人文地理学研究　XX　229～240　1996

人文地理学におけるラプラシアンの利用について

井　上　　孝*

Ⅰ　は　じ　め　に

ラプラシアン（Laplacian）は，熱伝導や波動等の物理現象を数式として記述する際に欠くことのできない演算子であり，フランスの数学者 Laplace によって考案されたことからこの名がある．この演算子には偏微分の概念が用いられているので，これを含む方程式はすべて何らかの偏微分方程式の形態をとる．ラプラシアンを含む偏微分方程式にはいくつかの基本型があり，この演算子を利用した数理モデルは，それらの基本型で表されるか，もしくはそれらの発展型として分類される．なお日本では，ラプラシアンを Laplace 演算子または Laplace 作用素とも呼ぶ．

一般にラプラシアンは，任意の n 次元空間において定義可能であり，また定義される空間の座標系を問わない．しかし，地理学において通常に議論される空間は2次元であり，その座標系には直交座標系が用いられる．したがって，本稿では，2次元直交座標系すなわち xy 平面座標系におけるラプラシアンのみを扱う．この場合のラプラシアンは，以下のように定式化される．すなわち，2次元直交座標（x，y）に対して関数 $f(x, y)$ が定義され偏微分可能であるとき，f の偏微分 $\partial^2 f/\partial x^2+\partial^2 f/\partial y^2$ を $\nabla^2 f$ と表し，この演算子 ∇^2 をラプラシアンと呼ぶ．∇^2 は形式的に次のように表される．

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad (1)$$

ラプラシアンを式中に含む偏微分方程式は，大きく分けると，放物型，双曲型，楕円型の3種に分類され[1]，さらにそれぞれの型は数種の基本型から構成される．そのうち人文地理学において主として扱われてきたものは，放物型のなかの熱伝導方程式，ならびに，楕円型のなかの Laplace 方程式と Poisson 方程式の3つである．熱伝導方程式，Laplace 方程式，Poisson 方程式は，それぞれ，式（2），（3），（4）で表される．

*青山学院大学経済学部

$$\frac{\partial f}{\partial t}=k\nabla^2 f \tag{2}$$

$$\nabla^2 f=0 \tag{3}$$

$$\nabla^2 f=g(x,\ y) \tag{4}$$

ただし，t は時間，k は定数を表し，$g(x,\ y)$ は座標 $(x,\ y)$ に対して定義される，f と異なる偏微分可能関数を意味する．また，式（３），（４）を比較すれば分かるように，Laplace方程式はPoisson方程式の特殊な形といえる．なお，これらの３つの方程式のなかで人文地理学への応用例がもっとも多いのは，熱伝導方程式（式（２））である．したがって，ラプラシアンを利用した地理的モデルは，基本的には熱力学のアナロジーによって構築されたモデルといえる．

一方，人文地理学における数理モデルの多くは，物理学のアナロジーに基づいて構築されてきたものであり（Chorley，1964），ラプラシアンを利用した地理的モデルも，当然そのカテゴリーに含まれる[2)]．しかし，物理学に基づく地理的モデルの大部分は力学と統計力学の概念を応用したものであり（水野，1992），ラプラシアンなどの熱力学を基礎におくモデルは例外的である．すなわち，ラプラシアンを用いた地理的モデルは，力学・統計力学に基づくモデルに比べるといまだ十分に考察・検討されていない状況にある（水野，1992）．ただし，近年，Puu（1982，1984，1991），水野（1992），中谷(1992)らによって，ラプラシアンを用いたモデルの１つであるHotellingモデル(後述する式(12)，(13)，(14))が取り上げられており，人文地理学における熱力学のアナロジーならびにラプラシアンの意義について，議論が活発になりつつある．しかし，ラプラシアンを利用したこれまでの地理学的研究は，いずれも，ラプラシアンの意味について，それぞれの研究対象である個々の地理的現象（たとえば，人口移動現象）の範囲内で論じているにすぎない．すなわち，ラプラシアンによって記述される地理的現象を横断的にとらえたうえでその意味について考察した研究は，皆無なのである．

