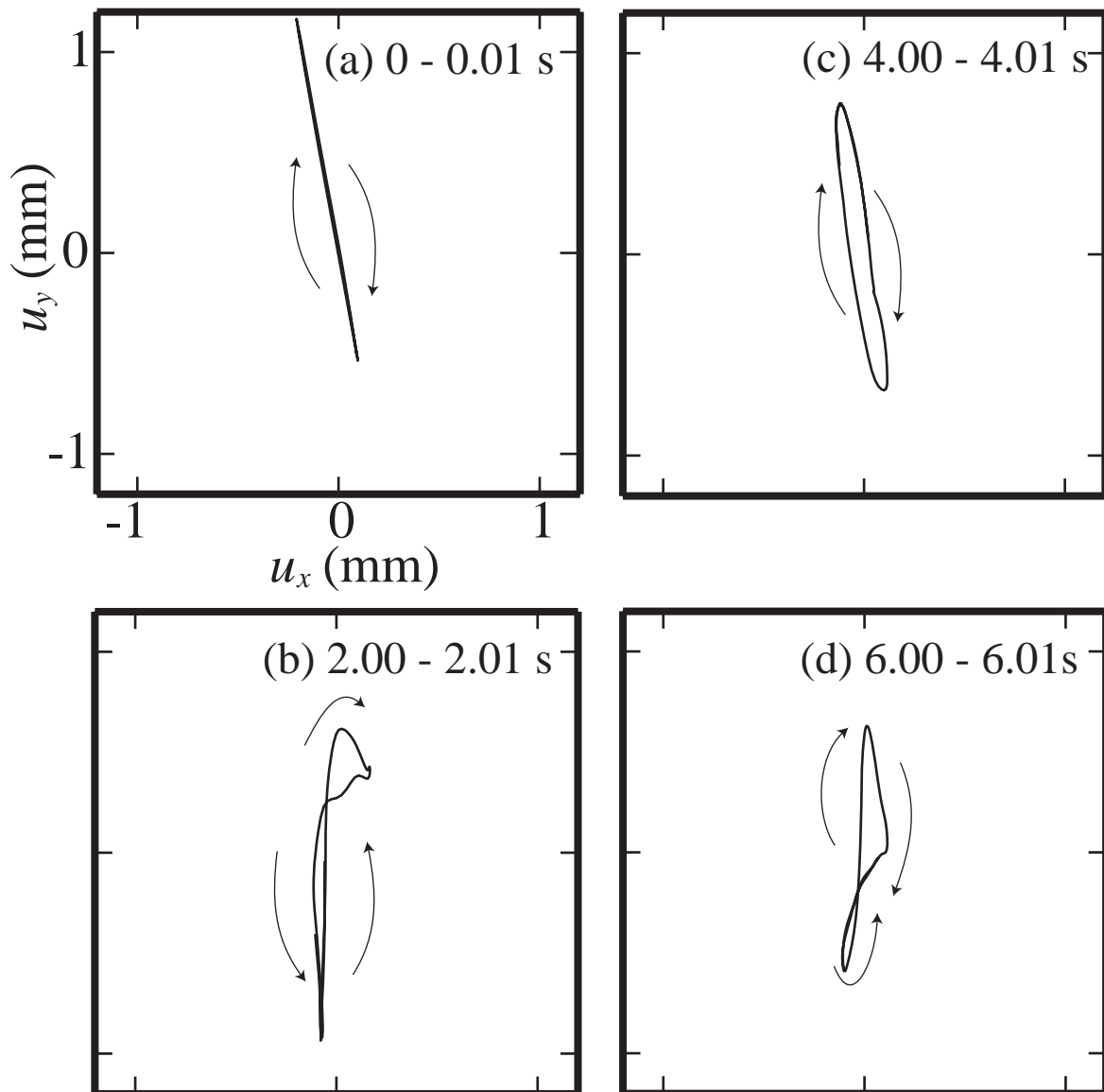


図 2.7 ギター弦の 2 次元振動のシミュレーション

図 2.8 に実測された弦の 2 次元振動から抽出された基本モードを示す。図 2.8 (a)は  $x$  方向の基本モード、図 2.8 (b)は  $y$  方向の基本モードの振動である。本項にて構築した弦-胴連成モデルでは  $y$  方向の振動において弦と胴が共振することを表現しているが、図 2.8 (a)において胴とは連成しないと考えている  $x$  方向においてもうなりが観測されている。この現象は本項で使用した弦-胴連成モデルでは表現できない現象である。図 2.9 に基本モードの 2 次元振動のリサーチ図形を示す。図 2.9 (a) ~ (d)に示す図形はそれぞれの時間帯において約 1 周期分の軌跡をプロットしている。図 2.9 (a)において図形の軌跡は時計回りに回転する楕円の軌跡を示した。その後、図 2.9 (b)において図形の形状は円形に近い軌跡に変化し、図 2.9 (c)においては水平方向に長い形の時計回りの軌跡を示し、図 2.9 (d)において反時計回りに回転する軌跡に変化した。この図 2.9 (c)から図 2.9 (d)にかけての回転方向の変化したことから、 $x$ 、 $y$  方向間に位相差が発生したことが分かる。

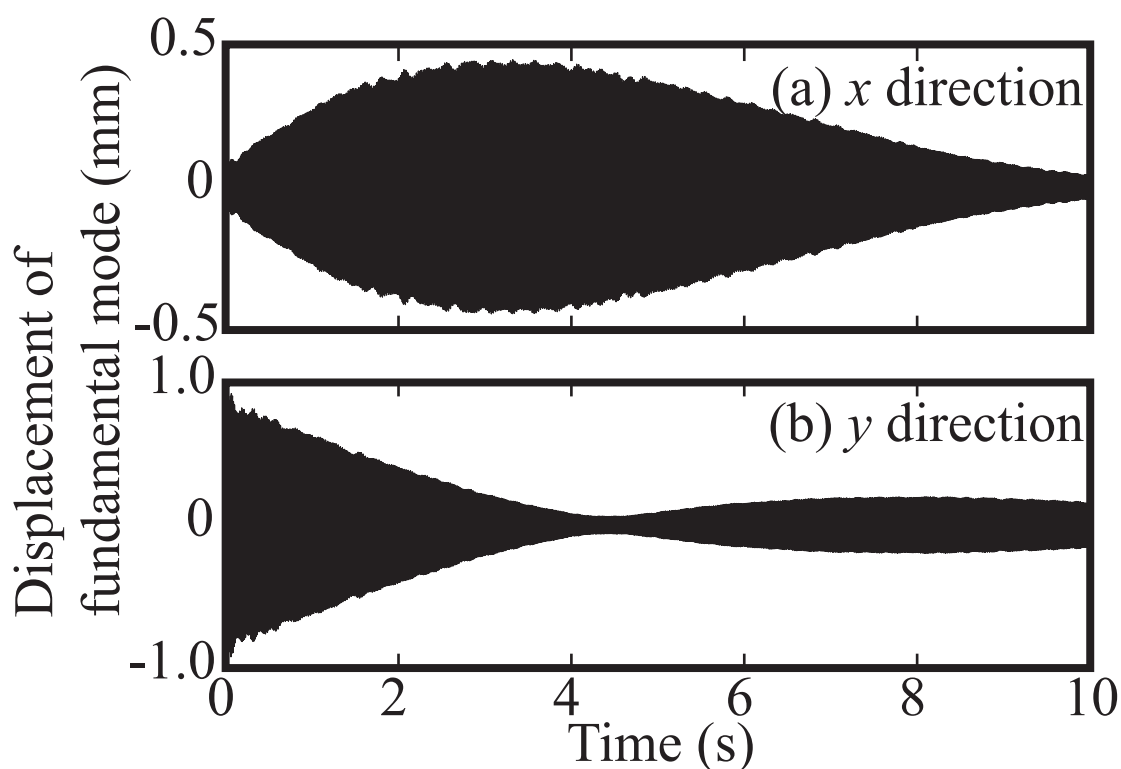


図 2.8 実測された第 6 弦の基本モードの 2 次元振動

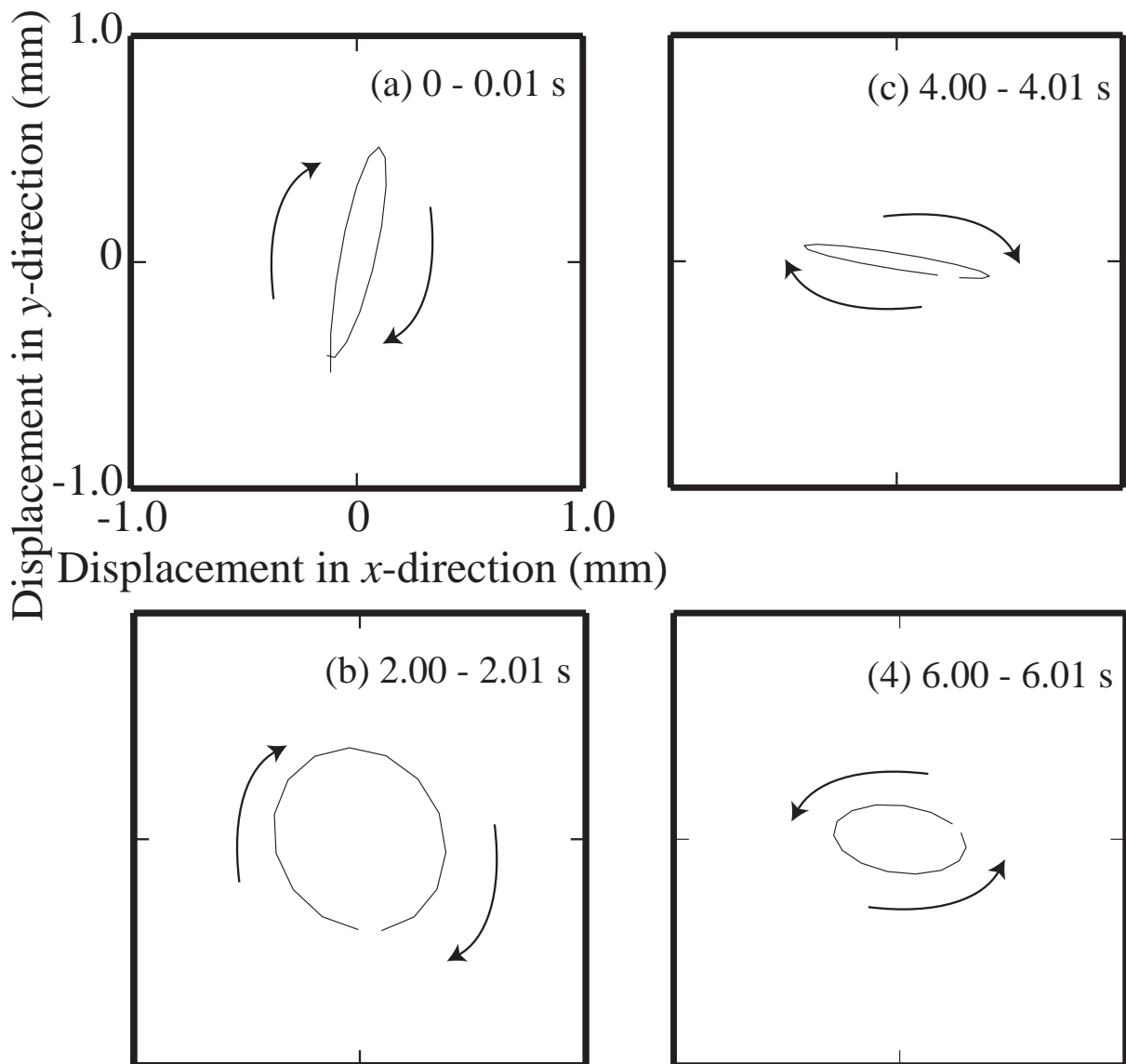


図 2.9 実測された第 6 弦の基本モードのリサージュ図形

#### 2.3.4 弦の伸びに起因するうなり

式(2-27-1)・式(2-27-2)に基づき弦の伸びに起因する非線形的な復元力に起因する弦振動のうなりについて述べる。またこの弦の伸びを考慮した場合、弦の 2 次元振動において  $x$ - $y$  平面でリサージュ曲線を作成するとその軌跡は歳差運動を示すことが理論的に報告されている<sup>[6,7]</sup>。しかしながら、これまで弦振動を実測した報告では実際にその歳差運動を観測したという例はない。本節ではいくつかの場合を取り上げ、実際の弦振動において起こりうる状況も考慮しながら、非周期的なうなりを表現するために必要な条件について議論する。

図 2.10 に弦の 2 次元振動において歳差運動が起きているときの弦振動の減衰曲線((a)は  $x$  方向振動成分, (b)は  $y$  方向振動成分), 図 2.11 にそのときのリサージュ図形を示す. 図 2.10 の減衰曲線においては振幅の減衰に伴うなり周期が変化していくことが示されている. 図 2.11 からは弦の 2 次元振動が歳差運動を示していることが確認される. この軌跡は弦に伸びによる復元力を考慮した条件で, 弦に初期変位だけでなく初期速度を  $x$  方向に与えた条件にて示された結果である. 図 2.12 に図 2.10 と同じ初期条件でありながら弦の伸びによる非線形な復元力を考慮しなかった場合の減衰曲線, 図 2.13 にそのときのリサージュ図形をそれぞれ示す. 図 2.10 にて見られるようなうなりは図 2.12 では観測されなかった. 図 2.14 に初期変位のみを考慮し, 初期速度のみを与えなかったときの弦振動の減衰曲線, 図 2.15 にリサージュ曲線を示す. このときには減衰曲線において振幅の減少に伴うなりの周期が変化する特徴が示されており, 図 2.15 のリサージュ曲線では歳差運動が示されていない. これらのことから先行研究で示されている歳差運動は弦振動の初期条件のうち, 初期変位を  $x, y$  方向それぞれに与えた条件で  $x$  方向にのみ初期速度を与えたことに起因していることが考えられる.

これらのことから第 4 節実験の条件と照らし合わせたうえで実際の弦振動の減衰過程における非周期的なうなりを表現するうえで, 弦の伸びを考慮することの妥当性を検討する.

## 2.4 まとめ

弦の伸びによる非線形的な復元力を考慮した弦振動モデルについて述べた. 弦振動のうなりが発生する要因として, 弦-胴共振が寄与する場合について検討し, そのときには周期的なうなりを生じることを述べた. また弦の伸びを考慮した場合, どのようなうなりの特徴が表現可能であるかを検証し, 実際の弦振動において想定されうる初期条件を考慮すれば弦の伸びを考慮したモデルによって振動振幅に伴って周期が変化するうなりが表現可能であることを確認した.

