

電気自動車用モータ構造を模擬した回転二重円筒内の熱流動特性

平野 覚

システム情報工学研究科
筑波大学

2013年11月

目次

1	緒言	6
1.1	研究背景	6
1.2	研究の目的	6
1.3	電気自動車について	7
1.3.1	モータとモータ周りの構造	7
1.3.2	EVモータ開発の概歴と放熱の課題	7
1.4	モータの伝熱経路について	10
1.4.1	伝熱の基礎方程式	11
1.4.2	熱回路網の導入	11
1.4.3	熱移動の概念	12
1.4.4	Nu の適用事例	16
1.4.5	モータ位置	18
1.5	テイラー渦	19
1.5.1	概要	19
1.5.2	テイラー渦の発生原理	21
1.5.3	パラメータと実験装置の模擬条件	21
1.5.4	過去の研究における知見	23
2	流動実験	25
2.1	実験装置および可視化方法	25
2.1.1	ロータ円筒面流動可視化	25
2.1.2	終端部流動可視化	25
2.2	実験結果	27
2.2.1	ギャップ領域の流動構造	27
2.2.2	ロータ端部の流動構造	29
2.3	終端部の可視化実験	32
2.3.1	注入実験	32
2.3.2	終端部の流動構造	36
2.4	本章のまとめ	39
3	流動解析	40
3.1	ギャップ領域	40
3.1.1	基礎方程式と境界条件	40
3.1.2	ギャップ領域の解析結果	41
3.2	ロータ端部	50
3.2.1	基礎方程式と境界条件	50
3.2.2	解析結果	50
3.3	ギャップ及びロータ端部を含めた流れ場の解析	54

3.4	本章のまとめ	59
4	熱流動解析	60
4.1	計算条件	60
4.2	計算結果	61
4.2.1	温度分布	61
4.2.2	熱流束について	62
4.2.3	熱伝達率と流れ場の関係	65
4.3	本章のまとめ	67
5	実機への適用性評価	68
5.1	熱流動実験	68
5.1.1	EV モータ構造を模擬した実験装置	68
5.1.2	インバータ周波数とモータ回転数の関係	69
5.1.3	温度計測位置	69
5.1.4	スリップリング	71
5.1.5	実験条件	72
5.1.6	時系列温度および温度ヒストグラム	72
5.1.7	諸回転数に対する温度変化	75
5.2	熱回路網計算	76
5.2.1	熱抵抗値から温度を導出する方法	76
5.2.2	熱回路行列から熱抵抗値を導出する方法	81
5.3	本章のまとめ	88
6	結言	89
	Appendix	91
A	熱伝導方程式の一般形	91
B	Navier-Stokes 方程式	92
B.1	Lagrange の方法	92
B.1.1	Euler の方法	93
B.1.2	Lagrange の方法と Euler の方法の直感的なイメージ	94
B.2	質量の保存則	94
B.2.1	運動量の保存則	96
B.3	円柱座標系の NS 方程式	98
B.4	$\Omega(t)$ 内の質量の時間微分 (式 (A.15) 参照)	103
B.5	$\Omega(t)$ 内の運動量の時間微分 (式 (A.24) 参照)	103
B.6	応力テンソル	104

C	数値解析の方法について	109
C.1	空間の離散化の方法	109
C.2	圧力項について	110
C.3	計算の妥当性の評価	111
D	モータについて	115
D.1	モータの種類	115
D.2	モータモデルと実機との相違	115
D.3	ロータについて	117
D.4	ステータについて	117

NOMENCLATURE

r	radius, m
L	length, m
d	gap length, m
z	axial position, m
A	surface area, m ²
v	velocity, m/s
ω	rotation speed, rad/s
Ω	volume, m ³
k	wave number, 1/m
Q	amount of heat, W
R	thermal resistance, K/W
T	temperature, K
h	heat transfer coefficient, W/(m ² ·K)
c_p	specific heat, J/(kg·K)
λ	thermal conductivity, W/(m·K)
ρ	density, kg/m ³
μ	viscosity, kg/(m·s)
ν	kinematic viscosity, m ² /s
t	time, s
η	radius ratio
Γ	aspect ratio
N	division number
Re	Reynolds number
Ta	Taylor number
Pr	Prandtl number
Nu	Nusselt number

Subscripts

o	outer cylinder (stator)
i	inner cylinder (rotor)
r	rotor, radius direction
a	inner air
s	stator
f	frame
e	external air
θ	rotational direction
z	axial direction

1 緒言

1.1 研究背景

近年、CO₂ 排出による地球温暖化や石油の枯渇によるエネルギー問題などの地球環境問題が注目されており、CO₂ が排出されない、動力へのエネルギー変換効率が 95~99 %程度で内燃機関と比べて高いなどの利点から電気自動車 (Electric Vehicle 以下 EV) に関する実用化が進んでいる。更に、電池容量および重量による走行距離が改善されれば EV の普及がいつそう促進されると考えられる。その中で、EV 用のモータ (以下 EV モータ) には小型・軽量・高効率化の要求が益々高まっており、特に小型化・軽量化は車両重量の制約から、重要な開発要素となっている。しかしながら、モータの小型化開発によって損失密度すなわち発熱密度が増加すると、永久磁石の磁力が急激に失われる減磁などの問題が起こり得るので、ロータの冷却能力を正確に把握して、冷却性能を向上させることが益々重要になってきている。したがって、モータ設計時におけるモータ内部の流動、及び、伝熱特性を把握することは、正確なモータ特性を予測する上での重要な課題と言える。そこで、本研究では小型化のために知るべき EV モータの流動、及び、除熱について着目することとした。