そこで本稿では，人文地理学の数理モデルにおいてラプラシアンがどのような意味をもつかを総括的に議論するとともに，この演算子を利用して構築されたこれまでのモデルを整理し，それらを相互に比較する．本稿は，まず第Ⅱ章において，さまざまな角度から人文地理学におけるラプラシアンの意味を考察する．次に，この考察をふまえたうえで，第Ⅲ章においてラプラシアンを利用した各種の地理的モデルについて議論する．

Ⅱ　人文地理学におけるラプラシアンの意味

本章では，人文地理学におけるラプラシアンの意味を考察するにあたり，まずその背景にある「地理的場の理論」（geographical field thoery）について第１節で検討を加える．次に，第２節では，地表空間におけるラプラシアンの図形的意味について，他の演算子との関係に視点をおいて議論を試みる．最後の第３節では，ラプラシアンの図形的意味をさらに明確に捉えるため，ラプラシアンを差分化したうえで，メッシュデータ化された地理分布に対してそれがどう作用するのかを考察する．

Ⅱ－１　地理的場の理論とその展開

前述のように，ラプラシアンはさまざまな物理現象を記述するために考えだされた演算子の１つである．こうした演算子は，物理学における「場」の理論のなかに位置づけられるが，この概念を地理学に応用したものが「地理的場の理論」である．したがって，人文地理学におけるラプラシアンの意味を考える際には，その理論的背景となる地理的場について理解しておく必要がある．そこで本節では，「場」の理論，ならびに，同理論の１つでありラプラシアンと密接に関係するポテンシャル理論（potential theory）について，地理学と物理学の両方の見地から検討する．つづいて，地理的場の理論が従来の研究のなかでどのように展開されてきたかについて考察する．

１）「場」の理論

「場」（field）とは，一定の領域内の空間座標（x，y，z）に対してある物理量が関数として与えられたとき，その領域と関数を合わせた概念をいうが，対象とする物理量の種類によってスカラー場とベクトル場に区別される．スカラー場の例としては，気温・気圧・電位の分布などがあり，ベクトル場の例としては流体中の速度の分布が考えられる．ラプラシアンは，ある座標上に定義された関数に対する１つの作用とみなせるから，まさしく，こうした「場」の概念を前提としていることになる．

一方，「地理的場」とは，石水（1976）によれば，地表および地表事象に内在する空間的諸要素の集まり――地理的空間（geographical space）と呼ばれる――が空間的秩序を発生させる際の，その作用空間をさす．端的に言えば，地理的場は，地表空間とそこに空間的秩序をつくる関数との組み合わせとみなせる．したがって，「場」の概念の基本部分については物理学と地理学に違いはない．しかし，地理的場は，その領域が地表平面（x，y）にほぼ限定されること，ならびに，関数のアウトプットが種々の地理的変量であること，の２点において物理学上の「場」と異なる．

地理的場において議論される関数は，その多くが時間tを含めた３変量関数 $f(x, y, t)$ である．また，これらの関数は任意の領域において連続かつ偏微分可能であることを前提としている．したがって，地理的場の空間的性質については，数学（とくに微積分）の概念を用いて多様に分析することが可能であり，「地理的場の理論」には，当然そうした種々の数学的手法が含まれる．すなわち，地理的場の理論とは，地理的事象の規則性を「場」を通じて追求する方法論の集まりであるといえよう．

なお，地理的場にも，物理学上のそれと同様にスカラー場とベクトル場の２種類がある．スカラー場は，上述の関数 $f(x, y, t)$ の被説明変数がスカラー量の場合であり，その例として，人口密度，地代（land rent），「場所の効用」（place utility）などのほかに，後述するポテンシャルがある．これに対してベクトル場では，通常，関数 $f(x, y, t)$ の出力が平面ベクトルとなる．すなわち，地理学で議論されるベクトル場は，出力されるベクトルが２成分（x成分とy成分）からなりそのいずれもがx，y，tの関数として表現されるような「場」である．こうした平面ベクトルの例としては人口や交通の流動があげられるが，この例では，平面ベクトルの向きと大きさがそれらの流動の向きと大きさを表す．