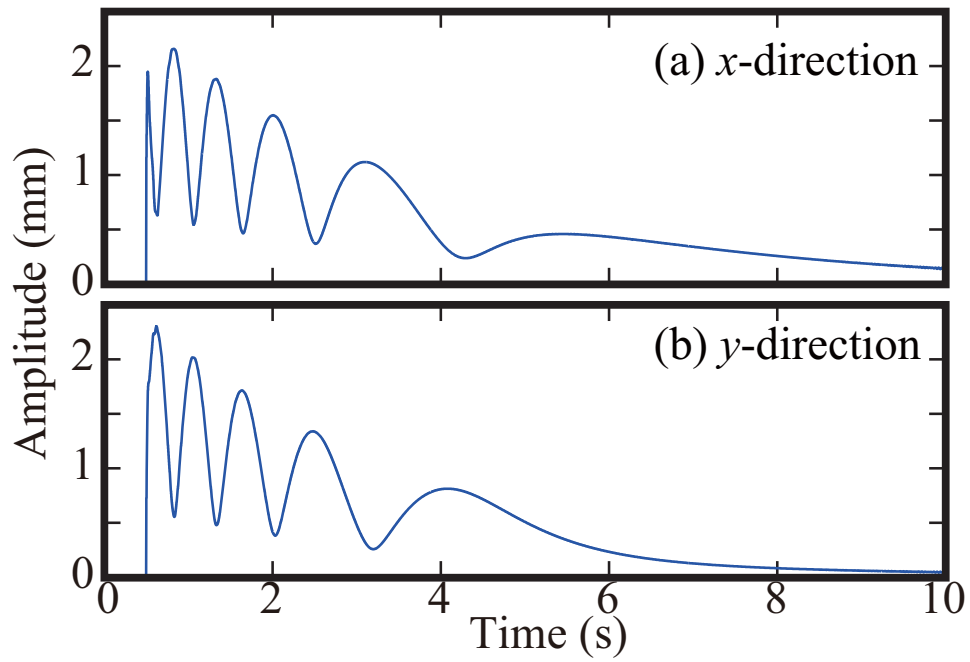


図 2.10 歳差運動が起きたときの弦振動の減衰曲線

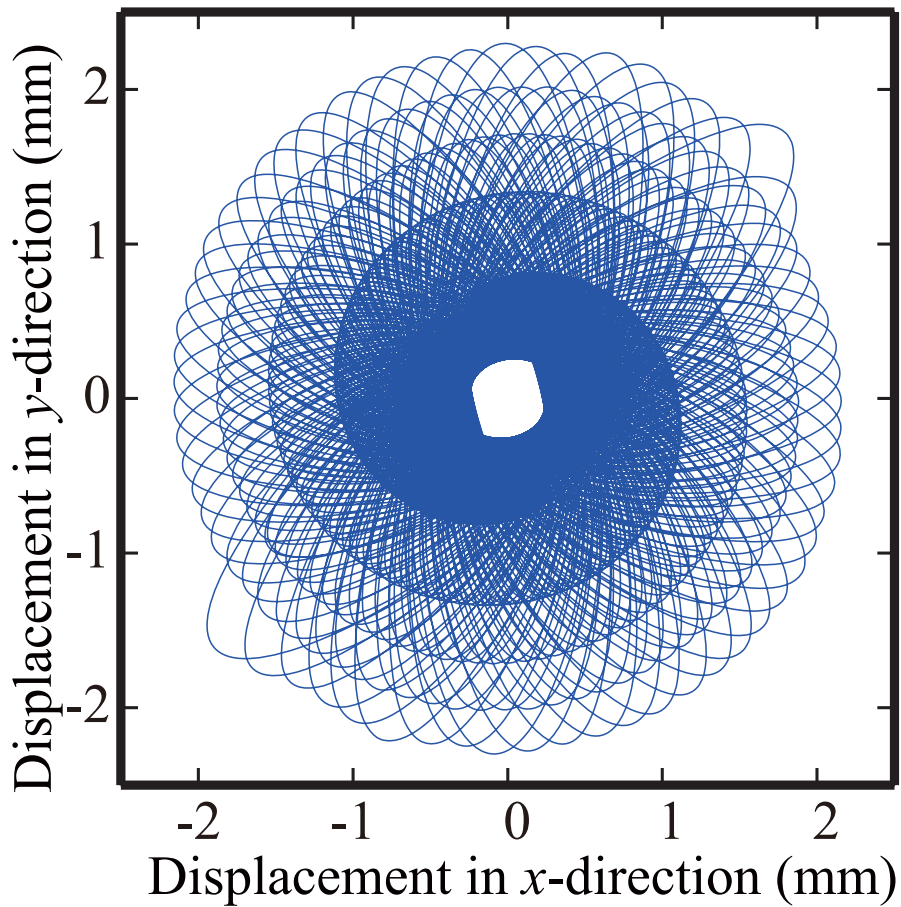


図 2.11 歳差運動が起きたときの弦の2次元振動



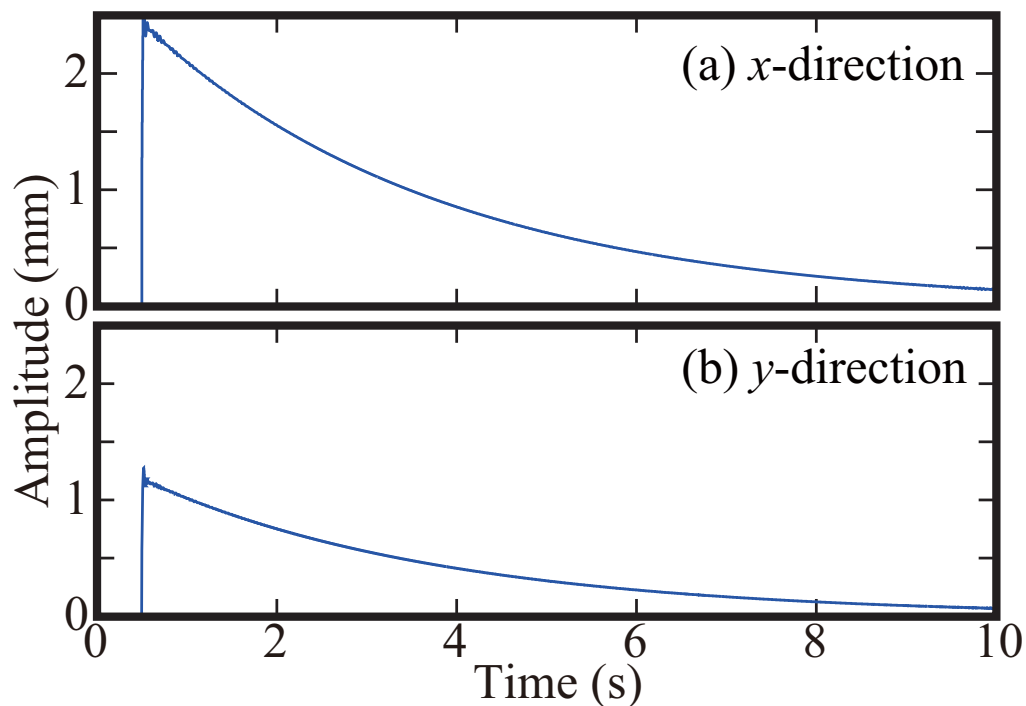


図 2.12 弦の伸びを考慮せず歳差運動が起きたときの初期条件のときの弦振動の減衰曲線

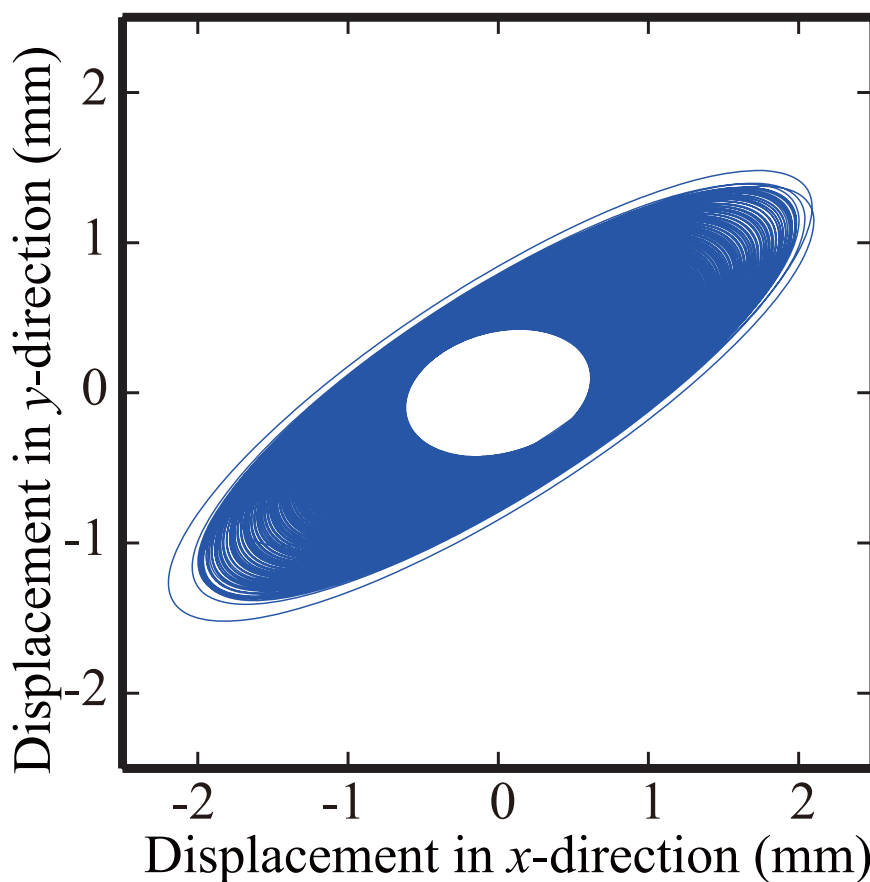


図 2.12 弦の伸びを考慮せず歳差運動が起きたときの初期条件の弦の 2 次元振動

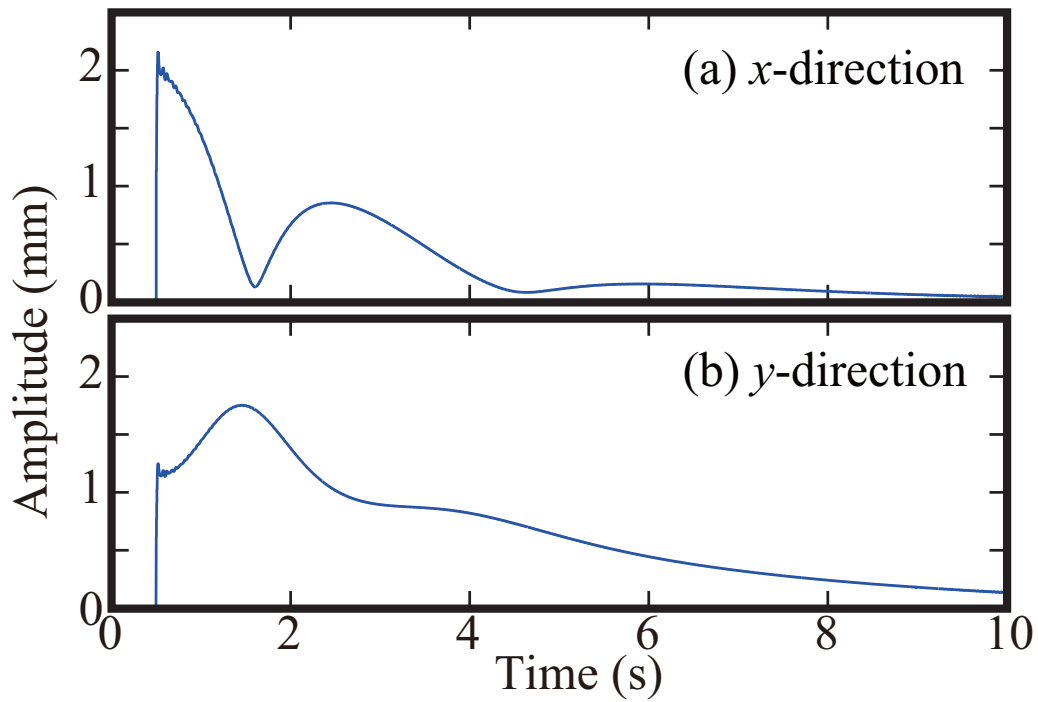


図 2.13 弦の伸びを考慮し初期条件に初期変位のみを与えたときの弦振動の減衰曲線

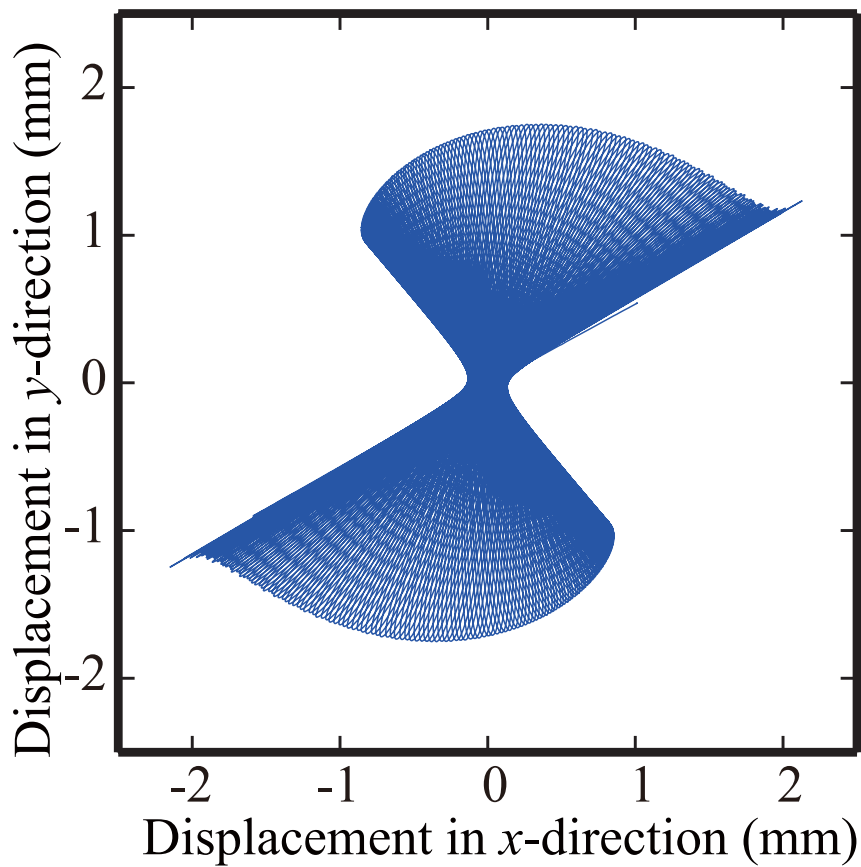


図 2.14 弦の伸びを考慮し初期条件に初期変位のみを与えたときの弦の 2 次元振動





## 第3章 弦振動の計測手法

### 3.1 まえがき

第2章において述べた弦振動モデルの妥当性を検証するためには実際の弦振動を計測する必要がある。第3章ではそのための弦振動の計測システム<sup>[20]</sup>の構成を示し、そのシステムを評価した結果を示す。本計測システムは単一の高速度カメラを用いて弦の2次元の横振動を非接触で計測するものである。本節ではその計測システムを作成するに至った理由を述べる。

これまで弦振動を計測する手法として、電界センサ<sup>[21]</sup>、光学的変位センサ<sup>[22-24]</sup>、ピエゾ素子を用いる力センサ<sup>[25]、[26]</sup>が用いられてきた。電界センサ<sup>[21]</sup>は電磁誘導の原理を利用して弦振動の速度を計測する手法である。この手法は弦振動の非接触計測を実現しているものの、計測できる弦の材質が金属であるものに限定され、ガット弦やナイロン弦の振動は計測できない。田中<sup>[22]</sup>は光プローブをピアノに取り付けることによってピアノ弦の2次元の横振動を非接触で計測することを実現している。しかしながらアコースティックギターの場合、弦と表面板の隙間はピアノと比べて非常に狭く、その装置を取り付けることは難しい。Lee<sup>[23]</sup>らはギター弦の2次元振動を田中と同様の手法で計測しているが、Leeらは計測装置をギター胴の内部に取り付けている。Hanson<sup>[24]</sup>は駆動された弦の振動をLEDと光センサを組み合わせたデバイスを用いて計測している。しかしながらアコースティックギターの弦振動を計測する場合においては田中<sup>[22]</sup>の用いた装置の場合と同様に、ギター自身にその装置を取り付ける十分な空間が無いので、ギターに取り付けるのは難しいと考えられる。他の光学的計測手法としては高速度カメラを用いるモーショントラッキングがある。この手法は人間の運動を計測するために使われている<sup>[27]</sup>が、同様の手法を応用すれば弦振動も計測可能になる。この手法を利用した例として、徳弘らはいくつかのテンプレート画像と同期された3台の高速度カメラを用いて弦の2次元の横振動とねじれ振動を計測する手法を提案している<sup>[28]</sup>。この手法においては、複数のカメラの同期が必要であり、それらを完全に同期させるための装置がさらに必要となる。Chadefauxらはハープ弦の2次元の横振動を1台の高速度カメラと1枚の鏡を用いて計測している<sup>[29]</sup>。この手法では鏡の使用が必要になる。力センサに関しては、徳弘らが力センサを用いて弦がギターの駒部に与える振動を計測するため、センサを取り付けられるようアコースティックギターを加工している<sup>[28]</sup>。我々はこれまでの研究成果<sup>[20]</sup>にて、

高速度カメラをギター弦に対して斜めに撮影するように配置し、弦に施したマーキングを動画像においてトラッキングすることによって、弦の2次元の横振動を単一の高速度カメラを用いて非接触で計測する手法を提案した。

## 3.2 計測原理

### 3.2.1 計測システム

本手法では単一の高速度カメラを使用する。弦の表面にマーキングされたマーカの振動を高速度カメラで撮影した後に、画像の重心位置を算出することによってマーカの位置を検出する。その際にはマーカを撮影した画像の輝度情報を利用するためグレースケール画像に変換する。グレースケールと重心を用いることで1ピクセル未満の分解能で座標を求めることが可能である。マーカのトラッキングは画像の重心位置の算出によって行う。

### 3.2.2 画像上の位置から弦の変位への座標変換

図 3.1 に本実験で用いる座標系の定義を示す。弦を固定している位置を原点とし、表面板に水平な方向を  $x$ 、垂直な方向を  $y$  とし、弦に沿った方向を  $z$  とし、弦の  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向の変位はそれぞれ  $u_x$ 、 $u_y$ 、 $u_z$  とする。また画像上における座標系は図 3.2 に示すように、 $\tilde{x}$ 、 $\tilde{y}$  を定義し、それぞれの方向の変位を  $u_{\tilde{x}}$ 、 $u_{\tilde{y}}$  とする。実座標系と画像上の座標系の対応は図 3.2 の通りに示す。ここで弦の縦振動の変位  $u_z$  が  $u_{\tilde{y}}$  に含まれているが、 $u_z$  が弦の  $y$  方向の変位、 $u_y$  に比べて十分に小さければ、縦振動の影響は無視することができる。座標変換において、図 3.2 より  $u_y$  と  $u_{\tilde{y}}$  の関係は、

$$u_{\tilde{y}} = u_y \cos \theta, \quad (3-1)$$

であり、 $u_x$  と  $u_{\tilde{x}}$  の関係は、

$$u_{\tilde{x}} = u_x, \quad (3-2)$$

である。これらの関係から画像上のマーカの位置を弦の2次元振動の変位に換算する。

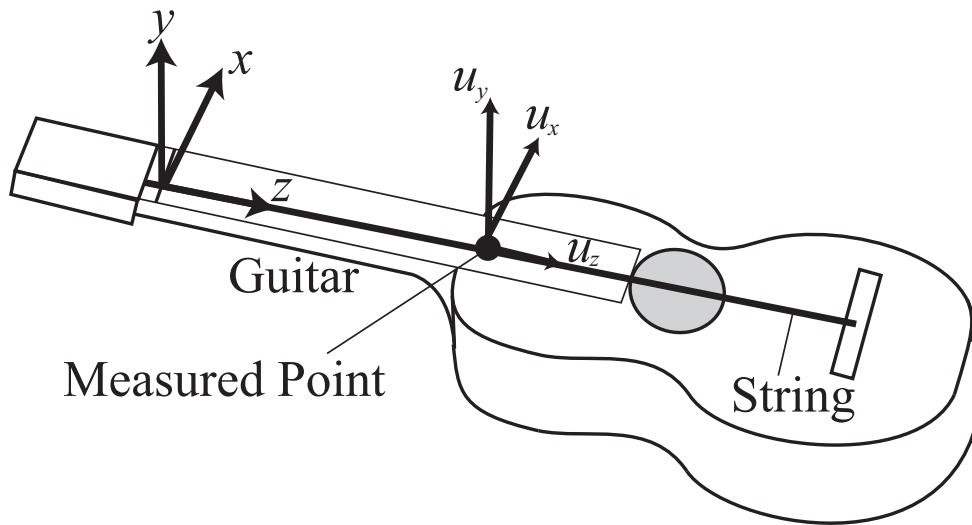


図 3.1 実際のギターを用いた場合の座標系の定義

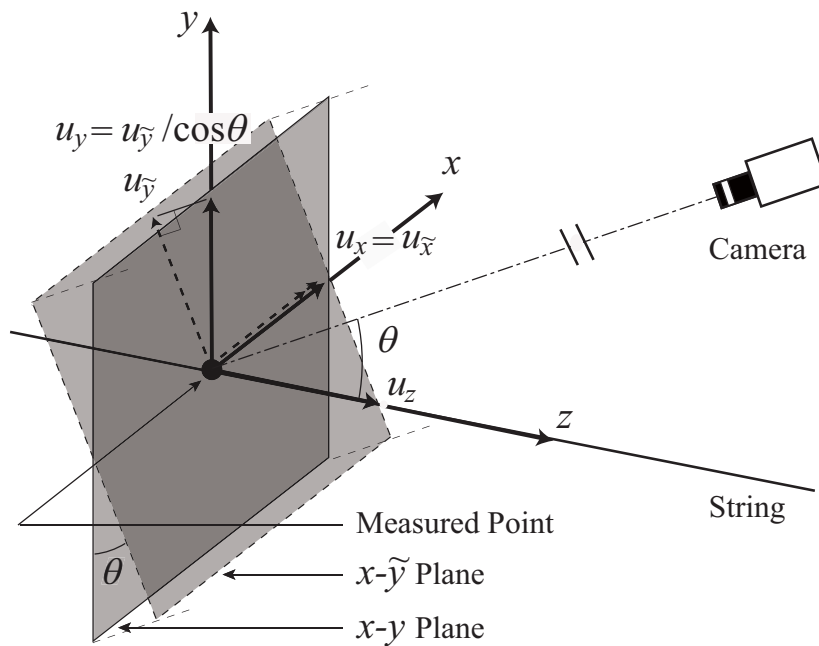


図 3.2 単一の高速度カメラを用いる弦の2次元横振動計測システム

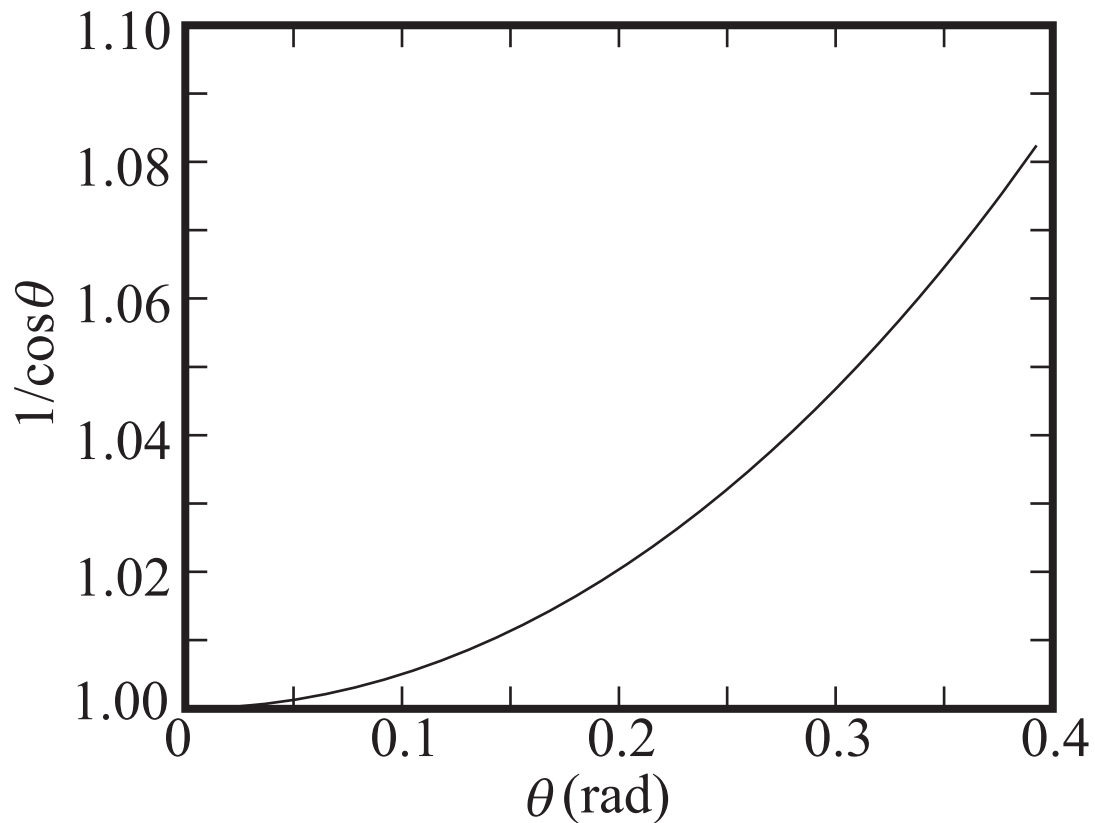


図 3.3 射影ひずみと $\theta$ の値の関係

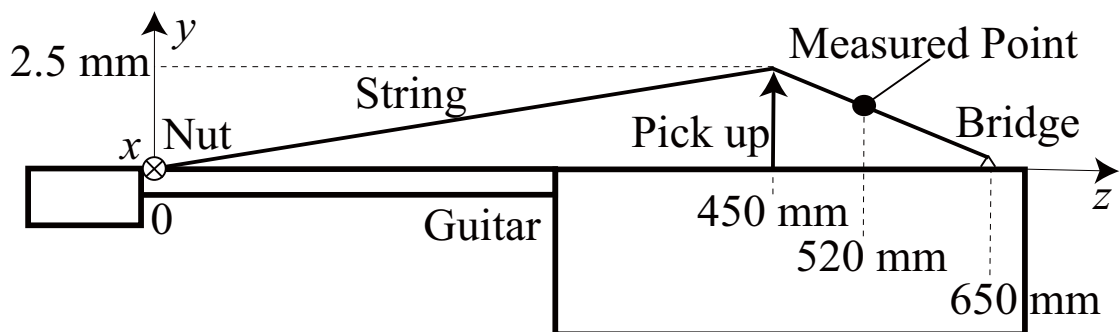


図 3.4 撥弦の際の初期条件

### 3.2.3 弦振動の撮影と画像処理

高速度カメラを用いて弦振動を撮影する。まず画像上に映る弦の背景が黒く映るように黒いシートを敷き、次に画像上に映る部分の弦を一部だけ残して黒く塗り、塗られていない部分が画像上で明るく映るようにする。その部分をマーカーとして用いる。弦の表面は光をよく反射するので、画像上で弦の黒く塗られていない部分は白く浮かび上がる。撮影された画像をグレースケールに変換し、その画像の重心を計算すれば、そのマーカーの画像上の位置を計



測できる。グレースケール画像の画素値が $f(\tilde{x}, \tilde{y})$ 、その画像の $pq$ 次モーメントを $M_{pq}$ を、

$$M_{pq} = \sum_{\tilde{x}} \sum_{\tilde{y}} \tilde{x}^p \tilde{y}^q f(\tilde{x}, \tilde{y}) \quad (3-3)$$

と定義すると、1次モーメント、 $M_{10}$ 、 $M_{01}$ それぞれを0次モーメント、 $M_{00}$ で割ることによりマーカの画像上の位置( $u_{\tilde{x}}$ 、 $u_{\tilde{y}}$ )が以下のように計算される、

$$\begin{cases} u_{\tilde{x}} = \frac{M_{10}}{M_{00}} \\ u_{\tilde{y}} = \frac{M_{01}}{M_{00}} \end{cases} \quad (3-4)$$

計測の空間分解能は画像の画素数と仰角 $\theta$ の値に依存する。そこで画像処理により求めた画像上のマーカ位置を弦の変位に校正する上では、画像上に写っているグリッドの間隔から実世界上での距離を算出するグリッドキャリブレーション<sup>[29]</sup>を行うことが有用である。

### 3.2.3 画像の射影歪みによる計測結果への影響

提案手法において、高速度カメラはギターを斜めに見降ろすように設置されるので、測定結果には $y$ 方向で斜影歪みが発生する。そのために計測の際には仰角はなるべく小さくするのが望ましい。ここで $\theta$ と $1/\cos \theta$ の関係を図3.3に示す。図3.3より $\theta$ の値を0.4 rad以下にすれば、 $1/\cos \theta$ の値は1.1以下である。この関係より、仰角 $\theta$ の値を0.4 rad以下にすれば斜影歪みは10%以下に抑えることができる。また弦の縦振動の変位 $u_z$ は $y$ 方向の変位に $-u_z \sin \theta$ という形で含まれる。ここで仰角の値が0.4 radのとき、 $\sin \theta$ の値は約0.39であり、 $u_z$ の成分の0.39倍が $u_{\tilde{y}}$ に含まれる。縦振動の変位が計測におよぼす影響を考察するには実際の弦において縦振動の変位が横振動の変位よりも十分に小さいかどうか評価する必要がある。しかしながらまた、高速度カメラがギターを見降ろす仰角の値を小さくすることにより、縦振動の変位が計測結果に与える影響をより小さくすることも可能である。

## 3.3 実験

### 3.3.1 実験構成

高速度カメラはマーカから900 mmの距離から、ギターを仰角が0.2 radで見降ろすように配置した。使用した高速度カメラ(EX-F1 CASIO)のサンプリングレートは1200 frames/sである。撮影された画像の1フレームあたりの画素数は横336 pixel、縦96 pixelであり、256階調のグレースケール画像である。このときの弦の基本周波数は82.4 Hzである。実験では実

際にギターを演奏する状態に近づけるため、弦は6本全てが張られた状態とした。使用したギターは Morris W-18 である。また照明には、画像上へのちらつきがないようにインバータ蛍光灯(SQ-984 National) を使用した。実験で使用したギター弦は、スチール弦である Yamaha FS526/LIGHT GAUGE の第6弦を使用した。弦の直径は 1.34 mm である。撮影の条件として、シャッター速度は 1/1600 s, F 値は 3.8, 感度は ISO 1600 である。

### 3.3.2 実験条件

図 3.4 に実験の際の弦の初期条件を示す。弦は  $z$  方向に 450 mm の位置で、 $y$  方向に約 2.5 mm つまみあげた状態から静かに離して撥弦した。また実験の再現性を確保するため、実験の際には撥弦する装置を作製しそれを使用した。装置の概略を図 3.5 に示す。装置はクリップを台座に固定したもので、クリップで弦を把持することで撥弦の際の初期条件に再現性を確保することができる。弦をクリップから静かに離すことによって振動させる。計測の際の画像上の座標と弦の変位との対応関係はグリッドキャリブレーションによって算出され、1 ピクセル当たり  $x$  方向に  $43.7 \mu\text{m}$ ,  $y$  方向に  $44.6 \mu\text{m}$  であった。計測時間は撥弦前を含めて約 30 s とした。