1.2 研究の目的

モータ内部の伝熱特性と流動構造の関係を明確化することにより、設計段階においてモータ内部の温度推定を可能とすることが本研究の目的である。これまでも実際の開発現場で温度推定の試みは行われているが、内部流動に注目した研究は少なく、流れ場に依存するモータ全体の冷却構造のしくみについてはほとんど調べられていない点だが、本研究の有用性と考えられる。実験内容としては、ロータ円筒面の流動とロータ端部の流動の相関について、時空間図を用いて時間的・空間的に調べる。また、ギャップの流動およびロータ端面とステータ端面間の流動 (以下 ロータ端部) の境界部分 (以下 終端部) で移動する粒子について観測した。その結果から、隙間およびロータ端部の流動、双方の関係について考察する。更に、モータモデルを用いた伝熱実験によりモータモデルにおける伝熱構造を議論して、熱回路網計算を導入することで全体の冷却構造について検討を行う。数値解析については、初めにギャップ領域とロータ端部の計算が実験と同様の結果となることを示す。次にギャップ領域について熱流動解析を行って流れ場と熱伝導の関係について調べた後、熱回路網計算に伝熱解析結果を用いることでモータ全体の冷却構造が解明できるようになる。

ここで、これらの検討事項の相関図を以下に図示する。図 1 より、本研究を進めるにあたって、モータ内部の流動特性について調べると共に、全体的な伝熱構造のしくみに関しての理解が深められる。伝熱は熱エネルギーが部品間を移動していく現象であるから、各項目に関する知見については、それぞれがモータ除熱構造についての重要な役割を果たしており、温度状況を把握する上で必須の概念であると言える。

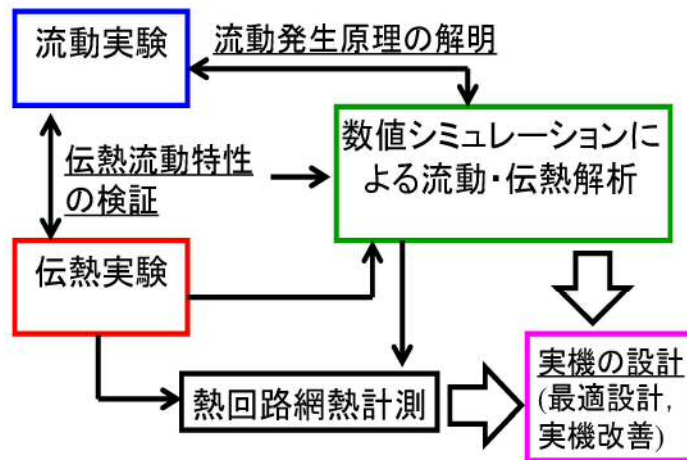


Fig 1: Schematic model of representation for heat-flow mechanism on the motor model.

1.3 電気自動車について

1.3.1 モータとモータ周りの構造

図2にEVモータの概略図を示す。EVモータのロータはスロット部の溝を除いて円筒のような形状となっており、ロータを覆うようにロータの外側にステータがある。電磁力によって得た力はロータと連結されている軸を介して、動力を伝達する。以下にEVモータの寸法形状の一例を示す。ロータ直径は $2r_i = 218 \text{ mm}$ ，ステータ内径は $2r_o = 220 \text{ mm}$ ，隙間（以下，ギャップ）は $d = 1 \text{ mm}$ ，ロータ軸長は $L_i = 40 \text{ mm}$ ，コイルエンド部を含めたステータ軸長は $L_o = 100 \text{ mm}$ である。上記の寸法よりEVモータは、二重管構造となっている。しかしながら、ロータ・ステータの軸長が短い、径が大きいわりにロータとステータ間のギャップが極端に狭いという特徴を有する。また、EVは自動車部品の他に制御部品も多数あり、モータ周りにもコントローラやエアコンシステム等が存在している。

1.3.2 EVモータ開発の概歴と放熱の課題

EVの開発の歴史は内燃機関を備えた自動車よりも古く、電池とモータの発明から数えて、およそ200年以上をかけて今日に至るまで発展した [1]。電池に関しては、1800年にイタリアのボルタが発明した”ボルタの電池”が起源と言われている。ボルタは、ポーニャの薬学者であるL.ガルバニの紹介により、蛙の足の神経を銅の針金と鉛の針金で挟み込む際に関節が屈伸運動する実験にヒントを得て、塩水に浸した厚紙を亜鉛板と銅版で押さえることで電気を作り出せることを発見した。後の1821年にM.ファラデーが、固定した磁石の近くでボルタの電池に繋いだコイルが回転することを発表し、電磁誘導の法則を導いたことがモータの原理の基