２）ポテンシャル理論

ベクトル場$\boldsymbol{A}$の成分を（A_x，A_y）とするとき以下の２つの式（５），（６）を満たす関数fが存在す

るならば，f を $\boldsymbol{A}$ のポテンシャルと呼び，座標（x，y）と f とによって定義されるスカラー場をポテンシャル場という．

$$A_x = -\frac{\partial f}{\partial x} \tag{5}$$

$$A_y = -\frac{\partial f}{\partial y} \tag{6}$$

地理学において議論されるポテンシャル場は，一般にベクトル $\boldsymbol{A}$ が空間的相互作用力（spatial interaction）を表す場合である（Sheppard, 1979）．たとえば，ある領域において，人口規模に比例し距離の２乗に反比例するような空間的相互作用力が存在すれば，その相互作用力のポテンシャルを想定することができ，それがいわゆる人口ポテンシャルになる．すなわち，人口ポテンシャルはそのような相互作用力を生じさせるような潜在力として位置づけられ，こうした潜在力の分布する領域がまさしくポテンシャル場となる．

３）地理的場の理論の展開

人文社会現象に最初に「場」という呼称を用いたのは，心理学であると考えられている．Lewin（1951）は，時間と空間を統合した「場」の理論によって人間の行動を規定した．人文地理学においては，Stewart and Warntz（1961）が人口ポテンシャル概念を「場」の理論に基づいて確立している．ポテンシャル場の基本的な概念はその後，Curry（1978a），Sheppard（1979）らが連続関数，マルコフ連鎖，無限ユークリッド空間等の概念を用いて発展させた．

「場」の概念は，さまざまな地理的事象へ適用されつつある．Wolpert（1965）は，「場所の効用」によって定義された行動空間（action space）の概念を確立した．Puu（1978）は自らが提示した輸送モデルのなかで，任意の地点における輸送コストをスカラー場とみなして分析を進め，Curry（1978b）は商品，労働力，資本などのスカラー場を規定し，労働雇用機会をそのポテンシャル場とした．またPuu（1979）は，財や労働力の流動がそのポテンシャル場の勾配として現れることを見いだした．

Ⅱ－２　ラプラシアンと他の演算子との関係

「場」の理論では，ラプラシアン以外にもいくつかの演算子が使われているが，このうちラプラシアンと関係が深いのは，勾配（gradient）と発散（divergence）である．以下に，ラプラシアンとこの２つの演算子との関係を捉えることによって，ラプラシアンのもつ意味の一面を探る．

１）スカラー場の勾配（gradient）

座標（x，y）において，たとえば人口密度のような地理的変量 $f(x, y)$ が与えられているスカラー場をまず想定する．このとき，人口密度が場所により変化していく様子を定量的に知るためには，以下のように定義されるスカラー場の「勾配」を吟味する必要がある．人口密度のスカラー場 f の勾配はベクトル量であり ∇f と表記される．

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{7}$$

勾配∇fは，人口密度fの等値線に垂直でfの増加する方向をさすベクトルである．また，∇fの大きさはその方向への増加率に等しい．式（７）は，座標（x, y）に対して１つの平面ベクトルが対応することを意味するから，∇fの分布領域は当然ながらベクトル場となる．またスカラー場f（x, y）は，ベクトル“$-\nabla f$”のポテンシャル場とみなすこともできる．

２）ベクトル場の発散（divergence）

人口や物資の流動には流出超過地区と流入超過地区とがあるが，その超過分はベクトル場の「発散」として以下のように定義できる．これらの流動が発生している領域をベクトル場$\boldsymbol{A}$（A_x, A_y）とみなせば，その発散は$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$と表記される．

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial}{\partial x}A_x+\frac{\partial}{\partial y}A_y \tag{8}$$

さらに，ベクトル$\boldsymbol{A}$がスカラー場$f(x, y)$の勾配であるとき，$\boldsymbol{A}$の発散がfのラプラシアンとなる．すなわち，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\nabla f=\nabla^2 f \tag{9}$$

スカラー量fがある地点Ｐにおける人口密度であるとき，そのラプラシアン$\nabla^2 f$は，人口密度fが地点Ｐのごく近傍における人口密度に比してどれくらい差を有するかを意味する．また，ラプラシアン$\nabla^2 f$の符号は，人口密度fがそのまわりの人口密度より小さい場合に正値となり，その逆の場合に負値となる．したがって，ラプラシアンは直感的にある地点Ｐの「へこみ具合」と解釈できる．