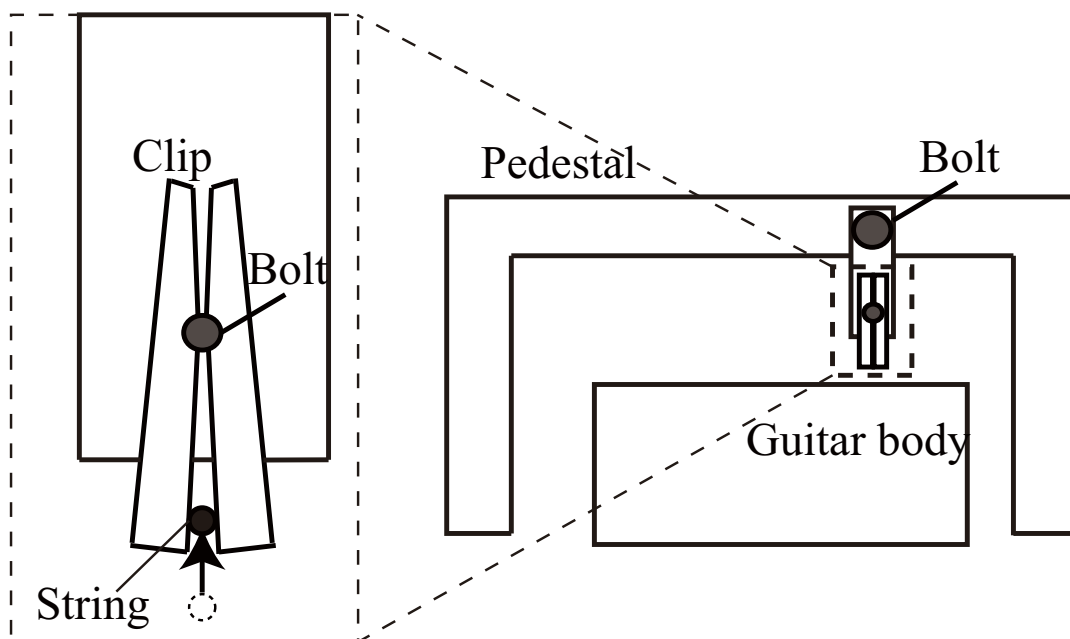


図 3.5 人工撥弦装置

### 3.3.3

#### 実験結果と考察

##### 弦の 2 次元横振動計測結果

図 3.6 にマーカの追跡によって計測された弦の 2 次元横振動の計測結果を示す。図 3.6(a) は  $x$  方向，図 3.6(b) は  $y$  方向の振動であり，それぞれの図の横軸に時間軸を示す。計測の際には撥弦前の時間も含まれているため，横軸の「0」から左部分が撥弦前の弦の変位を示しており，右部分が撥弦後の弦振動の変位を示している。図 3.6(a) において初期変位は  $x$  方向には約 0.2 mm，図 3.6(b) では  $y$  の初期変位は 2.2 mm であり，これは図 3.4 に示す実験の際の初期条件に概ね一致している。図 3.6(a) 中の  $t < 0$  での波形に見られる振動は手作業でクリップを操作したことによるクリップと台座のわずかなゆれによる影響が考えられる。またクリップは台座にピンで固定してあるため， $x$  方向に揺れやすい状況で， $y$  方向には揺れにくい状況であったことから，図 3.6(b) には影響が見られなかったと考えられる。図 3.7 に撥弦後，0, 2, 4, 6 s 後それぞれの時間において 15 フレーム間(約 12.5 ms 間)の弦の 2 次元振動のリサージュ図形を示す。図 3.7 から弦振動は楕円運動している瞬間があることが分かる。図中の矢印は回転方向を示している。このように一度の計測で弦の回転方向の変化も含めて，弦の横振動の 2 軸の同時計測が可能になることが本手法の特徴である。また図 3.8 に計測された  $u_x$  と  $u_y$  それぞれのパワースペクトルを示す。図 3.8 において振幅はそれぞれのパワースペクトルの最大値で正規化されている。図 3.8 より，第 3 次モードの成分までそれぞれの基本モードに対して -40 dB 以上の振幅で計測されていることが示された。ここで実験条件に含まれる誤差について考察すると，斜影角度によって生じる誤差は 0.9  $\mu\text{m}$  であり 1 pixel の距離(43.7 $\mu\text{m}$ ) の 2.1 % 分である。

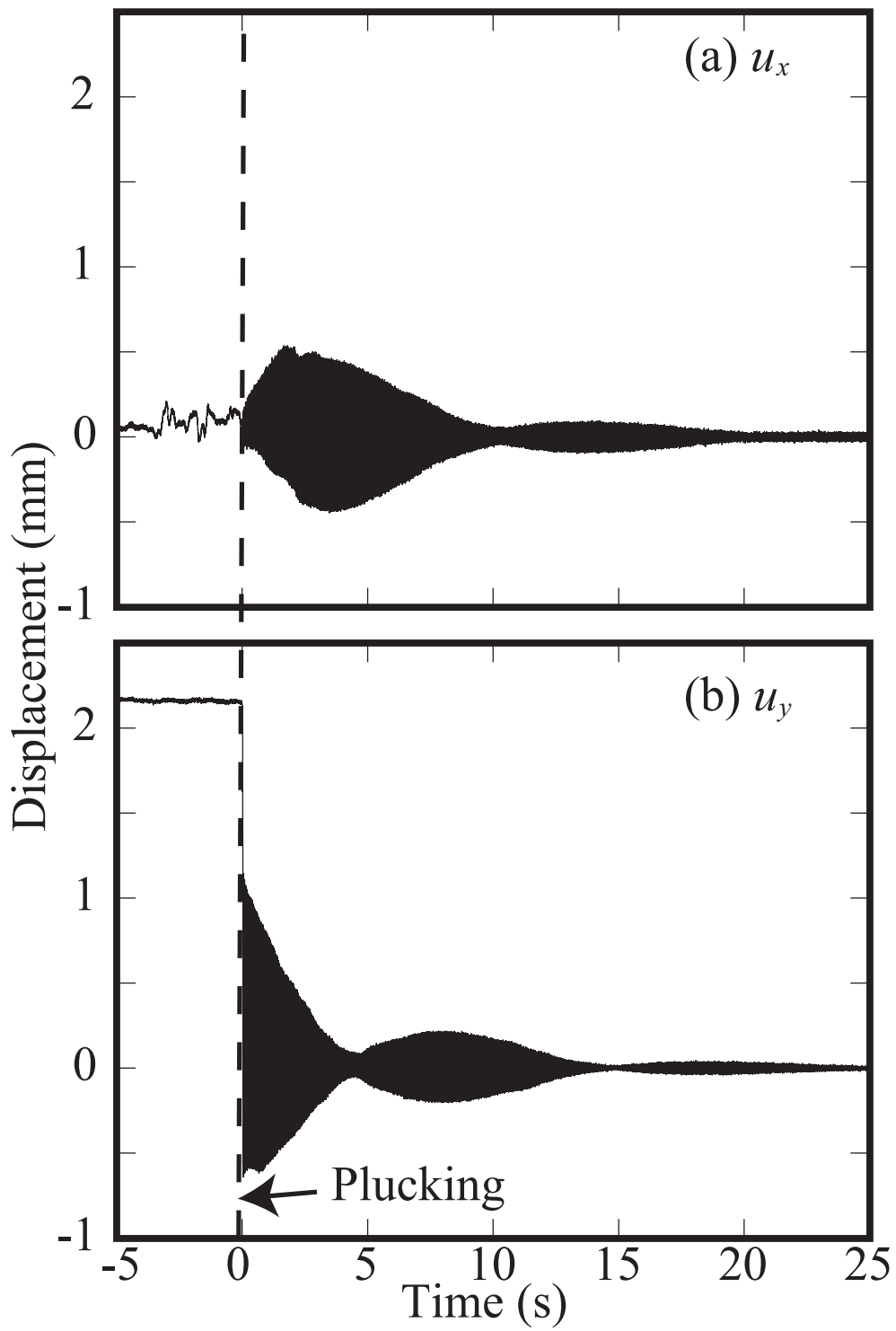


図 3.6 弦の 2 次元横振動の計測結果

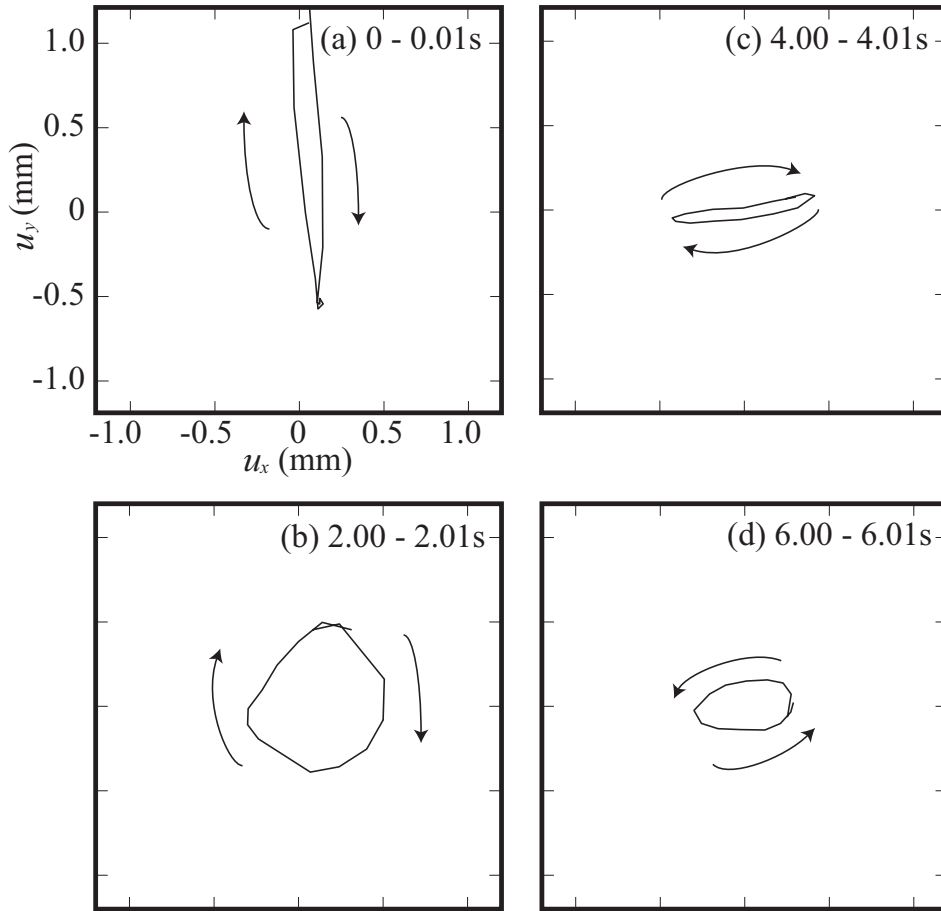


図 3.7 15 フレーム間の弦の 2 次元横振動の軌跡

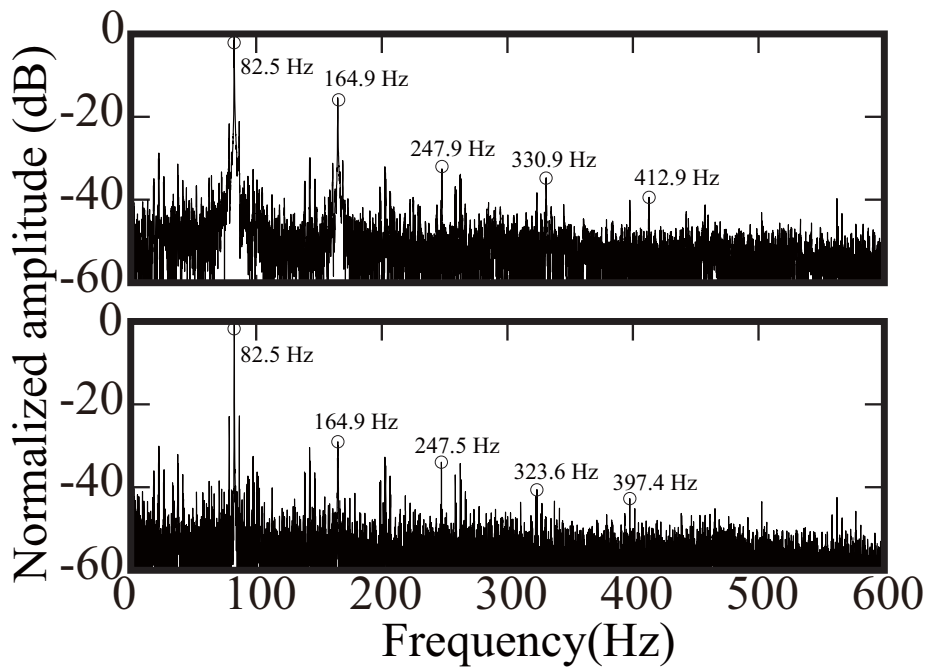


図 3.8  $u_x$  と  $u_y$  のパワースペクトル

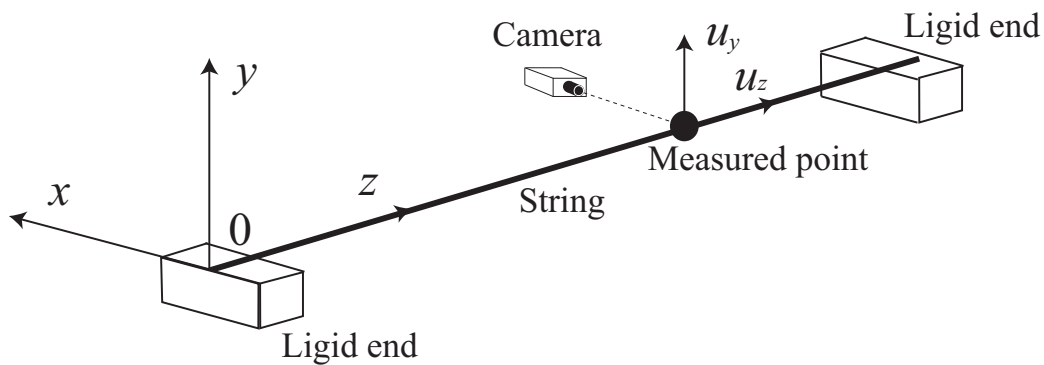


図 3.9 y 方向と z 方向の振動の計測

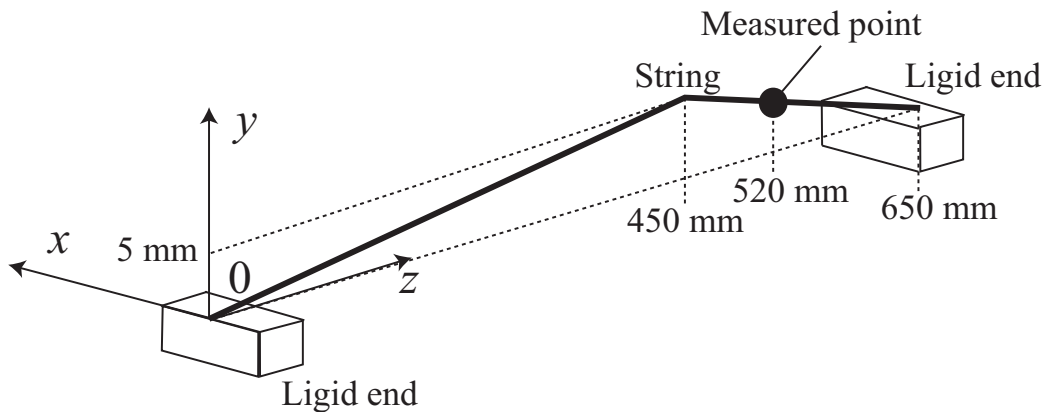


図 3.10 y 方向と z 方向計測の弦の初期条件

### 縦振動が計測結果に与える影響

図 3.9 に示す、弦だけを張った実験系を使用し、 $u_y$  に対する  $u_z$  の振幅を計測することによって本手法に置いて弦の縦振動が  $y$  方向の横振動の計測結果にどのくらい影響を与えるのかを評価した。カメラは  $y$ - $z$  平面を撮影するように設置することにより、 $u_y$ 、 $u_z$  を同時に撮影することができる。またこの実験のときの撥弦条件を図 3.10 に示す。 $z$  方向に 450 mm の位置を  $z$  方向に約 5 mm つまみあげた状態から静かに弦を離すことによって実験を行った。また計測時間は撥弦前を含めて約 35 s である。実験結果を図 3.11 に示す。図 3.11(a)と(b)を比較すると、 $u_z$  の振幅は  $u_y$  の常に 0.5 倍以下であることが確認できる。しかしながら  $u_z$  の計測結果にはカメラの角度による  $u_x$  の写り込みや、 $y$ - $z$  平面の撮影により  $u_y$  の変位に伴う弦表面の光の反射による  $u_y$  の写り込みによる影響が含まれている可能性がある。そこで  $u_y$ 、 $u_z$  のそれぞれのパワースペクトルを求めた。それらを図 3.12 に示す。また図 3.12(a), (b) は図 3.12(a)

の最大振幅で正規化されている。図 3.12(b)にも図 3.12(a)とほぼ同じ周波数の成分があることが見られ、 $u_z$ の計測結果には $u_x$ 、あるいは $u_y$ の変位により影響を受けていたことが分かった。しかしながら、それらの周波数成分以外では、 $u_z$ の周波数成分には-40 dB より大きな振幅を持つピークは見られない。このことから、縦振動 $u_z$ の成分自体は大きくとも $u_y$ の基本周波数成分に比べて-40 dB 程度であることが考えられる。ここで前節における高速カメラの仰角 $\theta$ は約 0.20 であることを考えると、 $\sin\theta$ の値は約 0.20 rad になる。もともと横振動に比べて小さい縦振動の変位が、さらに約 0.20 倍されているので、 $u_y$ に含まれる $u_z$ の振幅はパワースペクトルにして約-54 dB 以下であると見積もれる。これにより提案手法において縦振動が横振動の計測結果に及ぼす影響は十分無視できるものであることが確認された。

#### マーカの移動速度による計測誤差

図 3.13 に撥弦直後のマーカの変位と図 3.14 にマーカの最高速移動時の画像を示す。図 3.13 の矢印で示された区間の変位からマーカの振動速度を求めると約 0.56 m/s であった。図 3.14(a), (b) にそのときマーカの画像を示す。図 3.14(a), マーカの移動速度が最も小さいと考えられる時の状態と図 3.14 (b), 移動速度がもっと大きいときの画像を目視で比較すると 4 pixel 程度、0.2 mm 程度のブレが見られる。この画像のブレからよって弦が約 0.56 m/s の移動速度のときには 0.2 mm 程度の誤差が発生する可能性がある。しかしながら画像の重心を計測することから誤差はそのブレの値未満であることが考えられる。