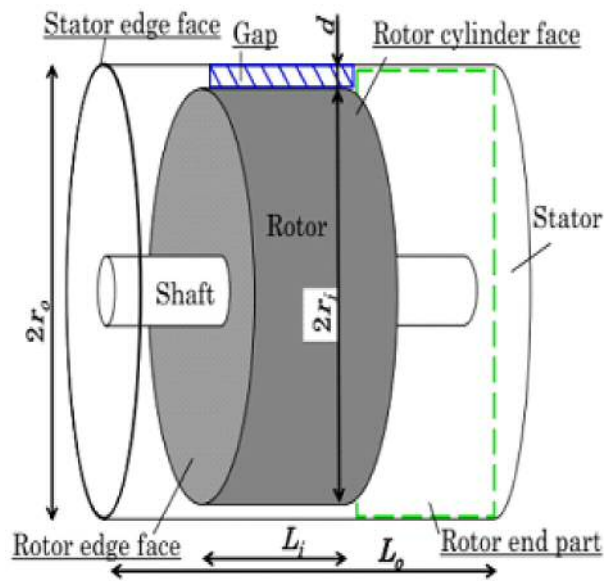


Fig 2: Image of IPM Motor Focused on Gap

礎となった。次いで、1831年にスコットランドのデビッドソンがスイッチドリラクタンスモータ [2] を開発して電気機関車を作ること成功してから、世界最初の実用電気自動車は、ガソリン車（1891年）よりも20年近く早い1873年にイギリスのR. デビッドソンにより製作された。このように電気自動車は歴史が古いにも関わらずガソリン車に対して開発が大きく出遅れた要因として、動力源となる電池のエネルギー密度がガソリンの1/100程度と小さく、走行性能上の課題が大きいことが挙げられる。近年はこれらの課題も克服されつつあるが、一方でモータの小型化と高出力化を要求するに際してモータの除熱の課題が注目されるようになった [3]。

EVモータは、車体フレームに固定されたステータに巻かれているコイルに電流を流し、電磁力を発生させることによってステータの内側にある永久磁石の埋め込まれたロータを回転させるIPM方式が主流となっている。図3に、EVモータを軸と垂直方向に切った断面図を示す。IPM方式はEVモータとして最も普及しているタイプであり、ロータの外周は通常凹凸の無い円形である。また、ステータには、磁力を生むためのコイルが埋め込まれるスロットがあるが、剛性や絶縁性を高めるなどの目的で、樹脂をスロットに埋め込むモールド処理が施されることがある。すると、ステータとロータ間には1 mm程度のギャップのある回転2重円筒が構成される。

モータの発生損失は、鉄損 W_o 、銅損 W_{cu} 、及び、漂遊負荷損に分けることができる [3]。鉄損とは、磁気回路の磁場の変化に伴って発生する損失で、ヒステリシス損と渦電流損がある。ヒステリシス損失は、磁性体のヒステリシス現象に起因したもので周波数および磁束密度に依存し、渦電流損は、モータの積層鋼板において起こる電磁誘導の際に発生する渦電流によってエネルギーを消失する現象である。銅損とは、電気エネルギーが銅巻線の導線にある電気抵抗によって熱エネルギーにかわる損失である。更に漂遊負荷損とは、上記以外の損失のことを表す。ここ

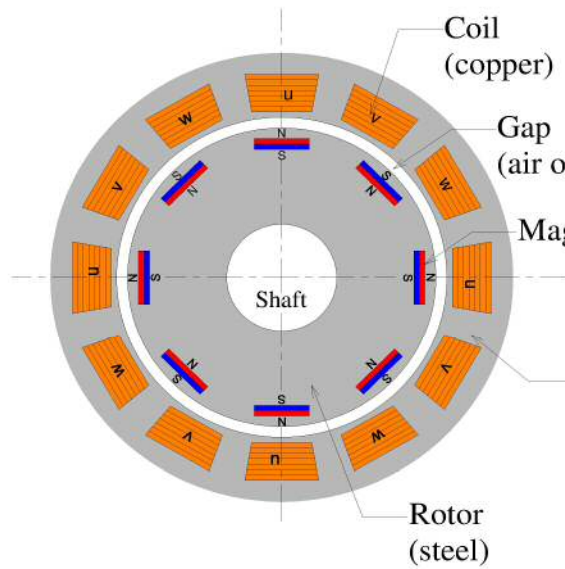


Fig 3: Inside structure of an electrical vehicle motor

で, W_o, W_{CU} はそれぞれ

$$W_o = K_o n^{1.6} \quad (1)$$

$$W_{CU} = 3R_m I_a^2 \quad (2)$$

と書ける. ただし, n はモータの回転数, K_o は無負荷損失係数である. また, モータの全損失 W_{IM} はこれらの和に漂遊負荷損失係数 K_{LD} を考慮して以下の式に従う.

$$W_{IM} = R_a I_a^2 + W_o$$

$$R_a = 3(1 + K_{LD})R_m \quad (3)$$

このようにして生じた渦電流損および銅損により熱が発生し, 永久磁石は 100-120 °C, コイルは 150-180 °C 程度の高温となる. また, 発生した熱は, ステータから外壁への伝熱, ステータとロータの隙間への伝熱, 及び, ロータからステータへ伝熱することが考えられる. モータの温度がさらに高温となるとオーバーヒートを起こすため, 熱を放出する機構が求められており, モータ以外の他の部品への伝熱も防ぐ必要があるため, 隙間の熱除去を高める必要がある. オーバーヒートには主に2つの状態が起こりえる. 一つは, モータに備わっているコイルの耐熱温度を超過して絶縁皮質が焼損し, 絶縁性能が維持できなくなることである. もう一つは, EVモータで主流であるネオジウム系の永久磁石は高温になると急激に磁力の失われる減磁が生じてEVモータが故障してしまうことである.