ラプラシアンを導入したすべての地理的モデルは，こうしたラプラシアンのもつ性質に着目して構築されたものとみなせる．しかし，それらのモデルのほとんどは，ラプラシアンが式（９）から導かれること，すなわち，ラプラシアンと勾配・発散との関係に言及していない．この事実は，ラプラシアンを含む地理的モデルが地理的場の理論からやや離れた立場で議論されていることを意味する．

Ⅱ－３　ラプラシアンの差分化

前述のように$\nabla^2 f$を差分を用いて表現すれば，人文地理学におけるラプラシアンの意味がより明確になる．$\nabla^2 f$を差分方程式に変換すると以下のように表される．

$$\nabla^2 f=\frac{f(x+\Delta x,\ y)+f(x-\Delta x,\ y)-2f(x,\ y)}{(\Delta x)^2}+\frac{f(x,\ y+\Delta y)+f(x,\ y-\Delta y)-2f(x,\ y)}{(\Delta y)^2} \tag{10}$$

さらに議論を単純化するために，ΔxとΔyとが等しいものと仮定しその値を１とおくと，式（10）は次式で表される．

$$\nabla^2 f=f(x+1,\ y)+f(x-1,\ y)+f(x,\ y+1)+f(x,\ y-1)-4f(x,\ y) \tag{11}$$

式（11）の右辺の各項は，１辺の長さが１であるメッシュ区画を当該のxy平面座標系に設定すれば，

各区画に対応するメッシュデータ値とみなすことができる．あるメッシュ区画の中心の座標を（x, y）とおけば，式（11）の右辺の最終項がその区画におけるメッシュデータ値の（－４）倍となり，第１～４項がその区画のまわりの４区画におけるメッシュデータ値となる．すなわち，あるメッシュ区画におけるラプラシアンの符号は，その区画の値がまわりの４区画の値の平均値よりも小さいときに正となり，逆に大きいときに負となる．

図は，ラプラシアン$\nabla^2 f$の符号が正，ゼロ，負となるメッシュデータの具体例を示したものである．この図において，a）は中央がへこんでいる分布，b）はいわゆる「鞍型」[3)]の分布，そして，c）は中央が盛り上がっている分布である．このとき，式（11）を使ってこの図の中央に位置するメッシュ区画のラプラシアン値を算出すると，それぞれ11，０，－５となる．この計算結果は，ラプラシアンが分布のへこみ具合を表すことを改めて実証するものである．

a）$\nabla^2 f > 0$ の場合

8	7	4
9	5	8
8	7	7

b）$\nabla^2 f = 0$ の場合

4	3	6
6	5	7
5	4	5

c）$\nabla^2 f < 0$ の場合

4	6	7
3	5	4
3	2	1

図　メッシュデータにおけるラプラシアンの計算

Ⅲ　ラプラシアンを利用した地理的モデル

ラプラシアンを利用した地理的モデルのほとんどは，前述した３つの基本型（熱伝導方程式，Laplace 方程式，Poisson 方程式）と同型か，もしくは，それらの発展型として位置づけられる．本章では，この３区分にしたがってモデルを整理し議論を試みる．

Ⅲ－１　熱伝導方程式型モデル

熱伝導方程式型モデルは，ラプラシアンを利用した地理的モデルの大半を占め，その発展型も比較的多い．このモデルの基本型は，当然ながら熱伝導方程式（式（２））で与えられる．ここでは，基本型のほかに２つの発展型を取り上げる．

１）基本型

式（２）においてスカラー量fが何らかの地理的変量を表すものとすると，式（２）の左辺すなわちfの時間微分$\partial f／\partial t$は，差分化すれば$\Delta f／\Delta t$となるので，直感的には単位時間当たりのfの変化量とみなせる．したがって，式（２）の右辺を差分化した式（11）とこの直感的解釈とを考え合わせれば，熱伝導方程式型モデルは，「ある場所における時間的変化量がその場所のへこみ具合に応じて