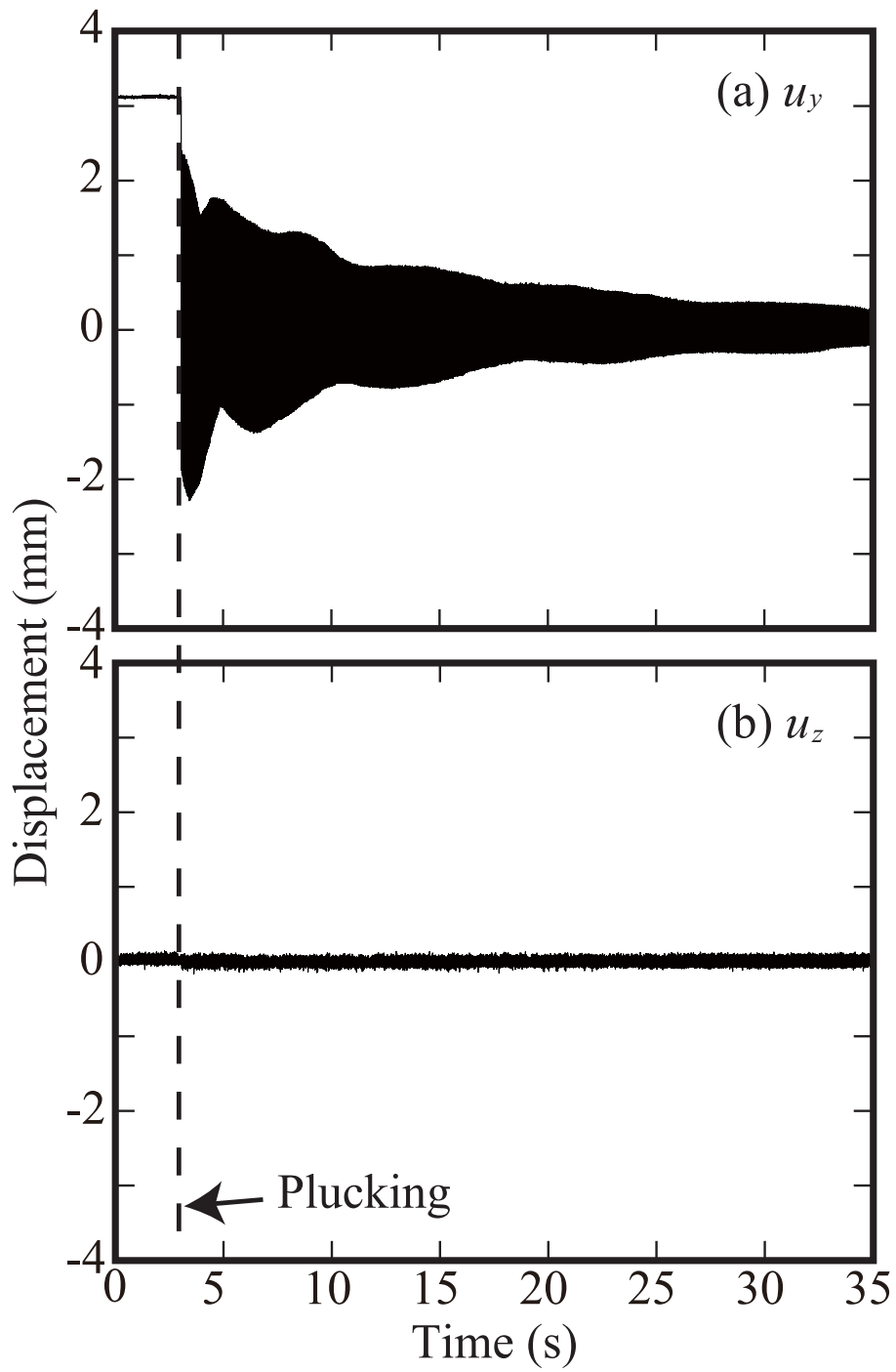


図 3.11 y 方向と z 方向の振動の計測結果



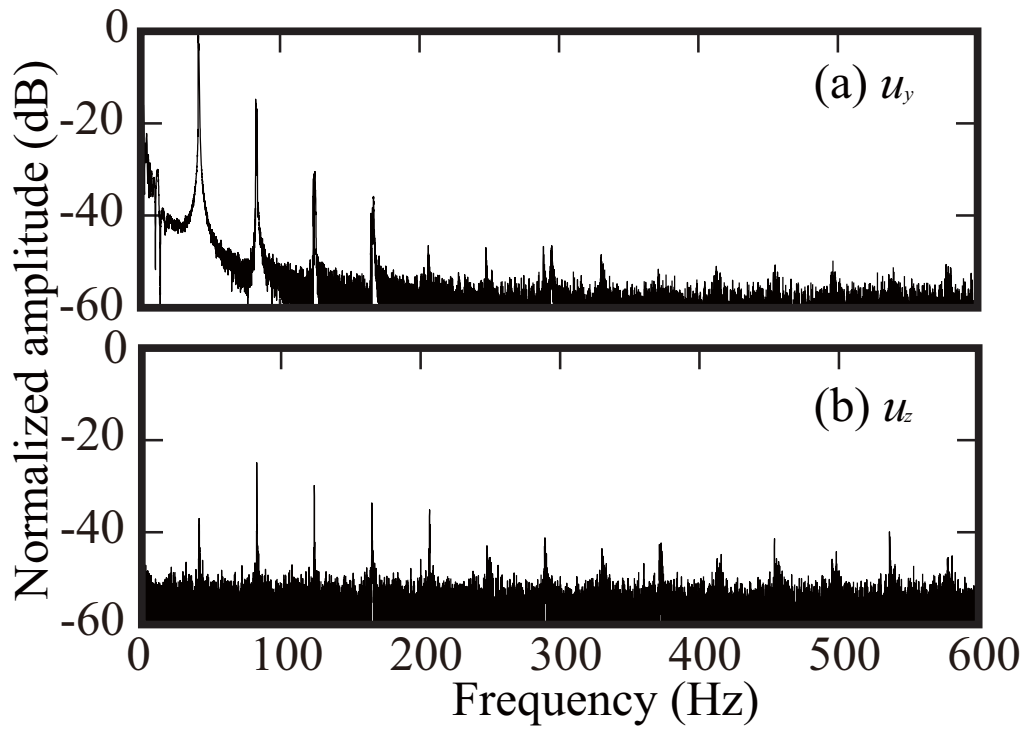


図 3.12  $u_y$  と  $u_z$  のパワースペクトル

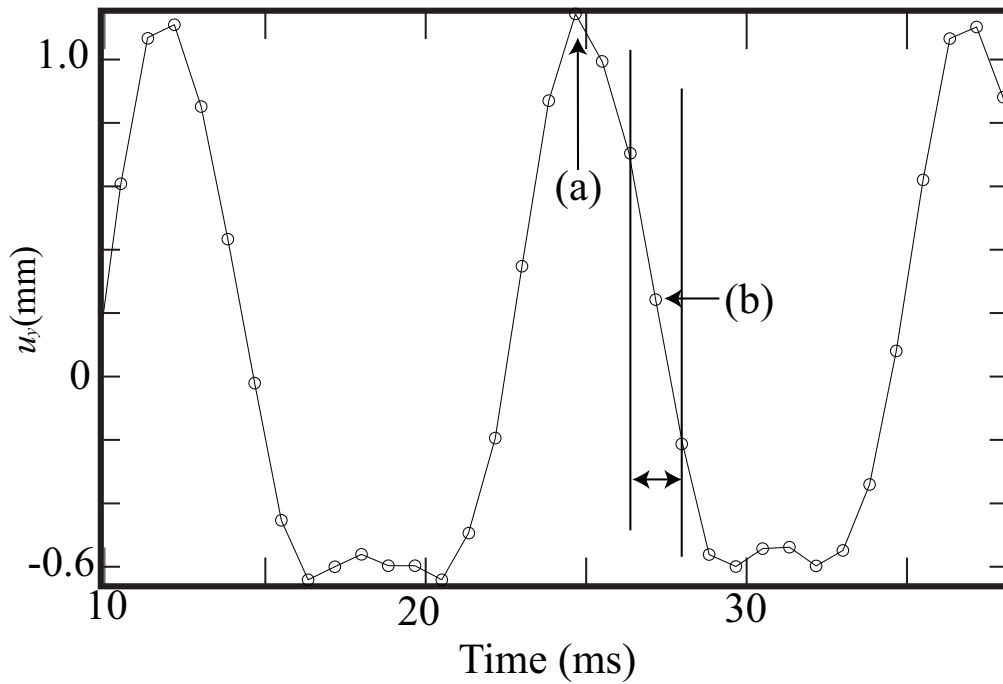


図 3.13 撥弦直後の  $u_y$



図 3.14 高速移動時のマーカ

### 3.4 まとめ

単一の高速度カメラを用いて弦の 2 次元横振動を計測する手法を提案した. この手法により実際の演奏に近い状態のギター弦の振動を非接触で計測可能であることが示された. また 1 次元の縦振動と 1 次元の横振動の同時計測により, 縦振動が横振動の計測結果に与える影響は十分に無視できるものであることが確認された.





## 第4章 1 本弦の振動におけるうなり

### 4.1 はじめに

我々の先行研究の知見<sup>[31,32]</sup>をもとに，弦の伸長に伴う張力変化に起因する非線形性を考慮した弦の運動方程式により，減衰時の非周期的なうなりを再現することを試みた<sup>[33]</sup>。

### 4.2 モデルパラメータ推定のための実験

この弦振動モデルを用いて弦振動のシミュレーションを行うには，実際の弦に関する物理パラメータを測定する必要がある．ここで弦の伸びに影響するパラメータである  $\frac{EA}{2l\rho}$  は以下のように測定する．**図 4.1** に示すように弦の弦長に対する中心位置に重りを使って荷重  $w$  をかけ，その位置における変位  $h$  を測定する．このときに生じる弦の伸びに起因する復元力により，荷重  $w$  と変位  $h$  は次式の関係に従う，

$$w = \frac{2h}{\sqrt{\left(\frac{l}{2h}\right)^2 + 1}} \left( T_0 + \frac{2EA}{l^2} h^2 \right), \quad (4-1)$$

この関係から  $\frac{EA}{2l\rho}$  の値を求め，その値ならびに

$$\frac{l}{4\rho} \cdot \frac{2EA}{l^2} = \frac{EA}{2l\rho}. \quad (4-2)$$

を用いて  $\frac{EA}{2l\rho}$  の値を求める．

**図 4.2** に実際に計測した荷重  $w$  と変位  $h$  の関係を示す．この実験は 4 回試行しており，試行回数毎に記号を変えている．それぞれの試行毎のプロットの曲線を最小二乗法で推定し，それら 4 つのプロットの曲線の平均を算出することで  $\frac{EA}{2l\rho}$  を求めた．**図 4.2** 中の実線はその推定された  $\frac{EA}{2l\rho}$  の値を式(4-1)に代入してプロットしたものである．これを用いて，提案モデルである式(2-27-1)，式(2-27-2)に基づく弦振動のシミュレーションを行い，モデルの妥当性を検証する．

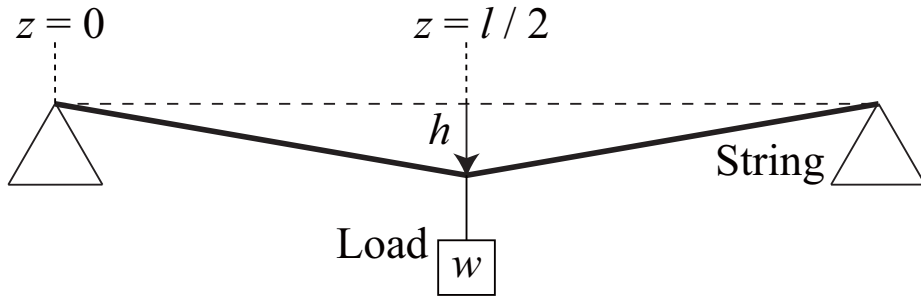


図 4.1 弦の伸びによる復元力を測定する実験系

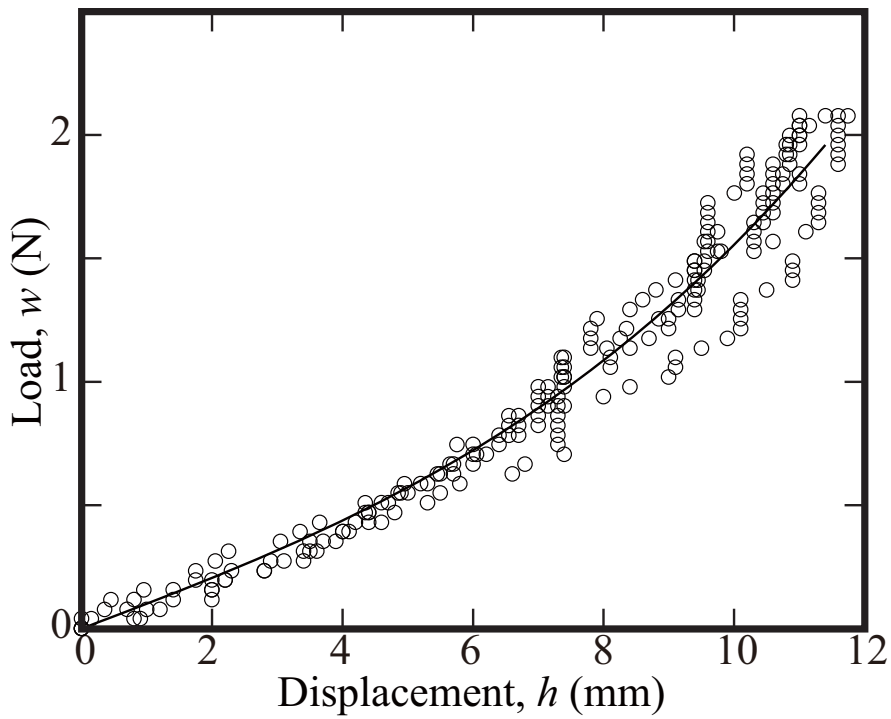


図 4.2 負荷  $w$  と弦の変位  $h$  の関係

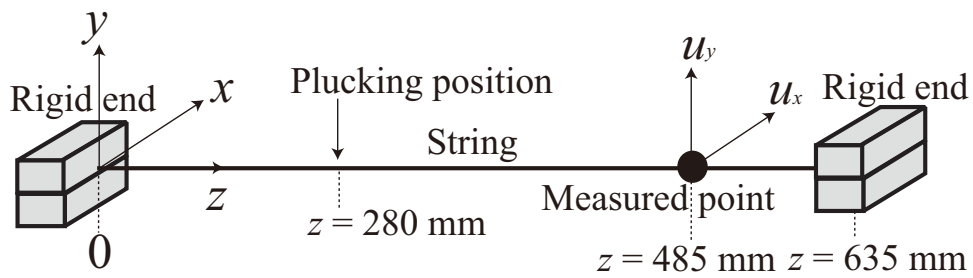


図 4.3 座標系の定義と実験条件

## 4.3 有限差分法による弦振動のシミュレーション

### 4.3.1 弦振動の計測とうなりの抽出

本研究では弦自体の特性として発生するうなりに着目する。そのため複数の弦同士の連成振動<sup>[9]</sup>やウルフトーンのような弦と胴の共振<sup>[34]</sup>の影響は排除して実験を行う。そこで弦は端点が振動しないように、各端点において弦を挟み込み強固に固定した<sup>[12]</sup>。また図 4.3 に示すように弦長 635 mm に対して、 $z = 280$  mm の位置を撥弦し、 $z = 485$  mm の位置の振動を高速度カメラにより計測した。詳細な計測方法は著者らが先行研究で提案した手法<sup>[20]</sup>に従った。高速度カメラのフレームレートは 1200 fps で計測時間は撥弦前を含めて約 15 s とした。うなりに対して最も支配的と考えられる第 1 次モードの減衰曲線に注目し、その特徴を再現するモデルを検討する。

図 4.4 に計測された大振幅で撥弦されたときの弦の  $x$  方向の振動のスペクトログラムを示す。横軸は計測開始からの時間、縦軸は周波数に対応する。ここで図 4.4 において弦振動のモードの周波数の時間変化に着目すると、撥弦直後と約 6 秒後以降とではモードの周波数が減少している。図 4.5 に計測された大振幅で撥弦されたときの弦の  $y$  方向の振動のスペクトログラムを示す。図 4.5 においても図 4.4 と同様、撥弦直後と約 6 秒後以降とではモードの周波数が減少している。このような振動振幅が大きいときに振動周波数が高いという特徴は漸硬バネ<sup>[35]</sup>の性質と類似している。この特徴は式()で示した、本研究で使用するモデルのもつ性質と一致する。このことから本研究において弦の伸長に伴う張力変化に起因する非線形性を考慮したモデルを使用することの妥当性が考えられる。

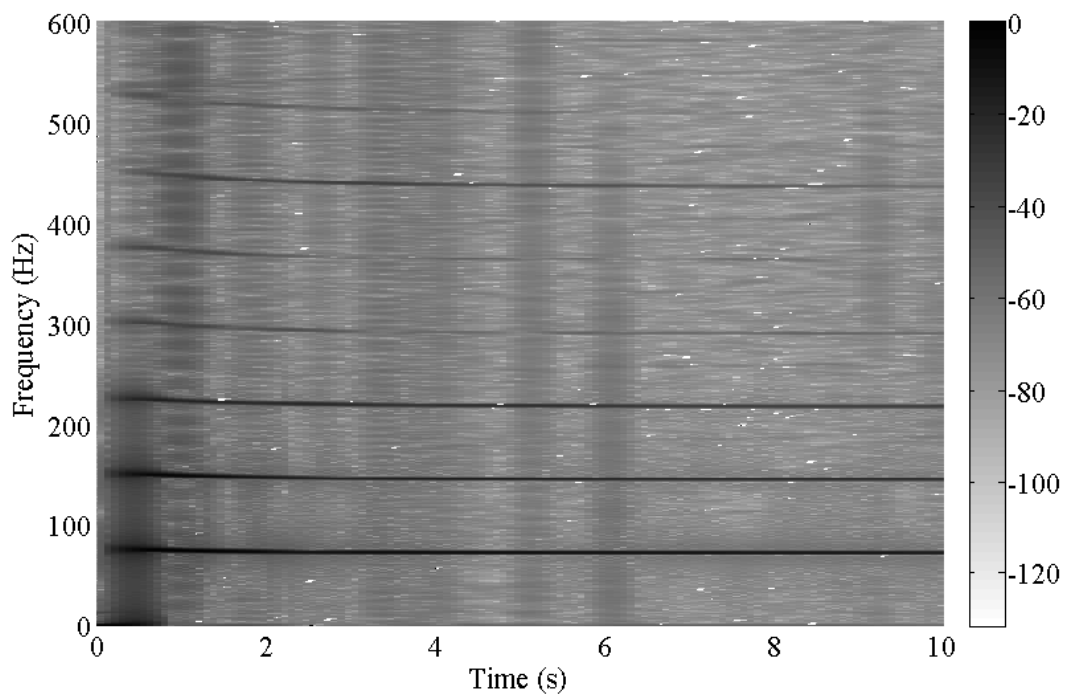


図 4.4 大振幅で撥弦されたときの弦の  $x$  方向の振動のスペクトログラム

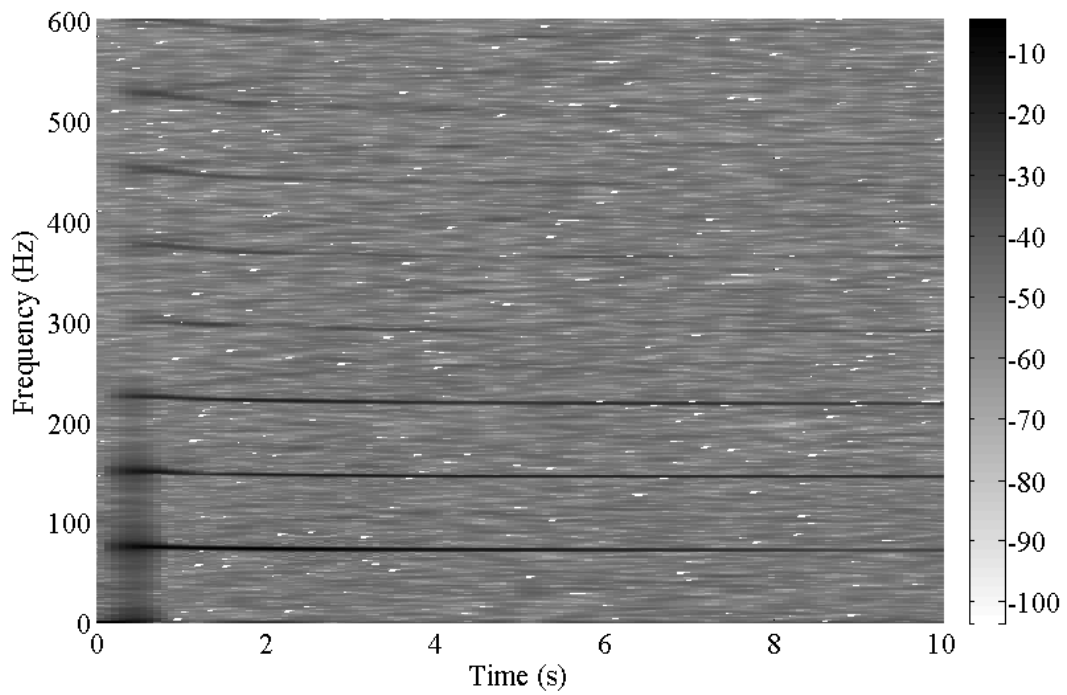


図 4.5 大振幅で撥弦されたときの弦の  $y$  方向の振動のスペクトログラム



### 4.3.2 うなりを生じる弦振動のシミュレーション

各パラメータにおいて  $c_x, c_y$  は実測結果で観測された第1次モードの振動周波数より求め、 $b$  は実験結果をなるべく近似できるように試行錯誤により定めた。またシミュレーションにおける各モードの初期振幅にはそれぞれ実測された値を用いた。ここで提案モデルの非線形性による効果を確認するため、線形モデル、すなわち式(2-27-1)、(2-27-2)において、 $\frac{2EA}{l^2} = 0$  の場合を線形モデルとして併せて評価する。

図4.4に大振幅で励起されたときの  $u_x, u_y$  の第1次モード成分について図4.4(a)に実測結果、図4.4(b)に線形モデルによるシミュレーション結果、図4.4(c)に提案モデルによるシミュレーション結果をそれぞれ示す。図4.4(a)~(c)の実線・破線はそれぞれ  $u_x, u_y$  の振幅の絶対値をそれぞれ示している。 $x$  方向に関して、図4.4(a)では振幅が約2s後に極小、約3s

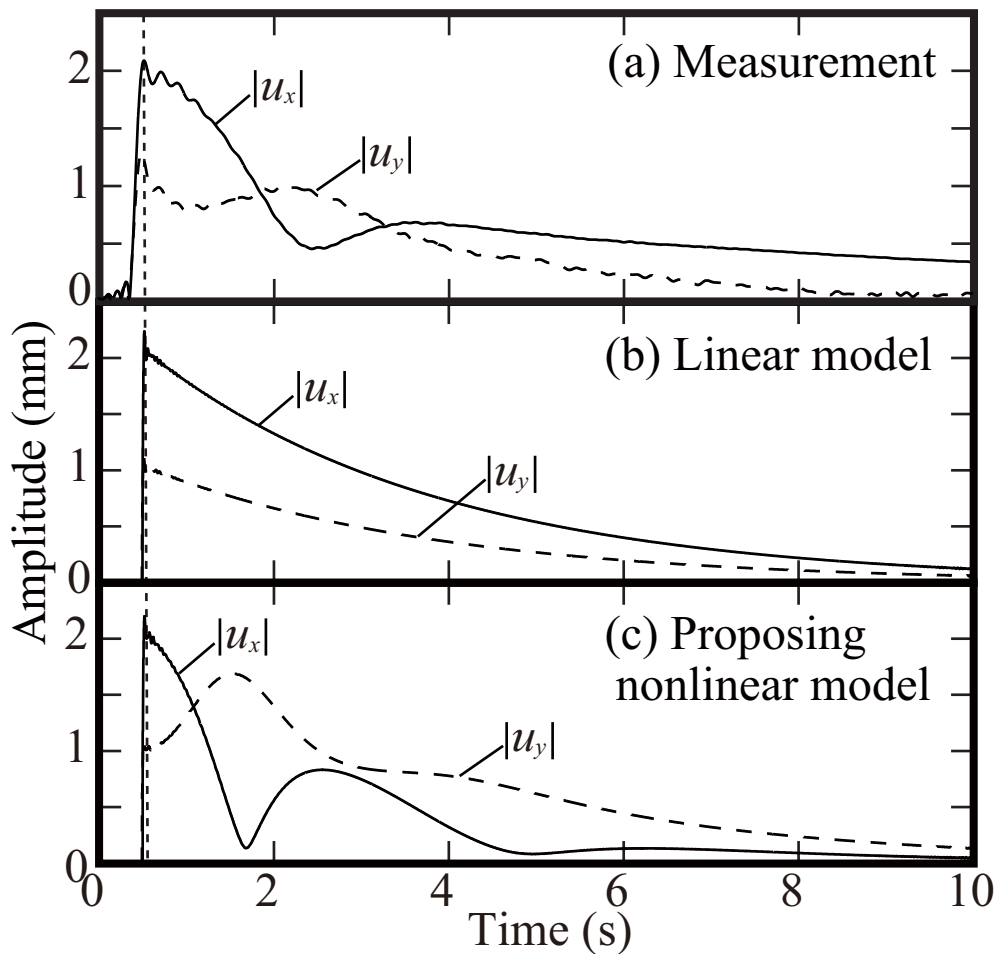


図 4.4 大振幅で撥弦されたときの第1次モードの比較

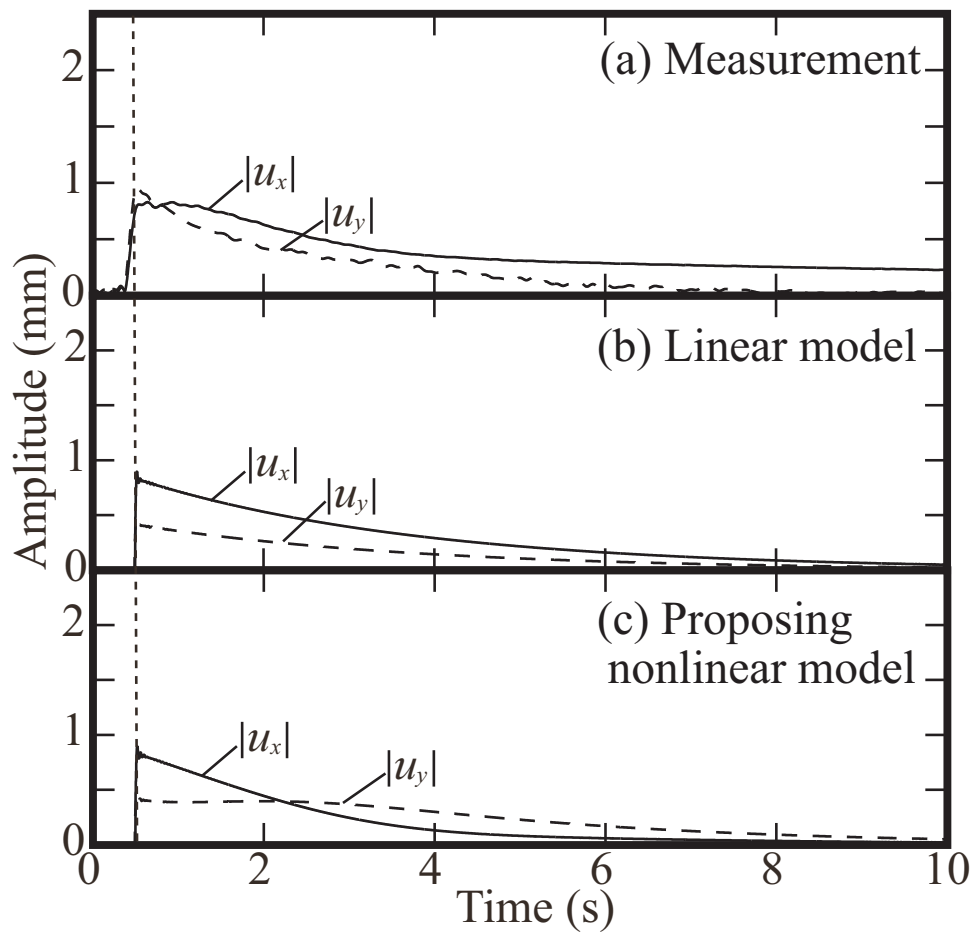


図 4.5 小振幅で撥弦されたときの第 1 次モードの比較

後に極大を示し，図 4.4 (c)では振幅が約 1 s 後に極小，約 2 s 後に極大を示した．これらの極大と極小をとる時刻は図 4.4 (a)とは異なるものの， $x$  方向の振幅において，まず極小を示した後に極大を示すという特徴が定性的に再現された． $y$  方向に関しては反対に，図 4.4 (a)では約 0.5 s 後に極小を示した後に約 1.5 s 後に極大を示した．この特徴は図 4.4(b)に示す線形モデルでは再現されなかったものであり，弦の伸長による非線形効果によるものであることが分かる．図 4.4(c)においては約 0.2 s 後に極小，約 1 s 後に極大を示した．これらのことから  $y$  方向に関しても，極大と極小を示す時刻は図 4.4(a)とは異なるものの，図 4.4(c)において極小を示した後に極大を示すという特徴が再現された．