熱の伝播には, 電磁波による輻射熱, 分子間相互作用によって伝わる熱伝導, そして対流に乗って熱が遠方に運ばれる熱伝達の3種類が考えられる. 輻射熱 Q_{rad} は

$$Q_{rad} = \epsilon \sigma A T^4 \quad (4)$$

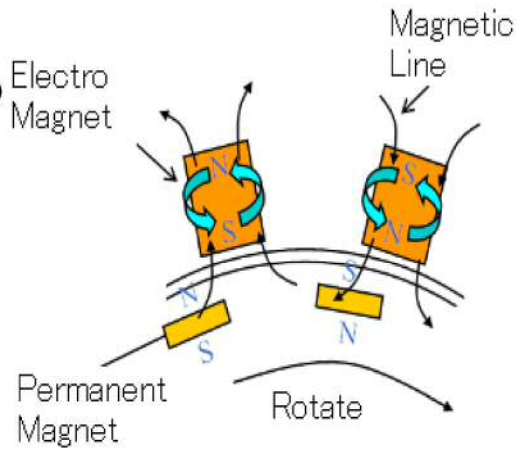


Fig 4: Schematic drawing of electro magnet

と書ける。但し、 ϵ は物体固有の放射係数で0~1の値をとる定数であり、 σ はステファン・ボルツマン係数で $5.670 \times 10^{-8} [\text{W}/(\text{m}^2 \text{K}^4)]$ と表せる。また、 T は対象物体の絶対温度[K]、 A は表面積 $[\text{m}^2]$ である。例えば、EVモータの輻射熱を想定したとすると、 $\epsilon = 0.2$ と仮定して、 $A = 0.1 \text{m}^2$ 、 $T = 400 [\text{K}]$ (約 130°C)の場合、 $Q_{\text{rad}} = 30 [\text{W}]$ で表面から放射していることになるが、通常の発熱量(1000W以上)に比較するとほとんど無視できることが分かる。したがって、EVモータの伝熱を考慮するには、熱伝導、及び、熱伝達に注目すれば十分と言える。

EVモータの冷却方法は特性上、水冷、油冷の2種類が実用的であり、EV開発の初期ではモータ周辺にウォータジャケットを設けて水冷を行う2004年に開発されたEliikaなどがある。今日にかけても実用化されたEVの多くは水冷方式を採用している。近年では内燃機関とEVモータを組み合わせたハイブリッドシステムが注目され、鬼丸らは動力伝達部とモータ軸受を潤滑するATF (Automatic Transmission Fluid) をモータ冷却に利用した冷却性能向上法を考案し、SUV (Sports Utility Vehicle) 用ハイブリッドシステムに適用した[5]。放熱性能の見積もりとして、従来からモータ内の接触熱抵抗を実測により分析する手法[4]があるが、EVモータ内部の詳細な流動および熱特性は不明であり、放熱に最適な対策を練ることができていないのが現状である。

EVは自動車部品の他に制御部品も多数あり、モータ周りにもコントローラやエアコンシステム等が存在している。モータが駆動し、発生した熱が周りの部品へ伝達してしまうと、制御部品に熱が移動し破損する恐れがあり、上記のような状態を防ぐためにモータの除熱は重要な課題となっている。

1.4 モータの伝熱経路について

モータの伝熱構造を単純化するため、図5に示すように、EVモータ構造を模擬したモータモデルを作成した。図5では、ステータ内部にあるロータがシャフトからカップリングを介して外部のモータと接続しており、モータの回転がロータに伝わるしくみとなっている。ロータには熱源であるニクロムヒータが内蔵されており、熱が内気を伝わってステータ、及び、フレームに伝わり、フレームから空気を介して放熱する構造となっている。想定するモータを模擬した部分は、図5のカップリングから右側の部分である。この際、ステータの熱はフレームに固体間の熱伝導によって伝達され、フレームから外気に対して空気の熱伝達によって放熱される。すなわち、モータモデルでは熱伝導と熱伝達の両方を考慮しなければ正しい伝熱についての理解が得られない。この事情は実際のモータに関しても同様である。

モータにおいて熱伝達経路は単純な一方向とは限らず、複数の部位を経由する並列回路が含まれると言える。そのため、局所的に熱伝達を向上させる方法が見つかったとしても、対象部位と並行する他の放熱経路で熱伝達能力が優れていた場合、議論と関係のない経路を伝わり大部分の伝熱が生じ得るため、実質的に大きな放熱効果が期待できなくなる可能性がある。したがって、モータ内部において必要な放熱量を確保するためには、各部品間の関係を得るだけでは不十分と言える。各部品間の伝熱について、熱伝導と熱伝達の違いを考慮しつつ、互いの配置の状況に注意しながら把握する手法が求められるのである。

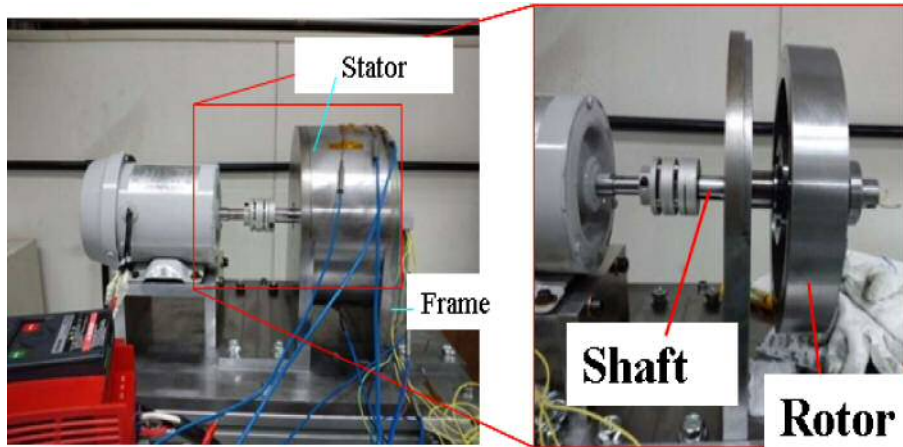


Fig 5: Characterized Model of an EV Motor

1.4.1 伝熱の基礎方程式

流体中の伝熱について検討するために熱エネルギーの従う基礎方程式を導入する．化学反応が生じず，摩擦による発熱等が無視できると仮定すると， C_p を定圧比熱 [J/(kg·K)]， λ を熱伝導率 [W/(m²·K)] とおいて