決まるような分布」を表すことがわかる．さらに，式（２）の係数kが正であれば，分布がへこんでいるほど変化量が大きくなるので，このモデルは，通常，対象となる分布がその凹凸を解消するように変化していく場合を意味する．

一方，スカラー量fに相当する地理的変量としては，今日までさまざまなものが提示されてきた．たとえばVinod（1979）のモデルでは，fは流動的な市場（imperfect market）における地代を表し，Baker（1982）のモデルでは場所の効用を意味する．また，後述するHotelling（1978）のモデル，ならびにIshikawa（1980）のモデルでは，自然増加がゼロの場合の人口密度を表す．

２）発展型Ⅰ：Hotellingのモデル

Hotelling（1978）は，主として人口の拡散期における人口密度fについて以下の３つのモデルを提示した．

$$\frac{\partial f}{\partial t}=k\nabla^2 f+af \tag{12}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=k\nabla^2 f+b(f_{\max}-f) \tag{13}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=k\nabla^2 f+cf(f_{\max}-f) \tag{14}$$

ただしk，a，b，cは定数であり，$f_{\max}$は人口密度の飽和点（saturation point）を示す．

式（12)，（13)，（14）の右辺に共通する，ラプラシアンを含む項$k\nabla^2 f$は，人口密度の時間的変化のうちおもに社会増加分を表すと解釈できる．これは，拡散期における人口移動が人口密度分布の凹凸を解消する方向にむかって生じることを意味する．これに対して右辺の残りの項af，$b(f_{\max}-f)$，$cf(f_{\max}-f)$は，おもに自然増加分を表すと考えられる．ここで社会増加分$k\nabla^2 f$を仮にゼロとし，さらに，定数a，b，cがいずれも正ならば，人口密度fは成長曲線にしたがって上昇するか（式（12)），飽和点$f_{\max}$にむかって収束していくか（式（13)），または飽和点$f_{\max}$にむかってロジスティック曲線的に変化する（式（14)）．

以上のようにHotellingのモデルは，人口密度の飽和点$f_{\max}$が定数であることを前提としたものであったが，一般に$f_{\max}$は食料生産技術の向上にともなって上昇していくと考えられる．Puu（1984）は，Hotellingのモデルにそのような技術水準の向上の要素を取り入れ，より精緻なモデルを示した．また，中谷（1992）が提示した人口分布動態の自己組織化モデルも，Hotellingモデルの発展型として位置づけられる．このモデルは，式（14)，および，Allen and Sanglie（1981）による中心地システムの動態的モデルを基礎においている．

３）発展型Ⅱ：Zhangのモデル

Dendrinos and Mullally（1985）は，地代と居住密度とが互いに影響を与えながら変化していく状態を，生態学の著名モデルである補食者－被食者（predator-prey）モデルを応用することによって定式化した．補食者－被食者モデルとは，たとえば，一定の海域においてサメ（捕食者）とそのエサとなる小魚（被食者）の個体数がそれぞれどう変化していくかを示したものである．この例では，小魚

が増えればサメも増えるが，逆にサメが増えすぎれば小魚の増加が抑制されることになる．Dendrinos and Mullally は，地代と居住密度の関係をこうした捕食者と被食者の関係になぞらえてモデルを構築した．

Zhang（1988）は，このモデルにさらにラプラシアンを導入し，地代と居住密度との関係をモデル化した．Zhang のモデルは次の２本の偏微分方程式からなる．

$$\frac{\partial f}{\partial t}=k\nabla^2 f+af(g_0-g) \tag{15}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}=l\nabla^2 g+bg(f-f_0) \tag{16}$$

ただし，f は居住密度，g は地代を表し，k，l，a，b，g_0，f_0 はいずれも定数である．

式（15)，（16）の右辺における $k\nabla^2 f$，$l\nabla^2 g$ は，それぞれ居住密度と地代についてその分布の凹凸を解消するように作用する成分とみなせるが，この成分をゼロとするならば，Zhang のモデルは Dendrinos and Mullally のモデルと同型になる．また，補食者－被食者モデルとの関係では，地代 g が捕食者，居住密度 f が被食者に対応する．すなわち，このモデルでは，居住密度 f が上昇すれば利便性が増すので結果的に地代 g も上がるが，地代 g の上昇は居住密度を抑制するように作用するのである．