図 4.5 に小振幅で撥弦したときの  $u_x$ ,  $u_y$  の第 1 次モード成分を示す．図 4.5(a)に実測結果，図 4.5(b)に線形モデルによるシミュレーション結果，図 4.5(c)に提案モデルによるシミュレーション結果を示す．図 4.5 では図 4.4 とは異なり，実測結果にうなりは見られない．

この特徴は線形モデルおよび提案モデルによるシミュレーション結果においても共通している。

これらのことから提案モデルにおいて弦の伸長に起因する非線形な復元力を考慮することによって、弦の振幅によってうなりの周期が変化するという特徴が再現されることが確認された。以上のことから、提案モデルにおいて、1本弦の直交する2方向の共振周波数が等しい場合、振動に伴う弦の伸びと2方向間の固有周波数の違いにより、振幅の大きさに従ってうなりの周期が変化することが示された。しかしながら再現されたうなりの周期は実測結果とは十分に一致していないので、弦の伸びや減衰に関するパラメータの測定誤差がどの程度までシミュレーション結果に影響するのかを今後定量的に評価する必要がある。

#### 4.3.3 弦の2次元振動での比較

弦の2次元振動について、 $x$ - $y$ 平面におけるリサージュ図形の観点から、実験とシミュレーションの比較を行った。図 4.6 に実測された弦の2次元横振動の基本モードのリサージュ図形を示す。図 4.6 のそれぞれのリサージュ図形はそれぞれ 15 フレーム間の  $z=485$  mm での位置での計測結果と対応している。それぞれの図での矢印はリサージュ図形の軌跡の回転方向を表している。図 4.6(a)ではリサージュ図形は時計回りに回転する楕円を示している。その後図 4.6(b), 図 4.6(c)に見られるように楕円の傾きと形が徐々に変わり、図 4.6(d)において時計方向に回転していた軌跡は半時計方向に回転する軌跡を示した。図 4.6(d)に示した時間は図 4.6 に示した減衰曲線の極小値を示した時間と対応している。図 4.7 はシミュレーションにより得られた弦振動の基本モードに基づいて得られたリサージュ図形を示す。図 4.7(a)のリサージュ図形はほぼ直線のように時計方向に回転する軌跡を示し、図 4.7(b), 図 4.7(c)に見られるようにリサージュ図形は楕円の形状に変わり、3.5 s 後には図 4.7(d)に見られるようにリサージュ図形の回転方向は半時計方向に変化した。この図 4.7(d)が示す時間帯は図 4.7(c)に示す  $u_x$  の減衰曲線が極小値を示した後の時間に相当する。図 4.6 に示すシミュレーション結果を図 4.7 に示す実測結果と比較することによって、弦の2次元横振動におけるリサージュ図形の特徴は式に示す弦振動モデルによって定性的に表現できることが明らかになった。

## 4.4 まとめ

高速度カメラを用いる光学的 2 次元振動計測によって、強固な端点に固定された弦の 2 次元の横振動を計測した。計測の結果、2 次元振動の第 1 次モードにおいて、減衰過程においてうなりが観測され、そのうなりの周期は弦の振動振幅に依存することを確認した。この現象を弦の伸びによる張力変化の影響であることを想定し、弦の伸長を考慮した弦の運動方程式によるモデル化を行った。このモデルに基づくシミュレーションと実測との比較により、1 本弦によるうなりについて、直交する 2 方向の減衰率が等しい場合においても、振動に伴う弦の伸長とそれぞれ直交する 2 方向間の周波数の違いにより、弦振動のうなりの周期が振動振幅に伴って変化するという特徴が再現された。このことにより、提案モデルによって 1 本弦における減衰に伴う非周期的なうなりが再現されることを確認した。また弦の 2 次元横振動のリサージュ図形においても、リサージュ図形の回転方向や形状変化が定性的に表現されることも明らかになった。

今後はモデルのパラメータの弦の伸びや減衰に関するパラメータの測定誤差がどの程度までシミュレーション結果に影響するのかを定量的に評価することを検討している。

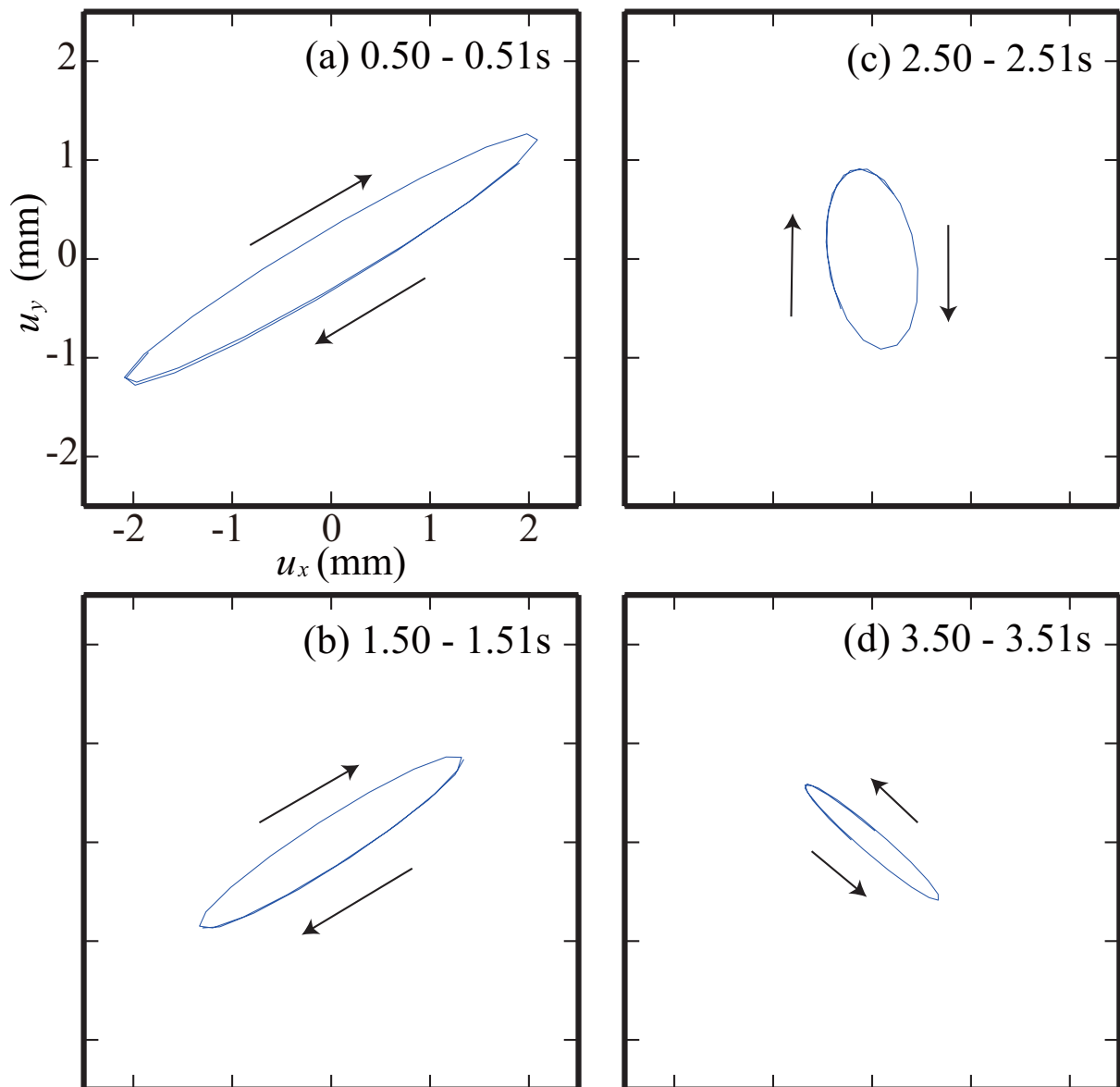


図 4.6 大振幅で撥弦されたときの第1次モードの2次元振動

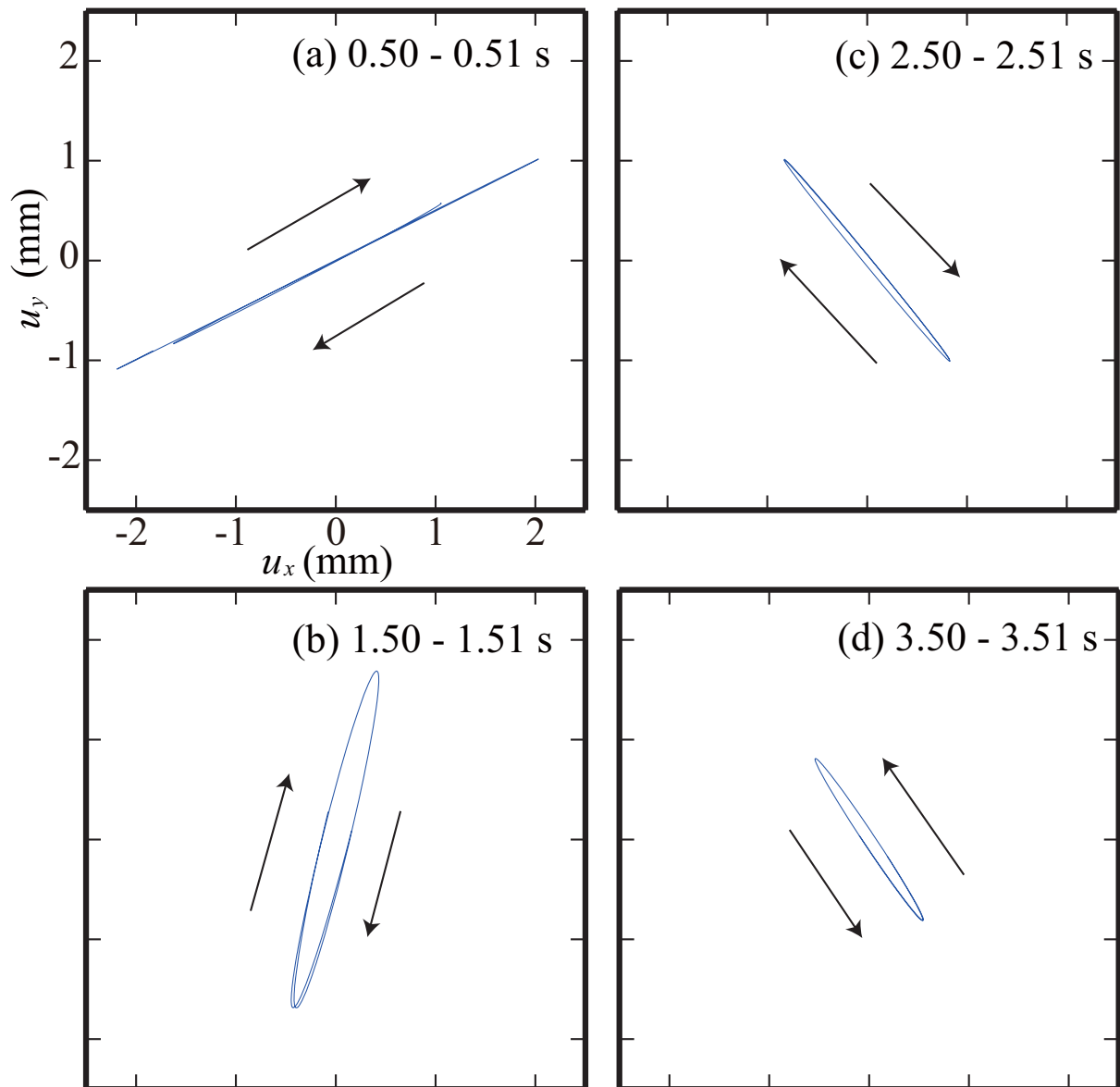


図 4.7 伸びを考慮した弦振動モデルに基づいてシミュレートされた  
大振幅で撥弦されたときの第 1 次モードの 2 次元振動







## 第5章 ギターにおける複数弦の振動による 弦振動のうなりへの影響

### 5.1 はじめに

第4節では強固な端点に固定された弦の振動における減衰過程の非周期的なうなりについて議論した。第5節では実際のギターに張られた弦振動において、複数弦の共振や弦-胴の結合も起こりうる条件においても弦の伸びに起因するうなりが影響しているのかを検証する。

### 5.2 実験構成

複数弦の共振が起きる条件において、第3章にて実験で使用した弦においてうなりが生じるかについて調査する。弦振動の計測においては著者の先行研究<sup>[36]</sup>にて提案した弦振動の多点同時計測法を応用し、複数弦の振動を同時に観測する手法を使用した。これにより、1回の計測で複数弦の振動を同時に計測することが可能になる。複数の弦において  $z$  方向に同じ位置をマーキングし、図 5.1 に示すように複数の弦の振動に伴う複数のマーカの運動を同時に撮影する。その後、図 5.2 に示すように画像処理において関心領域を操作することによって一つ一つのマーカを抽出し、そのマーカの重心位置を画像上で計算することによってそれぞれの弦の変位を求める。

実験条件において、弦の  $z = 451 \text{ mm}$  の位置の変位を計測し、 $z = 555 \text{ mm}$  の位置を手作業にて撥弦した。また計測時間は約 16 秒で、高速度カメラのフレームレートは 1200 fps である。

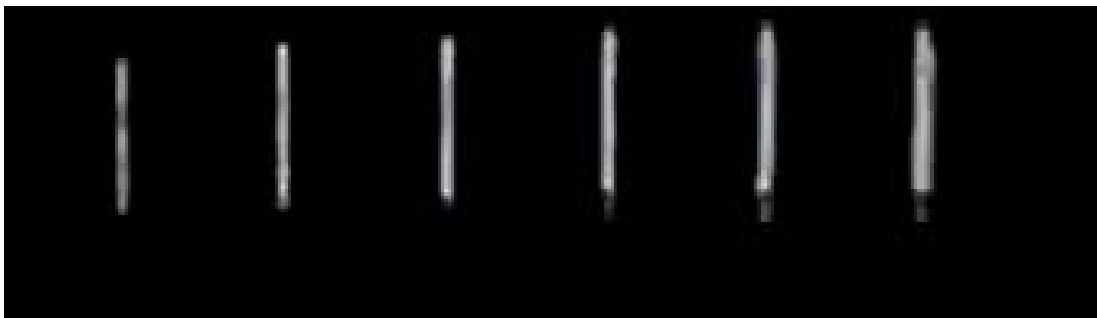


図 5.1 6本それぞれの弦につけられたマーカを同時撮影したときの画像

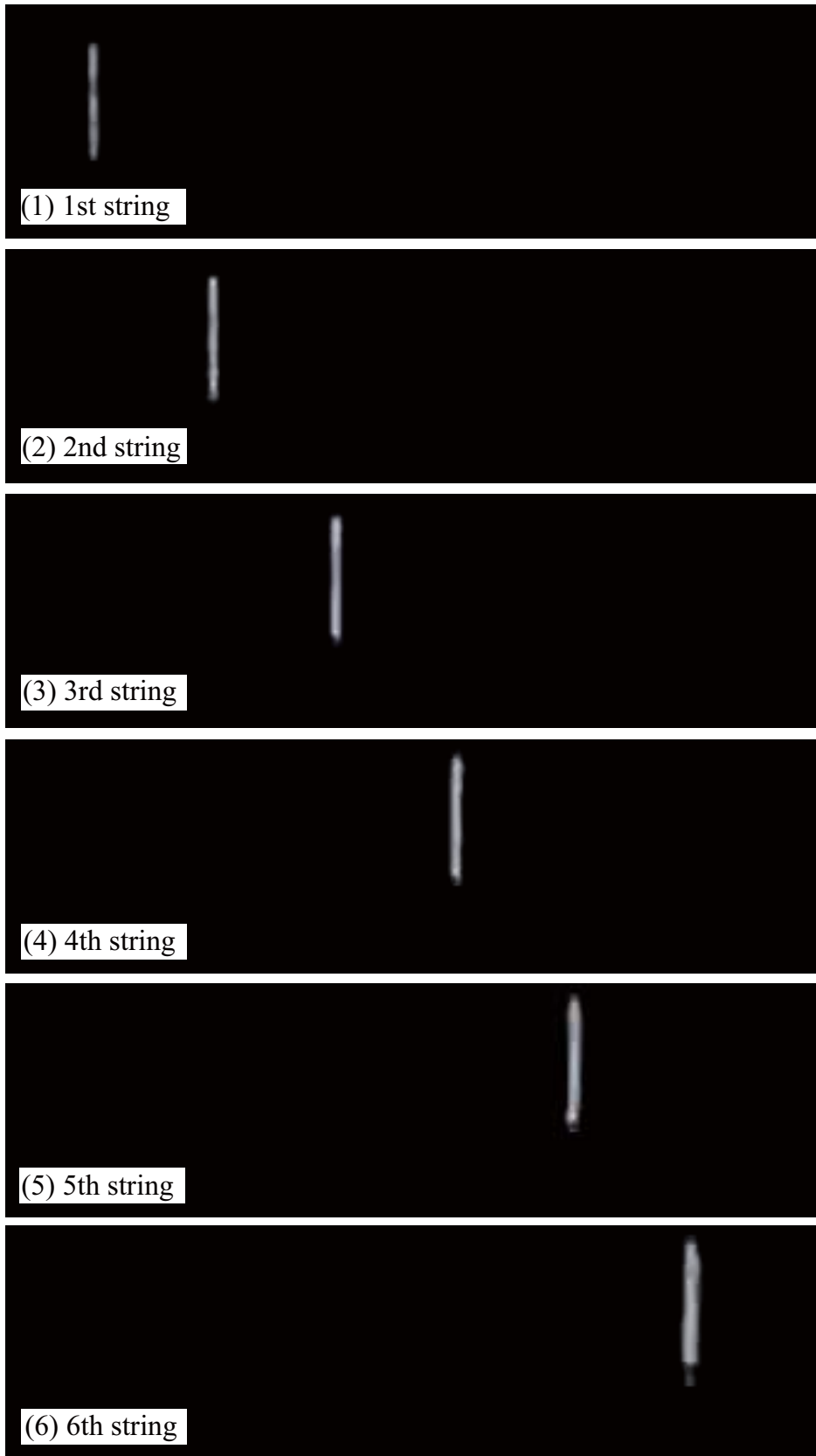


図 5.2 関心領域の操作によってそれぞれのマーカを抽出

### 5.3 複数弦振動の計測結果

図 5.3 に実験の際の条件を示す。弦長 650 mm に対して各弦の  $z = 451$  mm の位置をマーキングし、 $z = 555$  mm の位置で第 1 弦から第 6 弦全てを撥弦した。使用した高速度カメラは CASIO EX-F1 で 1200 frames/s である。計測時間は撥弦直前を含めて約 20 秒である。計測の際の画像の 1 ピクセルあたりの距離は  $x$  方向に  $191.6 \mu\text{m}$ 、 $y$  方向に  $202.1 \mu\text{m}$  である。使用したギター弦は D'Addario EJ16 Light Gauge の第 1 弦から第 6 弦でギターは Morris W-18 である。

図 5.4 に複数弦の計測結果を示す。図 5.4 (x-1)・(y-1)はそれぞれ第 1 弦の  $x \cdot y$  方向の振動、図 5.4 (x-2)・(y-2)はそれぞれ第 2 弦の  $x \cdot y$  方向の振動、以下同様に、図 5.4 (x-6)・(y-6)はそれぞれ第 6 弦の  $x \cdot y$  方向の振動とする。いずれの図においても計測開始から約 2 秒後に波形の立ち上がりが観測されている。また第 3 節での計測結果に比べていずれの図においても振動振幅が 1 mm 以下である点にも注目する。第 4 節の図 4.5 の結果と比較しても図 5.3 に示される振動振幅はいずれも小さな振動振幅の条件と近い。図 5.5 に図 5.4 に示す(x-1)から(x-6)までの振動のパワースペクトルを示す。それぞれの図において、パワースペクトルの振幅はそれぞれの図の振幅の最大値で正規化されている。それぞれの弦の固有周波数に対応する周波数ピークが観測されていることから、図 5.4 の波形はそれぞれの弦の振動が観測されたものであることを裏付けている。図 5.6 に示す第 1 弦から第 6 弦までの  $y$  方向成分のパワースペクトルからも同様のことが確認できた。

図 5.7 (x-6-1), (y-6-1)に図 5.4 に示す計測結果から抽出した第 6 弦の  $x$ ,  $y$  方向成分の第 1 次モード、図 5.7 (x-6-2), (y-6-2)に第 2 次モード、図 5.7 (x-6-3), (y-6-3)に第 3 次モードを示す。それぞれの結果からは第 4 節で見られたような減衰に伴い周期が変わるうなりは観測されない。このことから実験で使用した実際のギターの第 6 弦の振動において、複数弦の振動による弦振動へのうなりの寄与は小さく、弦の振動振幅に伴う非線形的な復元力によるうなりへの寄与の方が大きい場合が存在することが示された。