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\rho C_p \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T + \lambda \nabla^2 T \quad (5)$$

と表せる．発熱を含む一般の場合は Appendix A に示した．式 (5) はエネルギー方程式と呼ばれ，熱流束は式 (5) の右辺第 1 項で表される移流によって運ばれる成分と，右辺第 2 項で表される熱伝導によって運ばれる成分で表せることが分かる．本研究では熱エネルギーの振る舞いに関して式 (5) に従うものとする．

1.4.2 熱回路網の導入

図 6 は，部品毎の伝熱特性からモータ全体に及ぼす除熱構造の模式図を表しており，熱回路網と呼ばれる．図 6 において， Q_{ij} は物体 i から物体 j に向かって流れる熱流 [W] を表しており，温度 T_i ，熱抵抗率 R_{ij} を用いて以下の表記を仮定する．

$$Q_{ij} = \frac{T_i - T_j}{R_{ij}} \quad (i \neq j; i, j = r, a, s, c, e) \quad (6)$$

式 (6) は，系の熱流束が定常的となり，式 (5) の左辺が 0 の場合に成り立つ特別な関係と言える．モータの各部位間において式 (6) の関係が得られれば，式 (5) を解くことなく定常状態での部品の温度が推定できるため便利である．

モータモデル (図 6) では，合計 5 個の Q_{ij} が含まれているので，これらの R_{ij} を調べればどの部位の伝熱効率を重点的に上げれば良いのかが判断できる．ここで，例えばステータ-フレ-

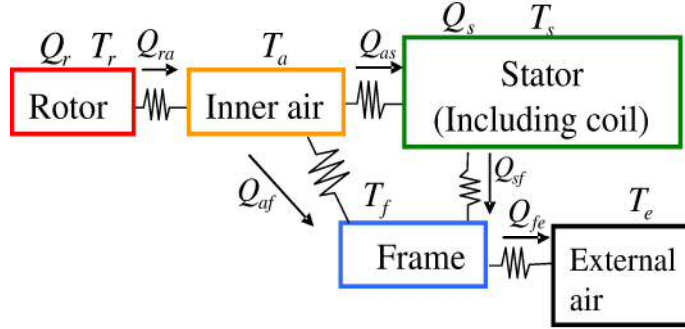


Fig 6: Characterized model of an EV motor focused on heat transfer

T_i : Temperature on the material around motor, Q_i : Heat energy of the material, Q_{ij} : Flow of energy (※ i,j : Indices which indicate the object)

ム間の熱抵抗 R_{sf} が限りなく 0 に近ければ, R_{af} を小さくすることに大きな意味がなくなるが, 実際は松井ら [5] により, スタータとフレームの嵌め合い部では R_{sf} は有限な値となることを見出されている. したがって, モータ内部の伝熱構造を把握するために, 熱回路網を用いることが有効な手段であると期待できる.

1.4.3 熱移動の概念

式 (6) は, 流速 v が 0 ではなく, 熱が流体中を移動する場合, 無次元数であるヌセルト数 $Nu(\geq 1)$ を導入して以下のように書けるとする.

$$Q_{ij} = NuQ_{ij}(v = 0) \quad (7)$$

したがって, 駆動中のモータの伝熱構造を定式化するためには, 流体が静止状態での R_{ij} を基に, Nu を得ることで式 (7) から導出する方法が考えられる. ここで式 (6) を代入して物体間の温度差が同等の条件を仮定すると,

$$\begin{aligned} \frac{T_i - T_j}{R_{ij}} &= Nu \frac{T_i - T_j}{R_{ij}(v = 0)} \\ R_{ij} &= \frac{R_{ij}(v = 0)}{Nu} \end{aligned} \quad (8)$$

を得る。したがって流速が0ではない場合に物体間に同等の温度差がある時、熱抵抗が Nu に反比例して小さくなっており、静止状態に比較して Nu 倍だけ伝熱量が増大していることが分かる。一方、温度差は固定しないで伝熱量が一定だとすると、

$$\begin{aligned} Q_{ij}(v=0) &= \frac{T_i - T_j}{R_{ij}(v=0)} \\ &= Nu \frac{T_i - T'_j}{R_{ij}(v=0)} \\ T_i - T'_j &= \frac{T_i - T_j}{Nu} \end{aligned} \quad (9)$$

と書ける。但し、流速が0ではない場合に物体 i の温度は変わらないものとして、物体 j の温度が T'_j になるとした。式 (9) より、伝熱量が一定の場合には、流速が増すと流速が0の場合と比較して温度差が $1/Nu$ に減少することが分かる。