Ⅲ－２　Laplace 方程式型モデル

一般に，式（２）を満たすシステムが時間的にまったく変化しない状態，すなわち定常状態（steady state）に至った場合，そのシステムはLaplace方程式（式（３））を満たす．したがって，Laplace 方程式を解けば，熱伝導方程式型モデルの定常解が得られる．ちなみに，ある地理的変量 $f(x,\ y,\ t)$ が熱伝導方程式型モデルに適合するならば，$t\to\infty$ の場合の分布である $f(x,\ y,\ \infty)$ がその定常解となる．Laplace 方程式のもっとも単純な定常解は，１次傾向面分布 $f(x,\ y)=ax+by+c$ であるが，この解は，熱伝導方程式型モデルが「時間とともに凹凸がなくなり滑らかになっていくような分布」を示すこととよく符合する．なぜなら，１次傾向面分布はまったく凹凸のない平面状の分布であるからである．

この型に属するモデルは，前述の熱伝導方程式型モデルに比べて極端に数が少ないが，一例として，場所の効用に関するCurry（1979）のモデルがある．Curry のモデルは，式（３）において場所の効用を f とした場合に相当するが，このモデルが熱伝導方程式型モデルと大きく異なる点は，時間の概念が組み込まれておらず空間的変化にのみ言及していることである．式（３）の解は，あらかじめ与えられる境界条件等によって大きく異なり，上述の１次傾向面分布はその解の１つに過ぎない．たとえば，f が変数分離型関数 $f=g(x)h(y)$ である場合は以下のような解が得られる[4)]．

$$f(x,\ y)=\sin(kx)\cdot\exp(ky) \tag{17}$$

$$f(x,\ y)=\sin(kx)\cdot\exp(-ky) \tag{18}$$

$$f(x,\ y)=\cos(kx)\cdot\exp(ky) \tag{19}$$

$$f(x,\ y)=\cos(kx)\cdot\exp(-ky) \tag{20}$$

式（17），（18），（19），（20）は，いずれも，x軸方向には三角関数的に変化しy軸方向には指数関数的に変化するような分布を示す.

Ⅲ－3　Poisson 方程式型モデル

Poisson 方程式（式（４））は，ある変量のラプラシアンをほかの関数によって説明する形態をとり，Laplace 方程式と同じく時間の変化には言及しない．この型に属するモデルは，Laplace 方程式型モデルと同様にきわめて少数であるが，ここでは，その例として Dorigo and Tobler（1983）のモデルを取り上げる．このモデルは，ある地点（$x,\ y$）の人口流出数 $O(x,\ y)$ および流入数 $I(x,\ y)$ を人口の排斥因子（push factor）と吸引因子（pull factor）によって説明するモデルであり，２本の偏微分方程式からなる.

$$O(x,\ y)=\nabla^2 g+4(f(x,\ y)+g(x,\ y)) \tag{21}$$

$$I(x,\ y)=\nabla^2 f+4(f(x,\ y)+g(x,\ y)) \tag{22}$$

ただし $f(x,\ y)$，$g(x,\ y)$ は，それぞれ，地点（$x,\ y$）における排斥因子および吸引因子を意味する.

式（21），（22）の意味は，$\nabla^2 g$ と $\nabla^2 f$ を差分化した方が理解しやすい．そこで式（11）を用いてこれらの２式を差分化すると，

$$O(x,\ y)=g(x+1,\ y)+g(x-1,\ y)+g(x,\ y+1)+g(x,\ y-1)+4f(x,\ y) \tag{23}$$

$$I(x,\ y)=f(x+1,\ y)+f(x-1,\ y)+f(x,\ y+1)+f(x,\ y-1)+4g(x,\ y) \tag{24}$$

が得られる．このうち式（23）は，あるメッシュ区画（$x,\ y$）における人口流出数 $O(x,\ y)$ が，その区画における排斥因子とそのまわりの４区画における吸引因子とによって決定されることを意味する．同様にして式（24）は，人口流入数 $I(x,\ y)$ がその区画の吸引因子とまわりの排斥因子とによって決定されることを示す.