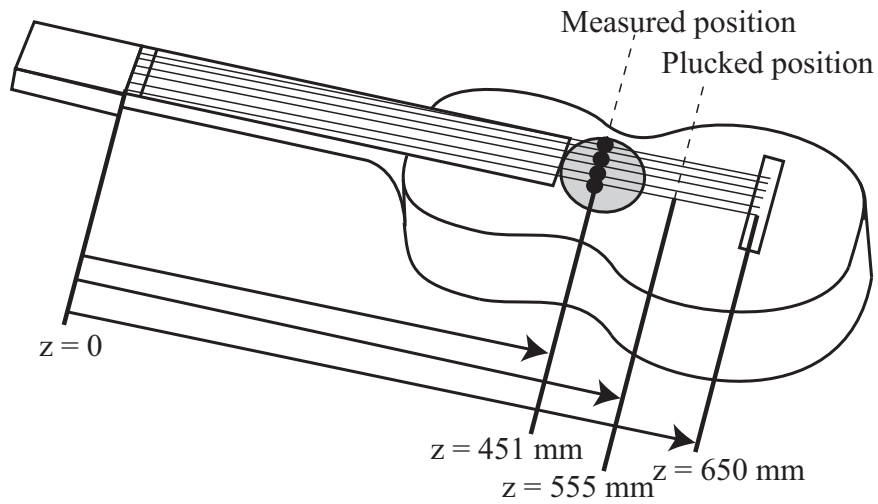


図 5.3 撥弦の際の実験条件

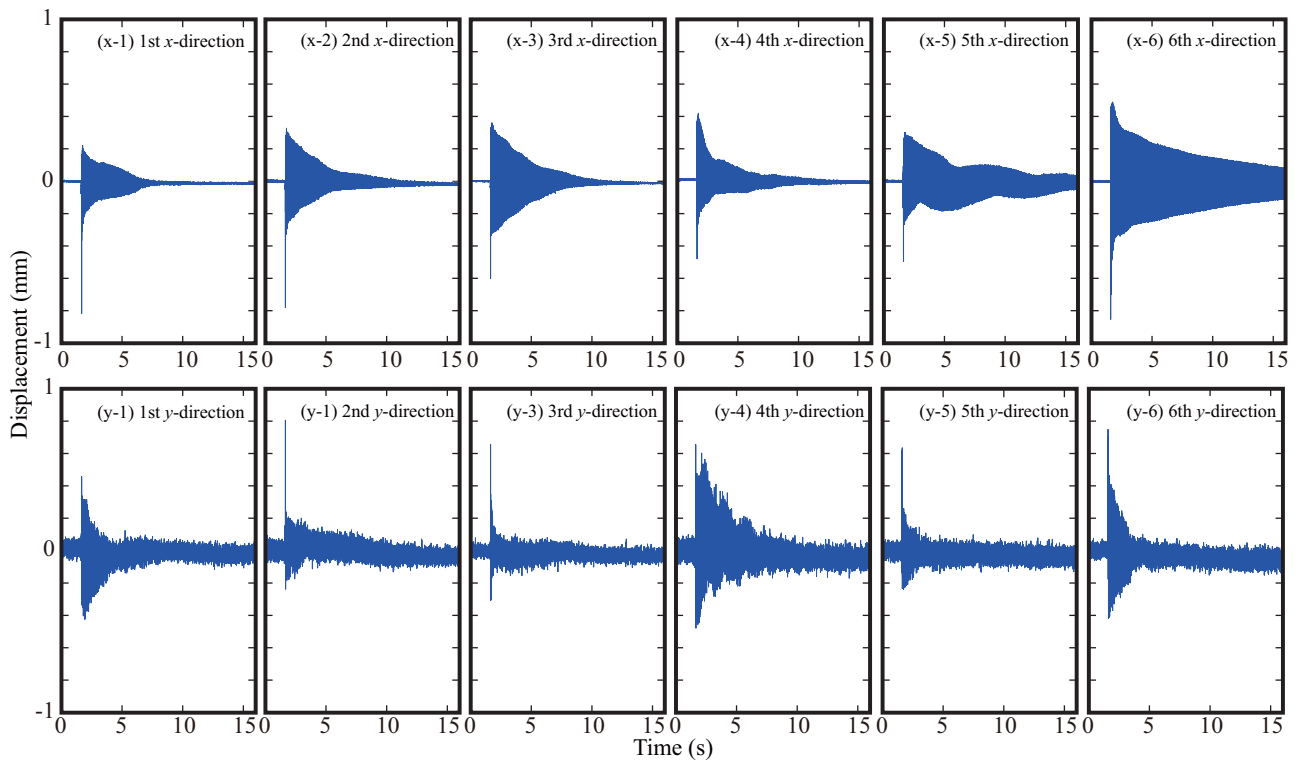


図 5.4 第 1 弦から第 6 弦までのそれぞれの  $x$ ,  $y$  方向の弦振動の計測結果

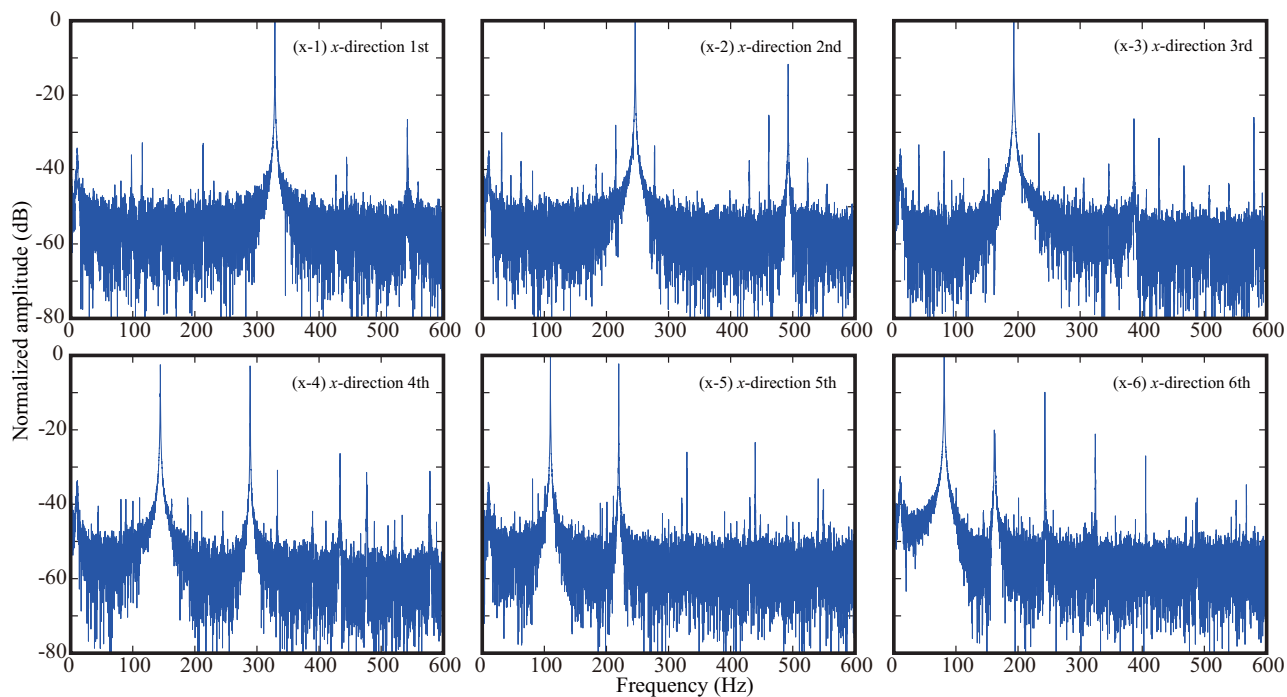


図 5.5 第 1 弦から第 6 弦までのそれぞれの  $x$  方向振動のパワースペクトル

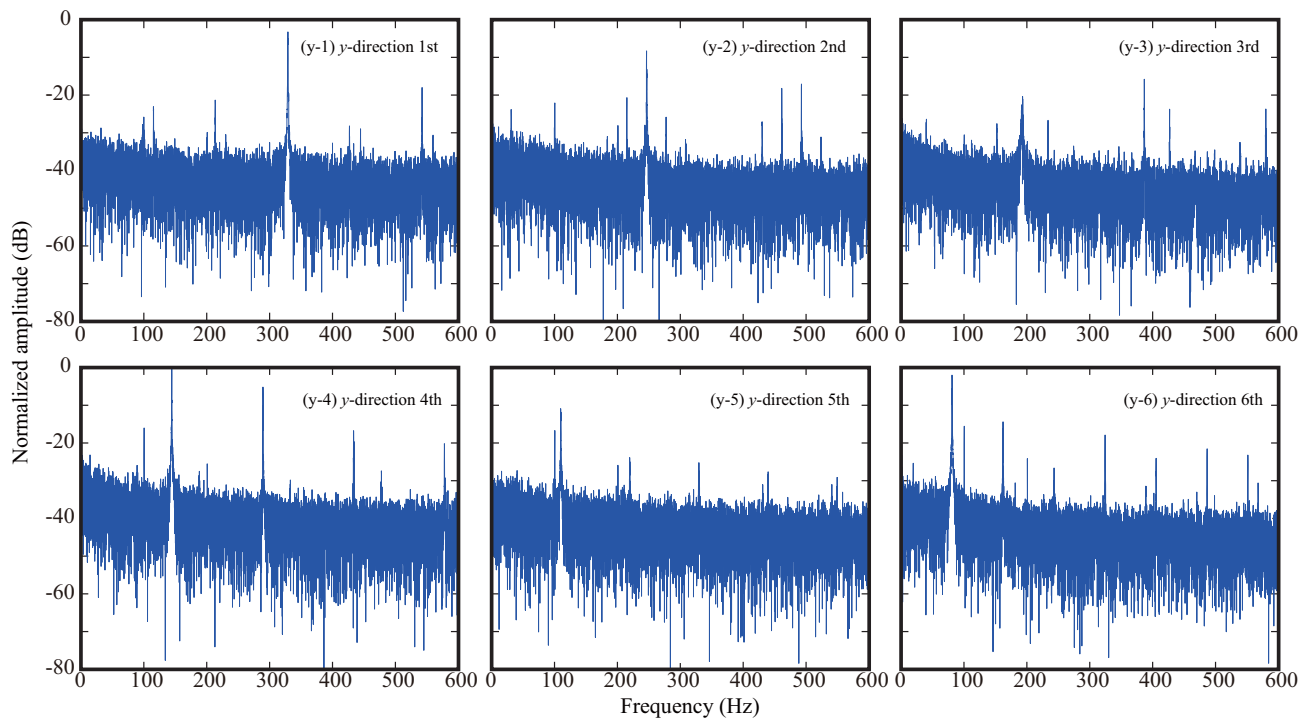


図 5.6 第 1 弦から第 6 弦までのそれぞれの  $y$  方向振動のパワースペクトル

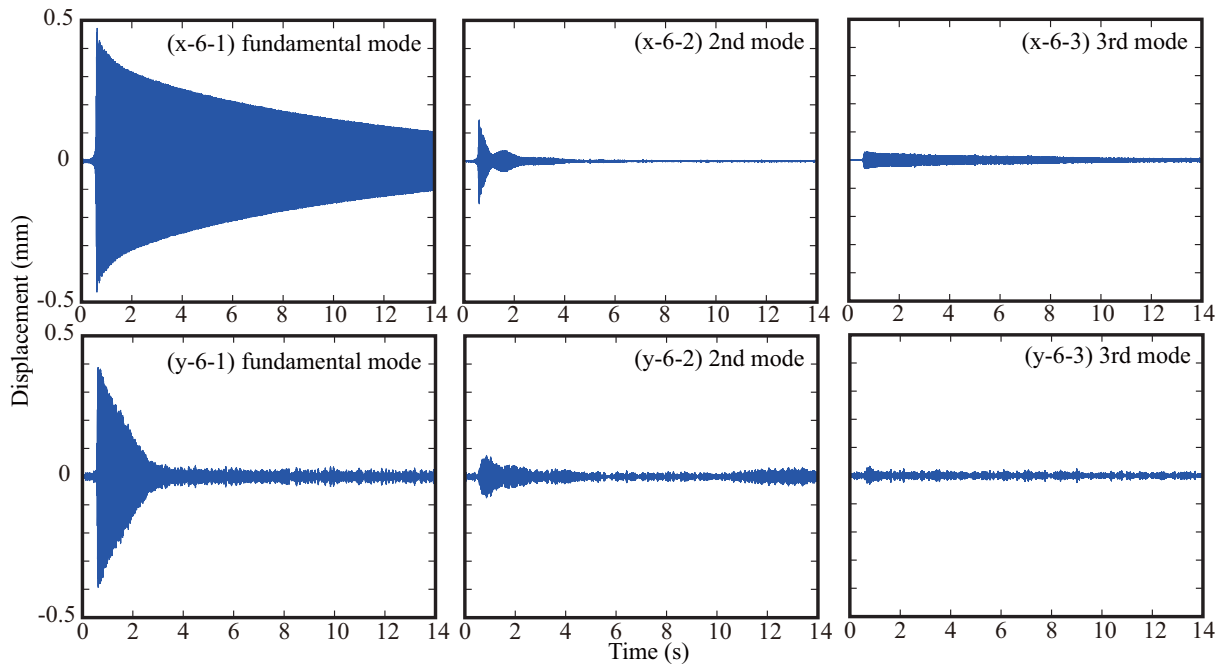


図 5.7 第 6 弦の  $x$ ,  $y$  方向振動の第 1 次, 第 2 次, 第 3 次モード

## 5.4 複数弦振動の共振によるうなりの発生の観測

実際のギターではうなりを発生する他の要因として複数弦による共振がある。これまでピアノにおいて複数弦の共振に関する研究が行われてきた<sup>[8]</sup>が、アコースティックギターにおいてはその報告例は少ない。ピアノとギターにおいては複数弦の間に共振が発生する点では同じだが以下の条件が異なる。

- (1) ピアノでは弦はピンで固定され、ギターでは弦は共鳴胴のサドルに直接固定される。
- (2) ピアノでは低音弦を除けば同じ音高を出力する弦を 2 本ないし 3 本を用いてハンマーで同時に打弦し、ギターではそれぞれ異なる音高を出力する弦が 1 本ずつ張られている。

条件(1)について、ピアノ弦はピンで固定されていることによりハンマーが弦を響板に対して垂直に打弦しているにも関わらずに水平方向に振動が励起されることが報告されている<sup>[22,37,38]</sup>。しかしながらギターの場合はそのようなピンは存在せず、1 本弦における弦の伸びによる幾何学的非線形性による 2 次元の横振動結合によるうなりへの影響があり、うなりの発生の過程がピアノとは異なる。また条件(2)について、ギターの場合は同じ共振周波数をもつ弦が存在しないのでギターでの複数弦の共振について考えるには他の弦の振動モードとの結合を考える必要がある。本節では複数弦の連成振動に着目し、複数弦の振動計測を行った成

果について報告する。

弦長 650 mm に対して各弦の  $z = 451$  mm の位置をマーキングし、 $z = 555$  mm の位置で第 6 弦のみを撥弦した。使用した高速度カメラは CASIO EX-F1 で 1200 frames/s である。計測時間は撥弦直前を含めて約 20 秒である。計測の際の画像の 1 ピクセルあたりの距離は  $x$  方向に 191.6  $\mu\text{m}$ 、 $y$  方向に 202.1  $\mu\text{m}$  である。使用したギター弦は D'Addario EJ16 Light Gauge の第 1 弦から第 6 弦でギターは Morris W-18 である。

図 5.8 にて複数弦振動の計測によって得られた第 6 弦の第 3 次モードと第 2 弦の基本モードの減衰曲線を示す。図 5.8 (a)、図 5.8 (b)にそれぞれ第 6 弦の第 3 次モードの  $x$  方向成分、 $y$  方向成分、図 5.8 (c)、図 5.8 (d)にそれぞれ第 2 弦の基本モードの  $x$  方向成分、 $y$  方向成分の計測結果を示す。またそれぞれの図において横軸は時間と対応しており、撥弦直後のときを 0 としている。第 2 弦は B3 (約 248.5 Hz)の演奏音を出力する弦であることから、E2(約 82.4 Hz)の演奏音を出力する第 6 弦の第 3 次モードと第 2 弦の基本モードとの共振が起こることが予想される。図 5.8 (a)、図 5.8 (b)と図 5.8 (c)、図 5.8 (d)とを比較したときに図 5.8 (b) ではノイズ成分の振幅が大きく見られるがこれは  $u_y$  の変位に伴う弦表面の光の反射による影響が考えられる。図 5.8 (b)と図 5.8 (d)の 0 s 付近の立ち上がり部分に注目すると、第 6 弦の振動が励起されてまもなく第 2 弦が共振を始めたことが分かる。ここで図 5.8 (d)はほとんどうなりを示していない。また図 5.8 (a)と図 5.8 (c)においてうなりが発生していることがわかり、そのうなりの周期は図 5.8 (a)と図 5.8 (c)で異なっている。この第 6 弦の第 3 次モードと第 2 弦の基本モードの共振についてより詳細に考察するために、それぞれの振動モードの撥弦直後の時間帯の減衰曲線に注目する。それぞれの振動モードの 0 s から 2 s 間の減衰曲線をプロットしたものが図 5.9 である。図 5.9 (a)は第 6 弦の  $x$  方向の第 3 次モード、図 5.9 (b)は第 6 弦の  $y$  方向の第 3 次モード、図 5.9 (c)は第 2 弦の  $x$  方向の基本モード、図 5.9 (d)は第 2 弦の  $y$  方向の基本モードについて示す。図 5.9 (b)は約 0.2 s のときに曲線が最大値を示した後に徐々に減衰を始めた。その後、約 0.5 s のときに図 5.9 (b)の曲線は最小値を示した後に徐々に増加を始めた。図 5.9 (d)では曲線は約 0.2 s 後から徐々に増加を始め、約 0.5 s 後に最大値を示した後に減少を始めた。図 5.9 (b)と図 5.9 (d)とを比較したときにそれぞれモード間での振動エネルギーの遷移がギターの駒部を介して発生したことが考えられる。また第 2 弦の  $y$  方向の基本モードの励起に伴い、 $x$  方向の基本モードが励起されたことについては第 2 弦の基本モード

の  $x$  方向に対して直交する方向と表面板が弦に対して振動を励起する方向が完全に垂直ではないことに起因する可能性が考えられる。

図 5.10 に第 6 弦の第 3 次モードのリサージュ図形を示す。図 5.10 (a)は撥弦 0.29 秒後から 30 ms 間(36 フレーム間)の軌跡を示し、図 5.8 (b)は 0.66 秒後から 30 ms 間の軌跡を示す。図 5.10 (a)と図 5.10 (b)の間では回転方向の変化は現れず、概ね円形に近い軌跡が示されている。

図 5.11 に第 2 弦の基本モードのリサージュ図形を示す。図 5.11 (a)は撥弦 0.29 秒後から 30 ms 間(36 フレーム間)の軌跡を示し、図 5.11 (b)は 0.66 秒後から 30 ms 間の軌跡を示す。図 5.11

にて得られたリサージュ図形の軌跡は図 5.10 のものとは異なり直線に近い形を示している。このことから第 2 弦の基本モードにおいて第 6 弦の第 3 次モードから励振される振動は  $y$  方向が支配的であることが考えられる。図 5.11 (a)と図 5.11 (b)を比較にすると、わずかにリサージュ図形の傾きを変えながら、リサージュ図形の回転方向の変化が見られた。このことから

第 2 弦の基本モードにおける  $x$ ,  $y$  方向間において位相差が発生したことが考えられる。これら位相差の発生の原因として、 $x$ ,  $y$  方向間における端点における減衰率の違いに起因する  $x$ ,  $y$  方向間の共振周波数の違いが考えられる。また第 2 弦の基本モードにおいて我々の先行研究で用いた固有モード解析の方法<sup>[39]</sup>を用いて、基本モードの  $x$ ,  $y$  方向間の固有モードの振動

方向を求めたところその角度は表面板の水平な方向に対して約 40 度傾いていた。この傾きが表面板から励振される振動に起因するのか、弦自体の特性に起因するかどうかは定かではないが、このような傾きを持って固有モードが励起されることが本実験によって観測された。

ピアノの場合は弦を固定するピンの傾きによって垂直方向に打弦されたのにも関わらず水平方向の振動が励起されることが報告されている。ピンで固定されていないギター弦の場合は弦の固有モードの方向が表面板に対して傾斜する角度を持つことによって主に表面板から垂直方向の振動が励起されるにも関わらず水平な方向の振動が励起されることを考察した。

本節では撥弦された弦の高次モードが他の弦の基本モードと結合して励振される様子の観測を行ったが、今後はこれまでの研究で扱ってきた弦の伸びに起因する幾何学的非線形性による直交する振動モードの結合を考慮したモデルを用いて、複数弦の連振動の影響も含めたモデリングを行うことが求められる。