式 (8) は巨視的な視点で流速のある系を捉えた関係であるが、式 (7) について微視的な視点で調べると何が分かるであろうか。流体の静止状態では、熱伝導方程式 (5) の左辺、及び、 $v=0$ として

$$q_{v=0} = -\lambda \vec{\nabla}^2 T_{v=0} \quad (10)$$

となるので、図 79 に示すように、式 (10) を領域 Ω で体積積分すると

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d^3x q_{v=0} &= -\lambda \int_{\Omega} d^3x \vec{\nabla}^2 T_{v=0} \\ Q(v=0) &= -\lambda \int_A d\vec{S} \cdot \vec{\nabla} T_{v=0} \end{aligned} \quad (11)$$

と表せる。但し、 $Q = \int_{\Omega} d^3x q$ 、右辺の変形にガウスの積分定理を用いており、 A は Ω の表面である。ここで、式 (7) に式 (11) を適用することで以下の関係を得る。

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= Nu Q_{ij}(v=0) \\ &= -Nu\lambda \int_A d\vec{S} \cdot \vec{\nabla} T_{v=0} \\ &= -\lambda \int_A d\vec{S} \cdot Nu \vec{\nabla} T_{v=0} \end{aligned} \quad (12)$$

式 (11) と式 (12) の比較より、流速のある系では、みかけ上、流体が静止している場合と比較して、温度勾配が Nu 倍だけ大きくなっていることが分かる。ここで、式 (8) との相異について注意されたい。式 (8) に示した通り、流速の有無によらず物体間の温度差は等しく取れても、「流速が0でない系は流速が0の系に対して温度勾配は Nu 倍に増大」しており、その結果として伝熱量が Nu 倍に増大するのである。以上の内容は図 7 のようにまとめられる。

v が0でない場合、熱伝達率 $h[\text{W}/\text{m}^2\text{K}]$ を導入すると、温度差を考える幅を $L[\text{m}]$ とおけば、次元解析により

$$Nu = \frac{hL}{\lambda} \quad (13)$$

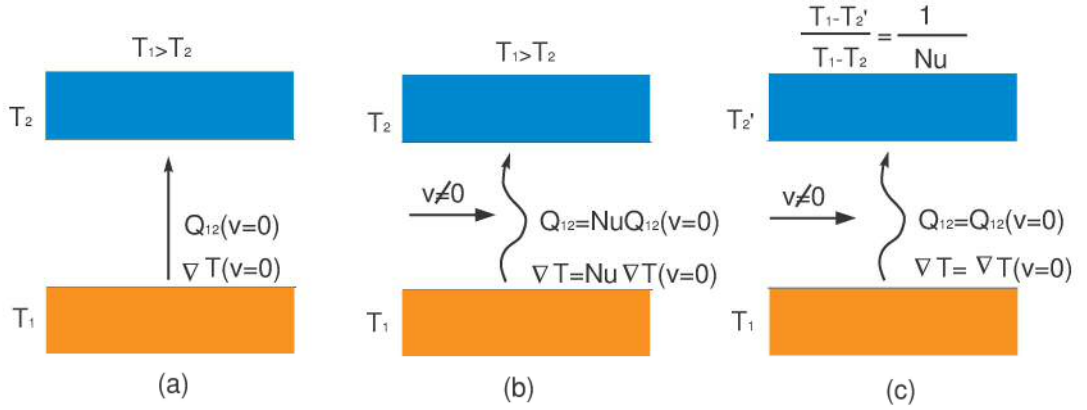


Fig 7: Velocity makes ∇T increase when Nu arise. (a) Velocity is 0 (b) Velocity increases when temperature is invariant (c) Velocity increases when heat transfer is invariant.

と表せるため、境界条件により Nu の推定が可能となる。ここで、 Nu を何か他の無次元数によって表せられないかを考えてみる。なぜなら、無次元数が等しい他の物理系は相似とみなされるため、 Nu を共有できて便利だからである。

h に影響を及ぼすと考えられる独立な変数として、熱伝導率 λ 、比熱 C_p 、密度 ρ 、粘性 μ 、流速 V 、特徴的スケール l 等が挙げられる。これらの基本次元は長さ L 、質量 M 、時間 T 、温度 Θ 、熱量 H を用いて、 $[h] = [\frac{H}{L^2 T \Theta}]$ 、 $[\lambda] = [\frac{H}{L T \Theta}]$ 、 $[C_p] = [\frac{H}{M \Theta}]$ 、 $[\rho] = [\frac{M}{L^3}]$ 、 $[\mu] = [\frac{M}{L T}]$ 、 $[V] = [\frac{L}{T}]$ 、 $[l] = [L]$ で表されるので、以下のようにべき乗の積の次元が 0 になる場合を考えてみる。

$$[h^{n_1} \lambda^{n_2} C_p^{n_3} \rho^{n_4} \mu^{n_5} V^{n_6} L^{n_7}] = \left[\left(\frac{H}{L^2 T \Theta} \right)^{n_1} \left(\frac{H}{L T \Theta} \right)^{n_2} \left(\frac{H}{M \Theta} \right)^{n_3} \left(\frac{M}{L^3} \right)^{n_4} \left(\frac{M}{L T} \right)^{n_5} \left(\frac{L}{T} \right)^{n_6} L^{n_7} \right] = [0] \quad (14)$$

これにより、式 (14) 内の各変数について、次元の一致によりいくつかの変数の積が他の変数の積の組によって表現され得ることが示唆される。式 (14) より、べき乗数を行列表記すると

$$\begin{matrix} & h & \lambda & C_p & \rho & \mu & V & L \\ H & \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \\ n_6 \\ n_7 \end{array} \right) & = & \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \\ L & \left(\begin{array}{ccccccc} -2 & -1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) & & & \\ T & \left(\begin{array}{ccccccc} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) & & & \\ \Theta & \left(\begin{array}{ccccccc} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & & & \\ M & \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) & & & \end{matrix} \quad (15)$$

と書ける。左辺の 5×7 行列を A として、 A をガウスの消去法の要領で基本変形すると、最終

的に

$$A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

を得る. 式 (16) より, 明らかに $\text{rank}(A)=4$ である. これから, 自明でない n は $7 - 4 = 3$ 個あるため, べき乗した積が無次元となるような物理変数の組が 3 個存在することが分かる. すなわち, 各物理変数はこれら 3 つの無次元数の組で表せる可能性がある*1.