さらに，統合的な移動因子 h を $h=f-g$ とおき式（24）から式（23）を辺々引くと，次式が得られる.

$$I(x,\ y)-O(x,\ y)=h(x+1,\ y)+h(x-1,\ y)+h(x,\ y+1)+h(x,\ y-1)-4h(x,\ y) \tag{25}$$

このとき式（25）の右辺は，統合的な移動因子 h のラプラシアンの差分式にほかならないので，これを $\nabla^2 h$ とおくと Poisson 方程式型のモデルが導かれる.

$$\nabla^2 h=I(x,\ y)-O(x,\ y) \tag{26}$$

式（26）は，ある地点（$x,\ y$）における統合的移動因子 h のラプラシアンが，その場所における純移

動量$I(x, y)-O(x, y)$によって決定されることを意味する.

Ⅳ　むすび

本稿は，人文地理学におけるラプラシアンの意味を考察し，この演算子を利用した各種の地理的モデルを整理した．その結果明らかになった点は以下のとおりである．

1．ラプラシアンの理論的背景となる「場」の概念については，スカラー場，ベクトル場ともすでにさまざまな地理的事象に適用されており，地理的場の理論として確立している．しかし，ラプラシアンを取り入れた地理的モデルのほとんどは，ラプラシアンと勾配・発散との関係にとくに言及しておらず，地理的場の理論からやや離れた立場で議論されている．したがって，今後，ラプラシアンを導入した地理的モデルについて論じる際は，その対象となった変量が地理的場のなかでどう位置づけられるのかを考察していく必要があると思われる．

2．人文地理学におけるラプラシアンの意味については，この演算子を差分化しメッシュデータ上で考察することによって明確化された．これによれば，あるメッシュ区画におけるラプラシアンは，その周りの4メッシュ区画における値の合計から，当該メッシュ区画における値の4倍を差し引いた値として表される（式（11)).

3．ラプラシアンを利用した地理的モデルのほとんどは，熱伝導方程式型モデル，Laplace方程式型モデル，Poisson方程式型モデルのいずれかに分類される．そのうち熱伝導方程式型モデルは，通常，凹凸を解消するように時間的に変化する地理的変量の分布を表し，その発展型が比較的多く提示されている．これに対して残る2つのモデルは，地理的変量の空間的分布にのみ言及したものであるが，研究例が少ないため議論の余地が十分に残されている．

筆者を常にご指導くださった奥野隆史教授に，ご退官を記念して本稿を献呈したいと存じます．本稿を作成するにあたり，筑波大学地球科学系の諸先生方，ならびに，東京都立大学「空間の理論研究会」のメンバーの方々に貴重な助言を賜りました．記して感謝の意を表します．なお，本稿は，文部省科学研究費奨励研究A（課題番号，05780126）による研究成果の一部です．

注

1）これらの3つの型の違いと特徴については，偏微分方程式の解説書を参照されたい（たとえば，草野（1980)).

2）ラプラシアンを用いた地理的モデルは，より広い範囲のカテゴリーを考えれば，社会物理学的モデルの1つとみなせる．社会物理学とは，物理学のアナロジーに基づいて人間行動に関するあらゆる種類の数理的研究を行う分野であり，Stewart(1948)によって提唱された（野上・杉浦，1986).

3）馬の鞍のように，見る方向によって凸型と凹型の両方のパターンを示す分布をこう呼ぶ．

4）当然ながら，各式のxとyを入れ換えてもLaplace方程式を満たす．

文献

石水照雄（1976）：『計量地理学概説』古今書院，242ページ.

草野　尚（1980）：『偏微分方程式』朝倉書店，187ページ.

中谷友樹（1992）：内陸開拓域における人口分布動態の自己組織化モデル――「飛び地」的都市の成立との関係を中心として――．理論地理学ノート，**8**，93-110.

野上道男・杉浦芳夫（1986）：『パソコンによる数理地理学演習』古今書院，139-145.

水野　勲（1992）：開拓期の人口移動に関するHotellingモデルの再構築――非線形平衡システムの観点から――．地理学評論，**65**，297-319.

Allen, P. M. and M. Sanglie (1981): Urban evolution, self-organization, and decisionmaking. *Environment and Planning A*, **13**, 167-183.