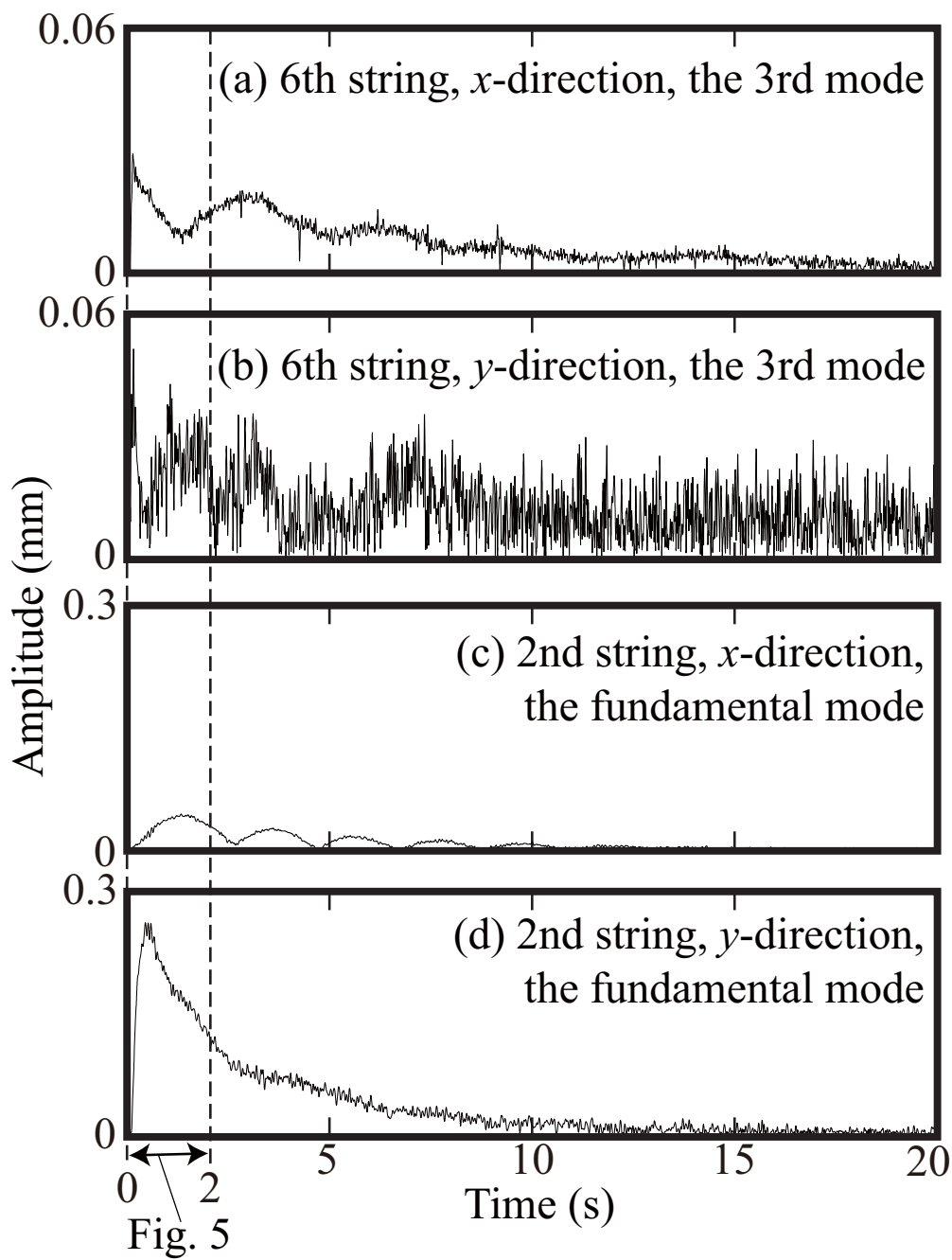


図 5.8 撥弦直後から約 20 秒間の第 6 弦の第 3 次モードと第 2 弦の第 1 次モードの減衰曲線

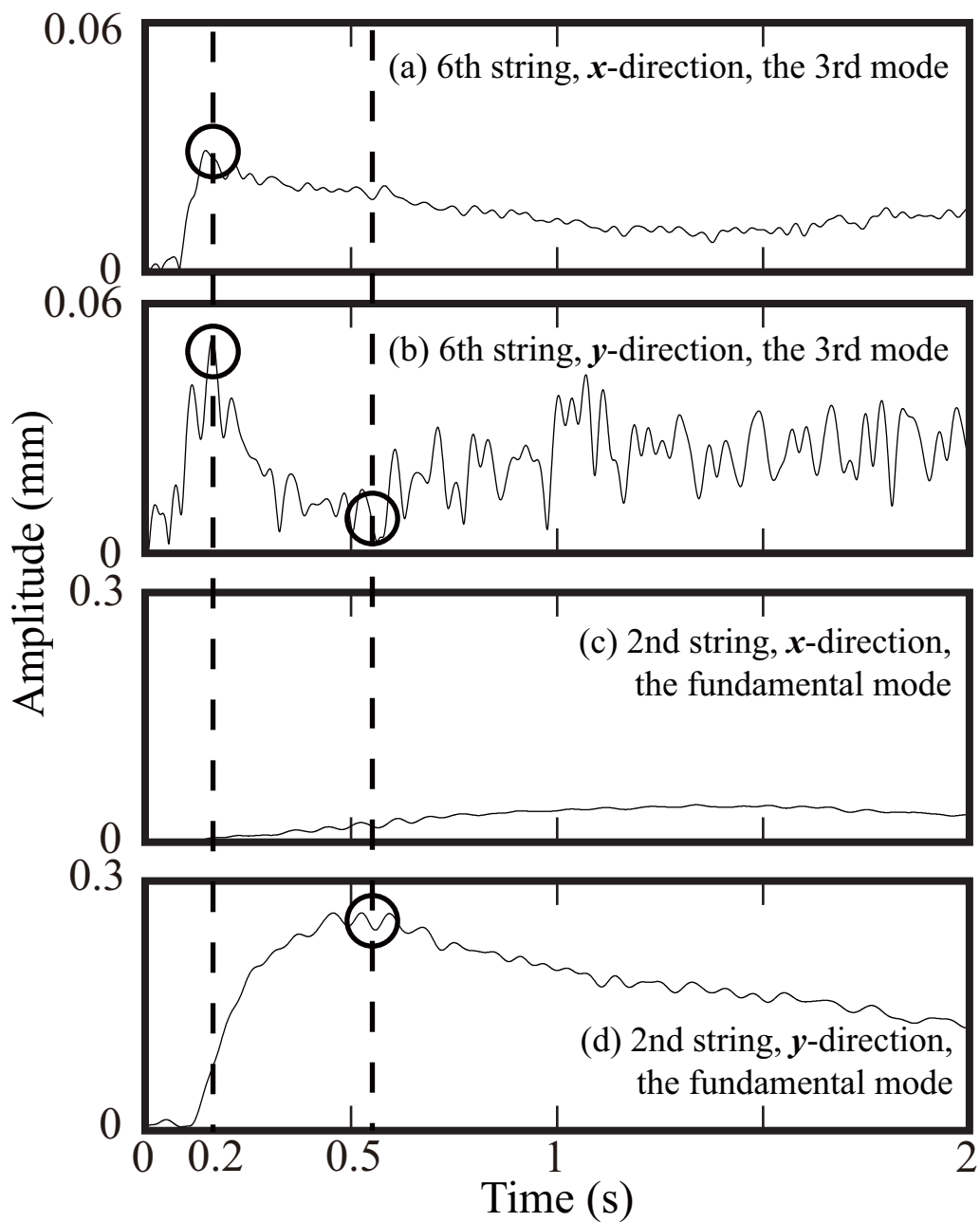


図 5.9 撥弦直後から約 2 秒間の第 6 弦の第 3 次モードと第 2 弦の第 1 次モードの減衰曲線

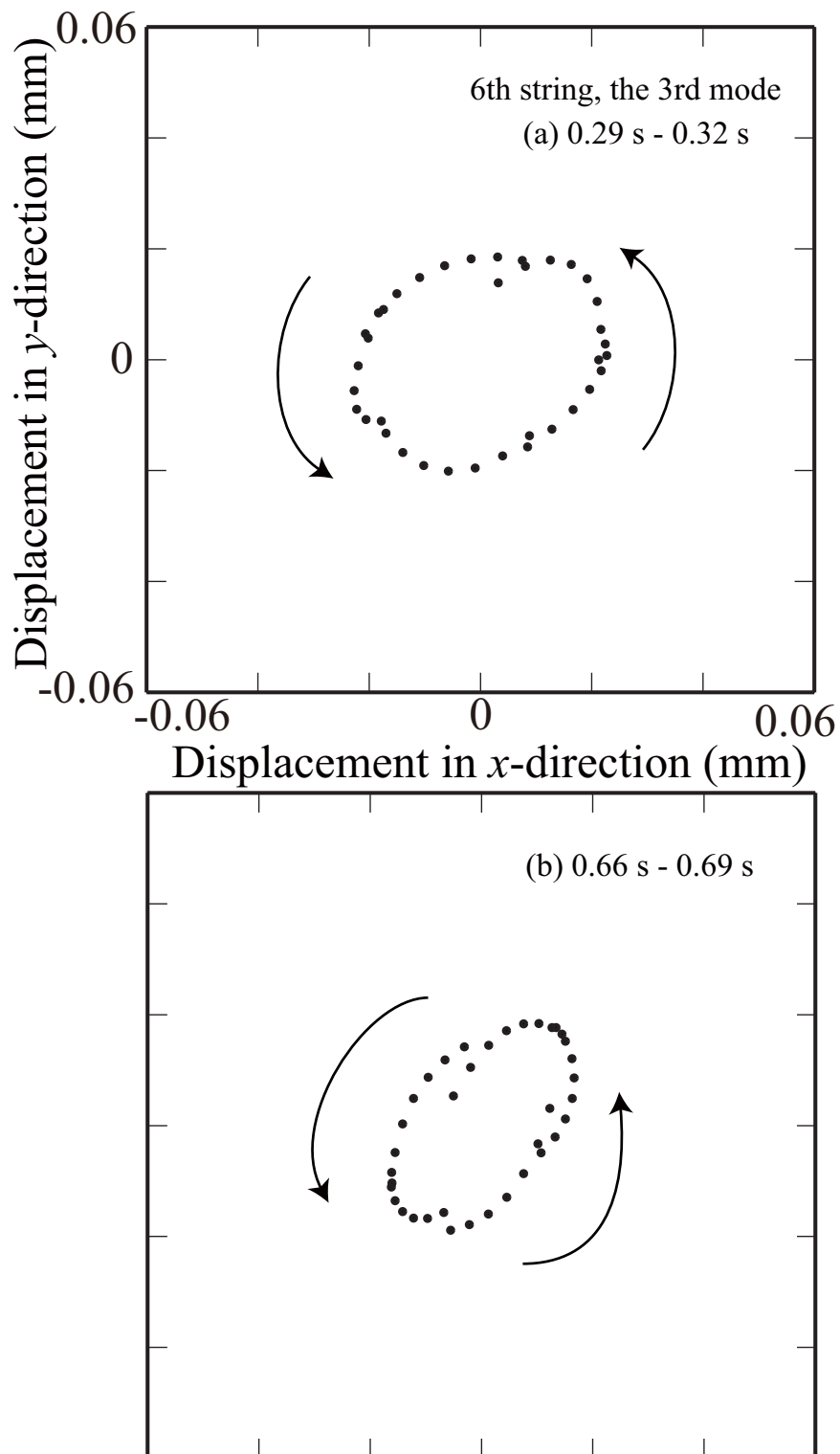


図 5.10 第 6 弦第 3 次モードの振動軌跡

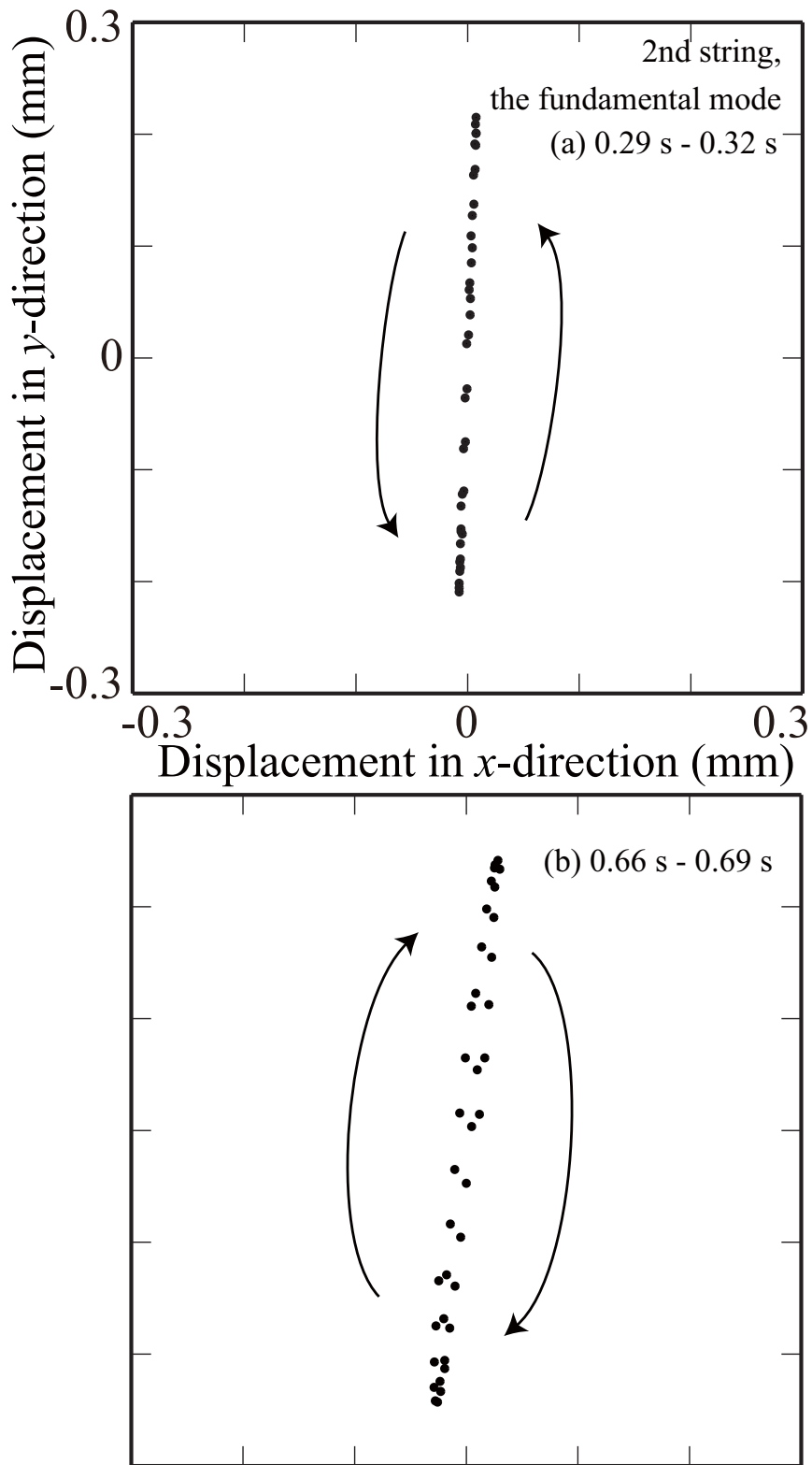


図 5.11 第 2 弦基本モードの振動軌跡

## 5.5 まとめ

本節では実際のギターにおいて複数弦が小さな振幅で振動しているときの第 6 弦の振動に着目した。高速度カメラを用いて複数弦の振動を同時に観測したところ、複数弦をいずれも小さな振幅で撥弦したときの第 6 弦において弦振動のうなりが見られなかった。このことは実際のギターにおいて、ウルフトーンが生じない条件化でかつ複数弦の振動している状況でも、弦の伸びによる復元力と  $x, y$  方向間の固有周波数の違いによる弦振動のうなりへの寄与の方が大きい場合が存在することを示すものである。また複数の弦をマーキングし、高速度カメラを用いて第 6 弦が撥弦された際の第 1 弦から第 6 弦までの 2 次元振動を同時計測した。計測結果より第 6 弦の第 3 次モードと第 2 弦の基本モードとの共振について解析を行った。解析の結果、弦の振動が表面板を介して他の弦との共振を励起し、その後表面板に水平な方向の振動が励起される様子が観測された。この水平方向成分の励起は第 2 弦の基本モードの  $x$  方向に対して直交する方向と表面板が弦に対して振動を励起する方向が完全に垂直ではないことに起因する可能性が考えられる。基本モードの  $x, y$  方向間の固有モードの振動方向を求めたところその角度は表面板の水平な方向に対して約 40 度傾いていた。このことは弦の固有振動の方向が表面板に対して傾斜していることを示唆するものであり、ピンで固定されていないギター弦での水平な方向への振動が励起されるメカニズムの特徴であると考えられる。本実験から複数弦の連成振動により、表面板が励起する振動の方向と固有振動の方向の違いにより弦振動の減衰過程においてうなりが発生することを考察した。今後はこれまでの研究で扱ってきた弦の伸びに起因する幾何学的非線形性による直交する振動モードの結合を考慮したモデルを用いて、複数弦の連振動の影響も含めたモデリングを行うことが求められる。



## 第6章 結論

本研究は弦の横振動における減衰時の非周期的なうなりを再現できるモデルの構築を目的とする。弦の伸長に伴う張力変化に起因する非線形性を考慮した弦の運動方程式を使用することで、減衰時の非周期的なうなりを再現することを試みた。実際のギターに張られた弦の2次元振動を計測する手法を構築し、その計測システムの有効性を確認した。端点が強固な実験系に1本弦を張り、振動振幅に伴う非線形的な復元力と  $x$ ,  $y$  方向間の固有周波数の違いにより減衰過程において非周期的なうなりが発生することを考察した。その後実際のギターにおいて複数弦が小さな振幅で振動しているときの第6弦の振動に着目した。複数弦をいずれも小さな振幅で撥弦したときの第6弦において弦振動のうなりが見られなかった。またピンで固定されていないギター弦の場合は弦の固有モードの方向が表面板に対して傾斜する角度を持つことによって主に表面板から垂直方向の振動が励起されるにも関わらず水平な方向の振動が励起されることを考察した。

これらの過程を通じて、実際のギターにおいて、ウルフトーンが生じない条件化でかつ複数弦の振動している状況でも、弦の伸びによる復元力と  $x$ ,  $y$  方向間の固有周波数の違いによる弦振動のうなりへの寄与の方が大きい場合が存在することが示された。このことは弦楽器の弦-胴との共振による寄与が大きい場合、振幅に由来する弦の伸びがうなりに支配的に寄与する状況があることを明らかにした。また残された課題としては、モデルのパラメータの弦の伸びや減衰に関するパラメータの測定誤差がどの程度までシミュレーション結果に影響するのかを定量的に評価することが考えられる。また複数弦の連振動の影響も含めたモデリングを行うことが求められる。

これらの過程を通じて、これまで注目されてこなかった1本弦においてうなりが発生するメカニズムの解明に貢献することができた。本研究成果は弦楽器の発音機構の解明について、今まで明らかにされてこなかった1本弦の非線形性が演奏音に寄与する現象に関する新たな知見を与えるものである。また本研究にて得られた知見は楽器のみに限定されるものではなく、つり橋のワイヤーなど他の構造物における振動現象への理解にも貢献できるものである。

## 謝 辞

本研究を行うに際し、筑波大学大学院システム情報工学研究科知能機能システム専攻 若槻尚斗准教授には、指導教員として研究内容や実験方法に関して、多くのご指導を頂きました。時には夜遅くまでお時間を割いてご指導をいただき、大変お世話になりました。

筑波大学大学院システム情報工学研究科知能機能システム専攻 水谷孝一教授には、筑波大学第三学群工学システム学類在籍時から筑波大学大学院博士後期課程への進学を快く推して下さいました。そして、私が希望する音楽音響分野に関わる研究テーマを与えてくださっただけでなく、研究に関する多くの助言を頂き、ご指導ご鞭撻を賜りました。

筑波大学大学院システム情報工学研究科知能機能システム専攻 堀憲之教授、藪野浩司教授、海老原格助教、前田祐佳助教には審査員として、本研究に関して多くのご指摘、ご指導を頂きました。

筑波大学大学院システム情報工学研究科知能機能システム専攻 安信誠二教授には副指導教員として、本研究の目的や方向性について多くのご指摘、ご指導を頂きました。

平成 22 年度筑波大学大学院システム情報工学研究科博士後期課程修了 西宮康治朗氏(現 シュルンベルジェ株式会社所属)、平成 23 年度筑波大学大学院システム情報工学研究科博士後期課程修了 佐藤裕治氏(現 防衛省陸上自衛隊所属)には、研究だけでなく本論文の作成においても多くの助言を頂きました。また、お二方を始めとする音楽音響ゼミ・音楽音響ゼミ弦打楽器班・佐藤ゼミの皆様にも、研究において様々な意見を頂きました。

平成 24 年度筑波大学大学院システム情報工学研究科博士後期課程修了 善甫啓一氏(現 産業技術総合研究所所属)、榎田翼氏(現 東芝インフォメーションシステムズ株式会社所属)においては在学時から研究のみならず普段から多くの支援や助言を頂きました。

筑波大学大学院システム情報工学研究科博士後期課程安藤秦雅氏、齋藤佑弥氏、野呂瀬葉子氏、藤田佑樹氏、茂木貴弘氏、黒山喬允氏、青柳将史氏には本研究において多くの意見を頂いたほか、普段から多くの支援を頂きました。

平成 24 年度筑波大学大学院システム情報工学研究科博士前期課程修了 小林昌之氏(現 日立建機株式会社)、筑波大学大学院システム情報工学研究科博士前期課程 2 年 宮ノ原直樹氏には本研究を



進める上での実験装置の作製に際し、多くの支援を頂きました。

また、筑波大学大学院システム情報工学研究科知能機能システム専攻 音響システム研究室の皆様には研究を行う上で多くの助言を頂いただけでなく、日々過ごす上で楽しい思い出をたくさん頂きました。

最後に、音楽音響の研究にたずさわりたいという私の希望を理解し、生活面、精神面など様々な面から支えてくれた家族に深く感謝します。

## 参考文献

- [1] H. Helmholtz, “*On the Sensation of Tone*,” Second English Edition, Dover Publication Inc. (1954).
- [2] 森太郎, 西口磯春, “小特集「物理モデルによる楽器音の合成」にあたって,” 日本音響学会誌, Vol. 65, No. 9, pp. 477-478, (2009).
- [3] C. Besnainou, J. Frelat, K. Buys, “A new concept for string-instrument sound board : the splitting board,” Proc. of the International Symposium on Music Acoust. (ISMA 2010), 26-31 August, 2010, Sydney Convention Centre, New South Wales, Australia, 30- 31 August 2010, Carrington Hotel, Katoomba, New South Wales, Australia, CD-ROM, 4 (4 pages) (2010).
- [4] T. Sumi, T. Ono, “Classical guitar top board design by finite element method modal analysis based on acoustic measurements of guitars of different quality,” *Acoust. Sci. & Tech.* Vol. 29, No. 6, pp. 381-383, (2008).
- [5] A. Glass, K. Fukudome, “Warped Linear Prediction of Physical Model Excitations with Applications in Audio Compression and Instrument Synthesis,” *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, Vol. 2004: June, pp. 1036-1044, (2004).
- [6] D. A. Jaffe, J. O. Smith, “Extensions of the Karplus-Strong Plucked-String Algorithm,” *Computer Music Journal*, Vol. 7, No. 2, pp. 59-69, (1983).
- [7] M. Karjalainen, V. Valimaki, and T. Tolonen, “Plucked-String Models: From the Karplus-Strong Algorithm to Digital Waveguides and Beyond,” *Computer Music Journal*, 22:3, pp. 17-32, Fall 1998, (1998).
- [8] G. Weinreich, Coupled piano strings, *Journal of the Acoustical Society of America* 62, 1474–1484 (1977).
- [9] 大井聖也, 高澤嘉光, 徳弘一路, “連成振動を考慮したギター弦振動のシミュレーション,” 日本音響学会音楽音響研究会資料, Vol. 20, No. 4, MA2001-20, pp. 27-30, (2001).
- [10] Toru Kobayashi, Naoto Wakatsuki, Koichi Mizutani: “Analysis of coupled two-dimensional vibration of guitar string based on normal modes,” *Proceedings of the 18th International Congress on Sound & Vibration (ICSV18)*, Rio de Janeiro, Brazil, CD-ROM, R26-1831 (8 pages) (July, 2011).
- [11] G.S.S. Murthy and B.S. Ramakrishna, Nonlinear Character of Resonance in Stretched Strings, *Journal of the Acoustical Society of America* 38, 461–471 (1965).
- [12] 小林透, 若槻尚斗, 水谷孝一: “硬化バネを持つ非線形振動子による 1 本弦振動のモデル化, -うなり周期における振幅依存性-”, 日本音響学会音楽音響研究会資料, Vol.31, No.3, MA2012-27, pp. 21-24 (2012).
- [13] G.V. Anand, Large-Amplitude Damped Free Vibration of a Stretched String, *Journal of the Acoustical Society of America* 45, 1089–1096 (1969).
- [14] C. Gough, The nonlinear free vibration of a damped elastic string, *Journal of the*

*Acoustical Society of America* **75**, 1770–1776 (1984).

[15] P. M. Morse, “*VIBRATION AND SOUND*,” American Institute of Physics (1991).

[16] 高澤嘉光, 徳弘一路, “弦振動におけるインハーモニシティについて — 第二報,” 日本音響学会音楽音響研究会資料, Vol. 19, No. 4, MA2000-24, pp. 55-64, (2000).

[17] E. Kreyszig, “フーリエ解析と偏微分方程式,” 第8版, 培風館 (2006).

[18] N.H.Fletcher, T.D.Rossing, “*楽器の物理学*,” シュプリンガー・フェアラーク東京 (2006).

[19] 小川真, “アコースティックギターにおける弦振動シミュレーションに関する研究”, 筑波大学理工学群工学システム学類卒業研究, (2010).(当該箇所の抜粋は付録を参照)

[20] 小林透, 若槻尚斗, 水谷孝一: “単一の高速カメラを用いる弦の二次元横振動の非接触計測法,” 電子情報通信学会論文誌 A, Vol. J95-A, No. 7, pp.548-554 (July, 2012).

[21] J. Pakarinen and M. Karjalainen, “An apparatus for measuring string vibration using electric field sensing,” in Proc. of the Stockholm Music Acoustics Conference, pp.739-742, Stockholm, Sweden, Aug. 2003 (2003).

[22] 田中秀幸, 永井啓之亮, 水谷孝一, “ピアノ弦の2次元振動測定,” 日本音響学会誌, Vol.56, No.3, pp.148-155, March 2000 (2000).

[23] N. Lee, A. Chaigne, J. O. S. III, and K. Arcas, “Measuring and understanding the gypsy guitar,” in Proc. of the Int. Symposium on Musical Acoustics, Madrid, Spain, Sept. 2007 (2007).

[24] R. Hanson, “Measurement of Nonlinear Effects in a Driven Vibrating Wire,” J. Acoust. Soc. Am. Vol.96, Issue 3, pp.1549-1556, Apr. 1994.

[25] R. C. Scherer, “Piezo guitar bridge pickup,” U. S. Patent (1966), 561,486, 29th June 1966.

[26] 徳弘一路, 佐藤弘幸, 中島一博, 高澤嘉光, 山屋清彦, “弦振動が支持端に与える2次元力の計測用ピックアップ開発,” 日本音響学会音楽音響研究会資料, Vol.19, No.1, pp.15-22, May 2000 (2000).

[27] G. Johansson, “Visual perception of biological motion and a model for its analysis,” Perception & Psychophysics, Vol.14, No.2, pp.201-211, Aug. 1973 (1973).

[28] 徳弘一路, 三浦高志, 二宮賢, 吉澤友孝, “ギター奏法に対する弦振動の初期状態と定常状態計測,” 日本音響学会音楽音響研究会資料, Vol.19, No.6, pp.139-146, Dec. 2000 (2000).