式 (16) と式 (15) により, 自明でない n の組を挙げると

$$n_2 = -n_1 - n_3, \quad n_4 = n_6, \quad n_5 = n_3 - n_4, \quad n_7 = n_1 + n_4 \quad (17)$$

を得るため, 式 (17) を式 (14) に適用することで

$$\left[\left(\frac{hl}{\lambda} \right)^{n_1} \cdot \left(\frac{C_p \mu}{\lambda} \right)^{n_3} \cdot \left(\frac{\rho V l}{\mu} \right)^{n_4} \right] = [0] \quad (18)$$

と表せる. ここで, n_1, n_3, n_4 は任意の有理数である. 式 (13) より, 式 (18) の最初の括弧内は Nu に他ならないため, Nu を他の 2 つの無次元数で表せるとすると

$$Nu = a Re^b Pr^c \quad (19)$$

のように書ける. 但し, a, b, c は経験的に得られる定数であり,

$$Re = \frac{\rho V l}{\mu} \\ Pr = \frac{C_p \mu}{\lambda} \quad (20)$$

とおいた. Re はレイノルズ数, また, Pr は流体に固有の値であるプラントル数で, 粘性と熱伝導率の比率を表す無次元数である.

同様にして, 自然対流が生じている場合, 重力定数を $g[\text{m/s}^2]$, 体膨張係数 $\beta[\text{K}^{-1}]$ においてグラスホフ数 Gr を導入することで

$$Nu = a(Gr Pr)^b \quad (21)$$

と書くことができる. ここで, Gr は

$$Gr = \frac{\beta g \Delta T \rho^2 L^3}{\mu^2} \quad (22)$$

*1 この関係は, n 個の物理変数を含み, それらが ψ 種類の独立な基本単位を持つならば, 物理変数は $p = n - \psi$ 個の無次元パラメータを含む式と等価であるというバッキンガムの π 定理 [8] に等しい.

と定義される無次元数である．これらは次のように解釈される．レイノルズ数 Re は粘性に対する移流の大きさを，グラスホフ数 Gr は粘性に対する浮力の大きさを表す量であり，いずれも流体を攪拌する効果の強さを表す量である．すなわち，流体の移流の強さによる熱伝達量の変化が式 (19)，及び，式 (21) で表されている．更に， Pr は流体の粘性と熱伝導率の比率であるから，式 (19)，及び，式 (21) は流体の特性を取り入れた関係であるため，モータの作動流体の相違に関わらず作動状態を考慮した一律な表現が可能となっている．

1.4.4 Nu の適用事例

モータの外枠，すなわちフレームからの自然対流による放熱を考える．自然対流は浮力による流体の攪拌効果が生み出るのであるから，式 (21) を扱う． Gr ， Pr ， a 及び b は経験上，次のような値を持つ [11]．

Table 1: Natural convection correlation coefficients[11]. "lam" and "turb" mean laminar and turbulence regime, respectively.

Shape	$GrPr$ (lam to turb)	a (lam)	b (lam)	a (turb)	b (turb)
horizontal cylinder	10^9	0.525	0.25	0.129	0.33
vertical cylinder	10^9	0.59	0.25	0.129	0.33
vertical flat plate	10^9	0.59	0.25	0.129	0.33
horizontal plate[upper]	10^8	0.54	0.25	0.14	0.33
horizontal cylinder[lower]	10^9	0.525	0.25	NA	NA

表1において，水平 (horizontal) はモータが横置き，垂直 (vertical) はモータが縦置きであることを意味しており，円筒 (cylinder) と平板 (plate) は放熱盤の形状を表す (図8参照)．