Baker, R. G. V. (1982): Place utility fields. *Geographical Analysis*, **14**, 10-28.

Chorley, R. J. (1964): Geography and analogy theory. *Annals of the Association of American Geographers*, **54**, 127-137.

Curry, L. (1978a): Demand in the spatial economy: Ⅱ homo stochasticus. *Geographical Analysis*, **10**, 309-343.

Curry, L. (1978b): Position, flow and person in theoretical economic geography. Carlstein, T. *et al* . eds.: *In timing space and spacing time*, Arnold, London.

Curry, L. (1979): Demand in the spatial economy: Ⅰ homo deterministicus. *Geographia Polonica*, **42**, 185-242.

Dendrinos, D. S., and H. Mullally (1985): *Urban evolution: Studies in the mathematical ecology cities*. Oxford University press, Oxford, 184p.

Dorigo, B., and W. Tobler (1983): Push-pull migration laws. *Annals of the Association of American Geographers*, **73**, 1-17.

Hotelling, H. (1978): A mathematical theory of migration. *Environment and Planning A*, **10**, 1225-1239.

Ishikawa, H. (1980): A new model for the population density distribution in an isolated city. *Geographical Analysis*, **12**, 223-235.

Lewin, K. (1951): Field theory in social science. Cartwright, D. ed.: *Selected theoretical papers*. Harper, New York.

Puu, T. (1978): On traffic equilibrium, congestion tolls, and the allocation of transportation capacity in a congested urban area. *Environment and Planning A*, **10**, 29-36.

Puu, T. (1979): Regional modelling and structural stability. *Environment and Planning A*, **11**, 1431-1438.

Puu, T. (1982): Outline of a trade cycle model in continuous space and time. *Geographical Analysis*, **14**, 1-9.

Puu, T. (1984): A simplified model of spatiotemporal population dynamics. *Environment and Planning A*, **17**, 1263-1269.

Puu, T. (1991): Hotelling's migration model revisited. *Environment and Planning A*, **23**, 1209-1216.

Sheppard, E. S. (1979): Geographic potentials. *Annals of the Association of American Geographers*, **69**, 438-447.

Stewart, J. Q. (1948): Concerning "social physics." *Scientific American*, **178**, 20-23.

Stewart, J. Q., and W. Warntz (1961): The field theory of population influence. *Proceedings of the International Population Conference*, International Union for the Study of Population, New York.

Vinod, H. D. (1979): Theory of the diffusion of price inflation in an imperfect market similar to housing, having delayed arbitrage. *Environment and Planning A*, **11**, 1219-1229.

Wolpert, J. (1965): Behavioral aspects of the decision to migrate. *Papers of the Regional Science Association*, **15**, 159-169.

Zhang, W. B. (1988): The pattern formation of an urban system. *Geographical Analysis*, **20**, 75-84.

On the Utilization of "Laplacian" for Human Geography

Takashi INOUE

Geographical models which represent human phenomena by "Laplacian" have been constructed basically on the analogy of thermal physics. The large majority of geographical models on the basis of physics, however, are models to which the theory of dynamics is applied. Accordingly the concepts of thermal physics, such as Laplacian, have not been thoroughly discussed in human geography. In consequence, this paper clarified the geographical implication of Laplacian and arranged geographical models where the operator was utilized. The results are summarized as follows:

1. We have applied the conception of "field," that is, the theoretical background of Laplacian to various geographical phenomena, and developed the geographical field theory from it. Nevertheless, geographical models to which Laplacian is added scarcely refer to the relationship between Laplacian and other operators in the field theory, like "gradient" and "divergence."

2. By expressing a difference of Laplacian in grid-cell data, we could grasp the geographical significance of the operator. The difference of Laplacian $\nabla^2 f$ in a cell (x, y) is given by equation (11).

3. Almost all geographical models where Laplacian is utilized are classified into the following three equation types: thermal conductivity equation, Laplace equation, and Poisson equation. The models of the thermal conductivity equation type indicate the distribution which changes with time so as to even out its irregularities, including some developed forms of the equation; while models of the other two types deal exclusively with the spatial change of geographical variables, having few examples.