[29] D. Chadeaux, J.-L. L. Carrou, B. Fabre, L. Daudet, and L. Quartier, “Experimental study of the plucking of the concert harp”, in Proc. of 20th Int. Symposium on Music Acoustics, Sydney, Australia, Aug. 2010 (2010).

[30] R. Y. Tsai, “A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3d machine vision metrology using off-the-shelf tv cameras and lenses”, IEEE Journal of Robotics and Automation, Vol. RA-3, No.4, pp.323-344, Aug. 1987 (1987).

[31] Toru Kobayashi, Naoto Wakatsuki, Koichi Mizutani: “Amplitude dependence of beat on a single string vibration,” Proceedings of the 19th International Congress on Sound & Vibration (ICSV19), Vilnius, Lithuania (July 2012).

- [32] 小林透, 若槻尚斗, 水谷孝一, “弦の伸長を考慮する非線形振動モデルによる不規則なうなりの再現,” 日本音響学会音楽音響研究会資料, Vol.31, No.8, MA2012-66, pp.19-24 (2013).
- [33] Toru Kobayashi, Naoto Wakatsuki, and Koichi Mizutani: "Finite difference simulation of string vibration with nonlinear effect by stretching to analyze irregular interval beat," Proceedings of the 20th International Congress on Sound & Vibration (ICSV20), Bangkok, Thailand, CD-ROM, R25-645 (8 pages) (July, 2013).
- [34] C. V. Raman, “On the 'Wolf note' in bowed stringed instruments,” Philosophical Magazine 32, 391–395 (1916).
- [35] 永井健一, 近藤孝広, 吉沢正紹, 藪野浩司, 矢ヶ崎一幸, “非線形系のダイナミクス,” 第1版, コロナ社 (2007).
- [36] 小林透, 若槻尚斗, 水谷孝一, “高速度カメラを用いるギター弦の2次元振動多点同時計測,” 日本音響学会音楽音響研究会資料, Vol. 28, No. 1, MA2009-5, pp. 29-32 (2009).
- [37] 中村勲, 長沼大介, “ピアノ弦の1本弦における2次元振動の解析,” 日本音響学会音楽音響研究会資料, MA00-3 (2000).
- [38] 高澤嘉光, “1本弦における2次元振動の解析,” 日本音響学会音楽音響研究会資料, Vol. 29, No. 6, MA2010-60, pp. 7-12 (2010).
- [39] 小林透, 若槻尚斗, 水谷孝一: “光学的2次元振動計測に基づくギター弦の固有モード解析,” 日本音響学会音楽音響研究会資料, Vol.30, No.3, MA2011-26, pp. 33-38 (2011).

## 著者文献

### 査読付雑誌論文

(J-1) 小林透, 若槻尚斗, 水谷孝一: "単一の高速度カメラを用いる弦の二次元横振動の非接触計測法," 電子情報通信学会論文誌 A, Vol. J95-A, No. 7, pp.548-554 (July, 2012).

### 査読付国際会議論文

(P-1) Toru Kobayashi, Naoto Wakatsuki, and Koichi Mizutani, "Inharmonicity of guitar string vibration influenced by body resonance and fingering position," Proceedings of the International Symposium on Music Acoustics (ISMA 2010), 26-31 August, 2010, Sydney Convention Centre, New South Wales, Australia, 30- 31 August 2010, Carrington Hotel, Katoomba, New South Wales, Australia, CD-ROM, 41 (4 pages) (2010).

(P-2) Toru Kobayashi, Naoto Wakatsuki, Koichi Mizutani: "Analysis of coupled two-dimensional vibration of guitar string based on normal modes," Proceedings of the 18th International Congress on Sound & Vibration (ICSV18), Rio de Janeiro, Brazil, CD-ROM, R26-1831 (8 pages) (July, 2011).

(P-3) Toru Kobayashi, Naoto Wakatsuki, Koichi Mizutani: "Amplitude dependence of beat on a single string vibration," Proceedings of the 19th International Congress on Sound & Vibration (ICSV19), Vilnius, Lithuania (July 2012).

(P-4) Toru Kobayashi, Naoto Wakatsuki, and Koichi Mizutani: "Finite difference simulation of string vibration with nonlinear effect by stretching to analyze irregular interval beat," Proceedings of the 20th International Congress on Sound & Vibration (ICSV20), Bangkok, Thailand, CD-ROM, R25-645 (8 pages) (July, 2013).

### 報告

(1) 小林透, 若槻尚斗, 水谷孝一, "ギター弦の二次元振動測定," 日本音響学会音楽音響研究会資料, Vol. 27, No. 6, MA2008-47, pp. 29-32 (2008).

(2) 小林透, 若槻尚斗, 水谷孝一, "高速度カメラを用いるギター弦の2次元振動多点同時計測," 日本音響学会音楽音響研究会資料, Vol. 28, No. 1, MA2009-5, pp. 29-32 (2009).

- (3) 小林透, 若槻尚斗, 水谷孝一, “高速度カメラを用いる 2 次元振動測定によるギター弦の振動モードの観測,” 日本音響学会 2009 年秋季研究発表会講演論文集, CD-ROM, pp. 857-860 (2010).
- (4) 小林透, 若槻尚斗, 水谷孝一, “高速度カメラで観測する共鳴胴が弦振動に与える影響,” 日本音響学会音楽音響研究会資料, Vol. 28, No. 5, MA2009-44, pp. 1-4 (2009).
- (5) 小林透, 若槻尚斗, 水谷孝一, “弦-胴連成モデルを用いるギター弦における非調和性の解析,” 日本音響学会音楽音響研究会資料, Vol. 28, No. 8, MA2010-2, pp. 7-12 (2010).
- (6) 小林透, 若槻尚斗, 水谷孝一: “光学的 2 次元振動計測に基づくギター弦の固有モード解析,” 日本音響学会音楽音響研究会資料, Vol.30, No.3, MA2011-26, pp. 33-38 (2011).
- (7) 小林透, 若槻尚斗, 水谷孝一: “硬化バネを持つ非線形振動子による 1 本弦振動のモデル化, -うなり周期における振幅依存性-”, 日本音響学会音楽音響研究会資料, Vol.31, No.3, MA2012-27, pp. 21-24 (2012).
- (8) 小林透, 若槻尚斗, 水谷孝一: “弦の伸長を考慮する非線形弦振動モデルによる不規則なうなりの再現,” 日本音響学会音楽音響研究会資料, Vol.31, No.8, MA2012-66, pp.19-24 (2013).

## 受賞

- (1) 小林透 日本音響学会音楽音響研究会奨励賞, 11 月 2008.
- (2) 小林透 筑波大学 知能機能システム専攻長表彰, 3 月 2011.
- (3) 小林透 筑波大学 知能機能システム専攻優秀修士論文賞, 3 月 2011.

## 著者紹介



小林 透(こばやし とおる)

1984年8月26日、富山県高岡市にて生まれ、石川県金沢市にて育つ。2005年4月、筑波大学第三学群工学システム学類入学。2009年3月、同学卒業、学士(工学)取得。2009年4月筑波大学大学院システム情報工学研究科知能機能システム専攻博士前期課程入学。計測に基づくギター弦振動のモデリングに関する研究に従事。2011年3月、同専攻修了、修士(工学)取得。2011年4月筑波大学大学院システム情報工学研究科知能機能システム専攻博士後期課程入学。2014年3月、同専攻修了、博士(工学)取得予定。2008年11月に日本音響学会音楽音響研究会奨励賞を受賞。日本音響学会学生会員、IEEE 学生会員、IEEE Communication Society 学生会員、Acoustical Society of America 学生会員。課外活動として2010年度よりIEEE Tokyo Young Researchers Workshop に所属し、実行委員として様々な専門分野の若手研究者を対象とする分野横断的な学会の企画・運営に実行委員として貢献してきた。また2013年度より筑波大学知能機能システム専攻博士学生会の一員として学内交流会や Hack U at University of TSUKUBA などの学内企画の運営に貢献した。これらの課外活動の他に、音楽音響の研究に興味を抱いたきっかけである、趣味としてクラシックギターの演奏活動も行い、2009年10月にベトナム・ハノイで行われた音楽交流活動に参加し、ベトナム・日本人材協力センター(VJCC)での交流事業として行われたコンサートにて現地音楽家とともに演奏した。また2013年8月にイタリアのシエナ・フィレンツェにてプロ演奏家も含めた社会人音楽団体の一員として演奏活動を行った。

$$y(L, t) = F_y(t) * h(t), \quad (15)$$

と表すことが出来る. ここで  $h(t)$  はギター胴の機械アドミタンスを逆フーリエ変換し, 時間について積分したものであり, シミュレーション前に予め求めておくことが出来る.  $F_y(t)$  は弦の変位をシミュレーションする中で順次求めていく.  $F_y(t)$  は弦の張力を  $\sigma$  として  $\sigma \sin \theta$  で表されるが,  $\theta$  は十分小さいと考えられるため  $\sin \theta$  を  $\tan \theta$  で近似する.  $\tan \theta$  は弦の傾きを表すので偏微分で表せる. よって  $F_y(t)$  は

$$F_y(t) = \sigma \sin \theta, \quad (16)$$

$$\cong \sigma \tan \theta = \sigma \frac{\partial y(t, L)}{\partial x},$$

となり, 右辺微分項をシミュレーション中に順次求めることで  $F_y(t)$  を得る.

以上から畳み込みによってギター胴とギター弦の結合点である駒部の境界条件を設定する.

### 3 機械アドミタンス計測

#### 3-1. 機械アドミタンスの計測原理

ギター胴に加速度センサを取り付け, 加速度センサの付近をインパルスハンマにて叩く事でギター胴の機械アドミタンスを計測する. ここで機械アドミタンスは単位力で駆動したときの応答速度を表し, SI 単位は  $m/N \cdot s$  で表される. ギター胴の一点をハンマで叩いたときの入力インパルスを  $f(t)$ , 応答速度を  $g(t)$  とすると, それらをフーリエ変換した  $F(j\omega)$ ,  $G(j\omega)$  を用いて, 機械アドミタンス  $Y(j\omega)$  は次式のように表される.

$$Y(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{F(j\omega)}. \quad (17)$$

本研究では叩いた力を計測できるインパルスハンマを製作し, 入力インパルスの計測にはインパルスハンマを用いた. また応答速度の計測には加速度センサを用い, 数値積分により加速度から速度を導出した. 加速度は単位時間での速度の増分を表しているため, 速度を求めるには加速度と微小時間の積を足しあわせれば良い. サンプル周期を  $dt$ , 加速度を  $a(t)$  とすると速度  $v(t)$  は

$$v(0) = v_0, \quad (18)$$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(\tau) d\tau, \quad (19)$$

と表せる.  $v_0$  は初期速度,  $\tau$  は積分変数である. こ

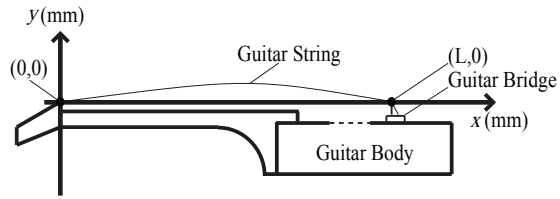


図 2: ギター上の座標設定

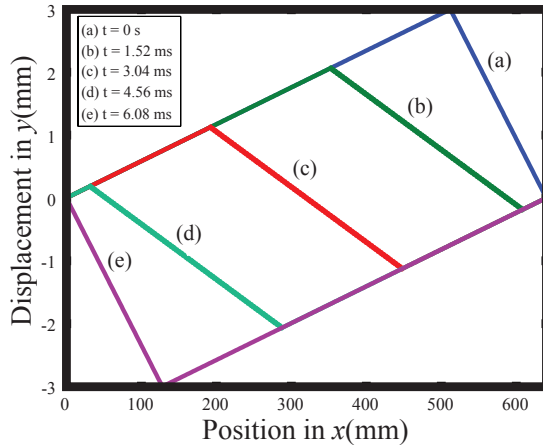


図 3: 弦振動シミュレーション結果の一例

表 2: 弦振動シミュレーションの各定数

弦長	640 mm
弦の分割数	400
つまむ位置	$x=512$ mm
つまむ高さ	$y=3$ mm
弦の振動周波数	82.41 Hz, 音高 E2
弦の線密度	0.015 kg/m

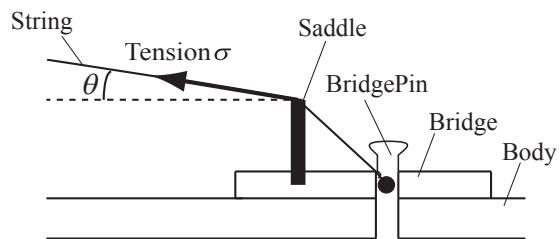


図 4: ギター駒部の様子

れより加速度から速度を導出する.

#### 3-2. インパルスハンマの製作

製作したインパルスハンマの概要図を図 5 に示す. 柄にはマホガニーの角材を, ハンマの頭には  $10 \times 10 \times 15$  mm<sup>3</sup> のアルミ片を用いた. アルミ片の一面に圧



電素子と樹脂で作られた円錐を貼り付ける。圧電素子は圧電体を 2 枚の電極で挟んだもので、圧電体は外部から加えられた歪みや電荷を打ち消すように電荷や歪みを生ずる特性を有する。この特性を利用し、ハンマ先端の歪みを電荷に変換する事でハンマ先端に加わった力を計測する。

圧電体による圧電効果は式(20),(21)に示す圧電基本式によって記述される<sup>9)</sup>。圧電体に加わる応力  $T$  と電界  $E$  によってひずみ  $S$  と電気変位  $D$  が生ずる。但し応力  $T$ 、電界  $E$ 、ひずみ  $S$ 、電気変位  $D$  はそれぞれベクトルであり、 $S^E$  は弾性コンプライアンス行列、 $d$  は圧電歪定数行列、 $\epsilon$  は誘電定数の行列である。

$$S = s^E T + dE. \tag{20}$$

$$D = dT + \epsilon^T E. \tag{21}$$

本研究では圧電素子の電極面に垂直な方向の応力のみを扱ったため、その応力  $F$  と同方向に関する圧電歪定数  $d_{33}$  を用いれば、電極間に生じる電荷  $Q$  は以下のように表せる。

$$Q = Fd_{33}. \tag{22}$$

圧電素子は静電容量を持っているため、生じる電圧は

$$V = \frac{Q}{C_d} = F \frac{d_{33}}{C_d}, \tag{23}$$

と表せる。 $C_d$  は圧電素子の静電容量を表す。平行板間の静電容量は比誘電率  $\epsilon_s$ 、真空の誘電率  $\epsilon_0$ 、平行板間隔  $d$ 、平行板面積  $A$  を用いて

$$C_d = \frac{\epsilon_s \epsilon_0 A}{d}, \tag{24}$$

と表せる。今回用いた圧電素子は富士セラミックスの C-213 で、この素子の圧電歪定数  $d_{33}$  は 324 pm/V、 $\epsilon_s$  は 1505 である。したがってこのインパルスハンマの単位応力あたりの出力電圧(感度)は 0.24 V/N となる。

圧電素子の両電極に発生する電荷は実際には僅かであり圧電素子の出力インピーダンスは高いため、圧電素子の出力をそのまま計測器で計測することは不適切である。そこで今回はオペアンプ IC を用いてボルテージフォロワを構成し、インピーダンス変換を行った。図 6 にこの回路図を示す。このとき圧電素子の静電容量とボルテージフォロワの入力抵抗がハイパスフィルタを構成する、そのカットオフ周波数をなるべく下げるためボルテージフォロワの入力抵抗の値は大きくしなければならない。オペアンプ IC は入力段が J-FET である高入力インピーダンスの NJM072D を利用し、回路の抵抗  $R$  もなるべく高い抵

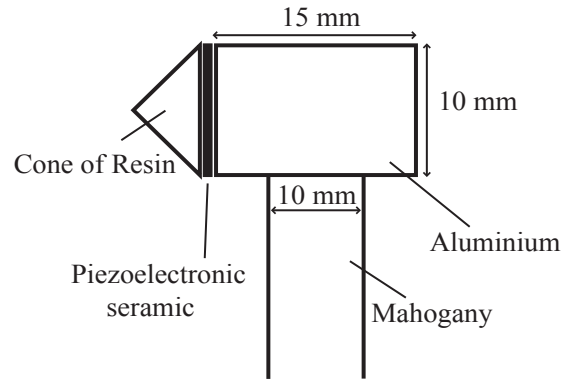


図 5: インパルスハンマの概要図

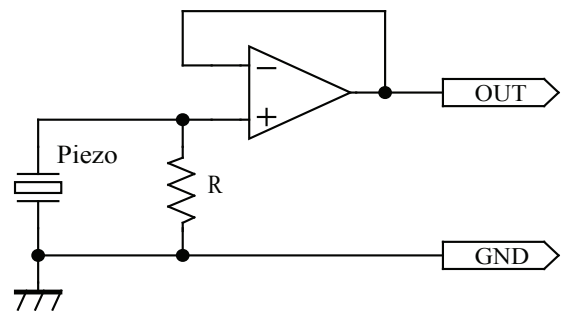


図 6: ボルテージフォロワ回路図

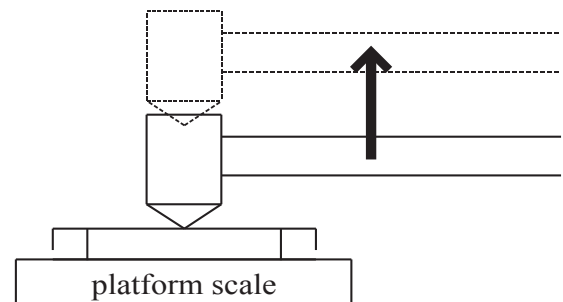


図 7: インパルスハンマの校正

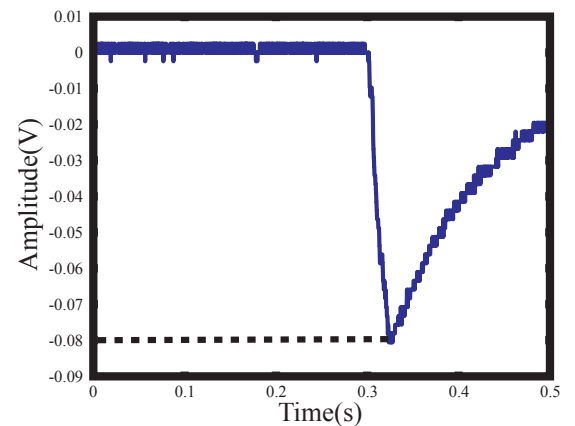


図 8: 校正時の出力電圧

抗値のものを用いた．ハイパスフィルタのカットオフ周波数 $f_c$ を用いて回路の入力インピーダンス $R$ は、

$$R = \frac{1}{2\pi C_d f_c}, \quad (25)$$

と表せる． $f_c$ を1 Hz とする場合 $R$ はおおよそ120 M $\Omega$ となる．よって回路の抵抗 $R$ には比較的入手しやすかった100 M $\Omega$ を利用し、カットオフ周波数はおおよそ1.3 Hz となった．また圧電素子とボルテージフォロワ回路の間隔はなるべく短い方がノイズに強くなるため、回路はハンマの柄の上に実装した．以下、特に断りの無い限りボルテージフォロワ回路の出力をインパルスハンマの出力として記述する．

製作したインパルスハンマの感度は理論値通りにはならず、誤差が生じた．これは配線による圧電素子の静電容量の変化や、円錐による応力の分散などによる．そのため台ばかりを用いて感度を実測した．**図7**に示すように台ばかりにインパルスハンマの頭を置いて静止させれば、自重により圧電素子に圧力が掛かる．そして瞬時にインパルスハンマの頭を持ち上げると、その瞬間圧電素子にはそれまで掛かっていた力を取り除く力、すなわち相対的に引っ張り力が働く．この引っ張り力は自重による圧力に等しく、ハンマからは自重による圧力に対応する電圧が出力されるため、単位力あたりの出力電圧を計測する事が出来る．出力されるのは引っ張り力による電圧であるため電圧値が負になる．台ばかりが27.1 gを指していたときの出力電圧波形を**図8**に示す．**図8**から27.1 gで0.08 Vの電圧が出力されることが分かる．これを十回行い、平均する事で単位力あたりの出力電圧を算出した結果、0.305 V/Nであり、理論値とは27%異なる結果になった．インパルスハンマの出力電圧をハンマで与えた力に換算するために実測値を用いる．

製作したインパルスハンマを実際に使用した際の出力波形とその周波数特性を**図9**に示す．これはハンマで机を軽く叩いたときの出力電圧の時間波形とパワースペクトルである．後述する加速度センサでは1.5 kHz以上の振動を正確に計測出来ないため本研究では1.5 kHz未満の帯域で利用する．**図9**から1.5 kHz未満の帯域では共振ピークが無いことが観察されるため、自作であるがこのインパルスハンマは計測に利用出来ると考えられる．

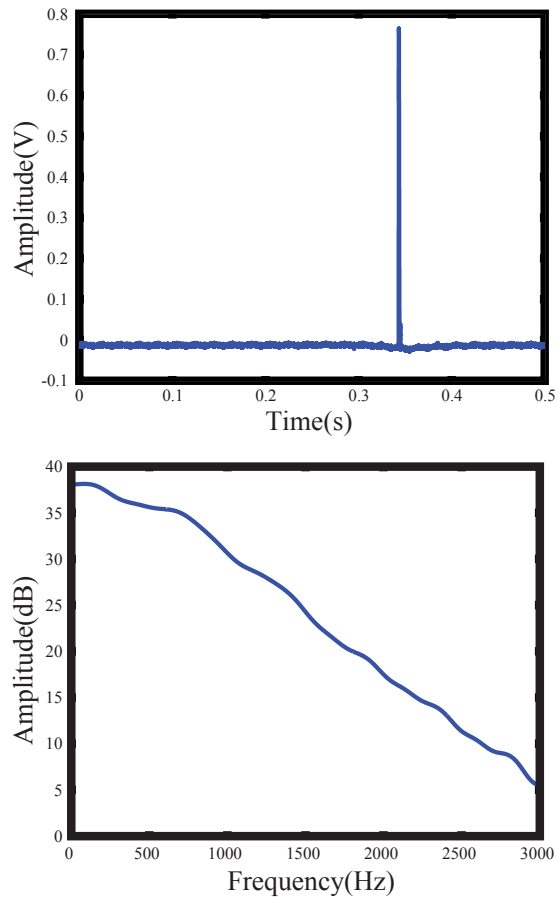


図9: インパルスハンマの出力波形と周波数特性

### 3-3. 機械アドミタンスの計測

**図10**に示した2点にそれぞれ加速度センサと打点を設定し、叩く際は加速度センサの観測範囲内の衝撃を与える事に注意した．加速度センサには、カイオニクス社の3軸加速度センサモジュールKXM52-1050を利用した．このセンサは±2 Gの加速度、1.5 kHz未満の周波数域で加速度を電圧として出力するものである．加速度と電圧の比は電源電圧に依存して決まり、出力電圧の誤差範囲は電源電圧の10%である．

計測したインパルスハンマの出力電圧と加速度センサの出力電圧を**図11**に示す．これよりギター胴の機械アドミタンスを導出すると、**図12**のような結果が得られた．**図12**中のマークは8つの共振ピークを示しているが、このようにギター胴は複数の共振周波数を持っていることが観察できる．この結果から、ギター胴を複数の共振周波数を持つ共振系でモデル化出来ると考えられる．