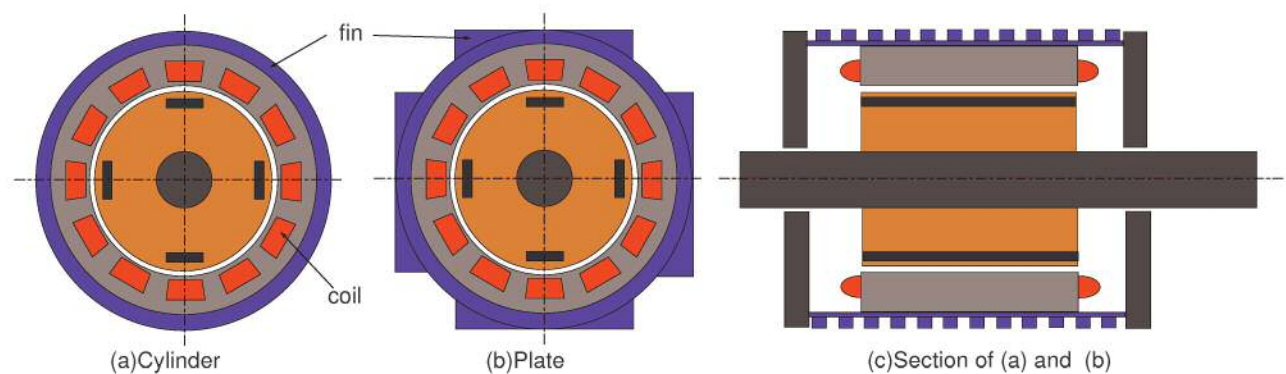


Fig 8: Example of motor

一方，強制対流の場合，攪拌による熱移動が支配的となり流れの遅い $Re < 5 \times 10^5$ で， $0.6 < Pr < 50$ のとき

$$Nu = 0.664Re^{0.5}Pr^{0.33} \quad (23)$$

となり， $Re > 5 \times 10^5$ で

$$Nu = (0.037Re^{0.8} - 871)Pr^{0.33} \quad (24)$$

と表されることが実験的に知られている [11]. 更に，フレームに冷却水路が設けられている場合には

$$Nu = 3.66 + \frac{\{0.065(D/L)RePr\}}{1 + 0.04\{(D/L)RePr\}^{2/3}} \quad (25)$$

など書くことができる．以上は，フレームから外気への放熱を考慮したものであるが，減磁等を考慮する場合，モータの内部における熱伝達を考慮する必要がある．

橘と福井らは，2重円筒間の熱伝達率について実験的に求めている．ここでは，ステータを一定の温度として，ロータをヒータで暖めることによって径方向の伝熱を実現している．ギャップ領域での温度 T_a は，図9に示すように，ロータ表面から $d/2$ における中間温度を用いる．彼

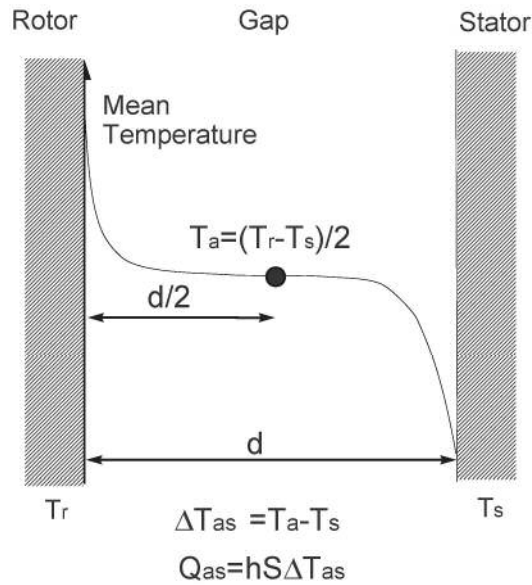


Fig 9: Mean temperature within gap region.

らは，特徴的な Re が実現されるまでのロータ回転数が低い間は，ヌセルト数 Nu が 1 に近いことを示しており，テイラー渦が実現されると

$$Nu = 0.092(TaPr)^{1/3} \quad (26)$$

にしたがって Nu が上昇することを示した。すなわち、図 9 において

$$\begin{aligned} Q_{as} &= Nu \frac{\lambda}{d} S (T_r - T_a) \\ &= 0.092 (TaPr)^{1/3} \frac{\lambda}{d} S (T_r - T_a) \end{aligned} \quad (27)$$

のように Q_{as} が表され、モータが静止状態に比べて、ロータ-ステータ間で同等の温度差が生じている場合に $Nu = 0.092 (TaPr)^{1/3}$ 倍の熱移動が生じることが理解できる。但し、 $0.75 < \eta < 9.39$ の範囲についての知見であり、EV モータのように η が 1 に近い場合については分かっていない。尚、ギャップ領域の熱移動量は、フレームに熱が到達するまでの中間の状況であるから、図 6 より、フレームからの放熱量と同等である。以上より、モータの除熱構造について議論を行う際、熱回路網で熱移動についての状況を把握してから、各部分毎に Nu を得ることで、モータ全体を含めた熱移動量と温度についての知見を得られることが理解できる。

1.4.5 モータ位置

図 10 に各種の EV 構造概略図を示す。EV の構造の 1 つであるコンベンショナル方式 (図 10(a)) の特徴として、1 台のモータで駆動し、デフなどの動力伝達系での損失がかなり大きいことが挙げられる。しかしながら、モータサイズの制約が小さいことから大容量のトルクを得られる利点がある。ノートランスミッション方式 (図 10(b)) はコンベンショナルの改良型となっており、トランスミッションで発生していた回転力伝達の損失をなくすことができ、占有空間も減らすことができる。デフレス方式 (図 10(c)) はデフがなくなり、損失が低減されている。ただし、制御用インバータは 2 組必要となり、回転部分の重量も大きくなる。インホイール方式 (図 10(d)) は、モータを駆動輪の中に取り付ける方式なので、大幅に車体内の空間を確保でき、動力伝達系の損失も低減できる。しかしながら、ばね下重量が重くなる、モータに耐久性が必要となる、モータ内部に水が入る可能性がある、などといった欠点がある。しかしながらインホイール方式は、空間の制約が厳しい駆動輪の内部にモータを取り付けるため、除熱方法としては空冷が適切だと考えられる。空冷を実現することができれば、水冷および油冷装置を取り除くことができ、軽量化・高効率化が期待される。つまり空冷で十分な徐熱案を確立することは、EV の技術を促進する上で重要である。

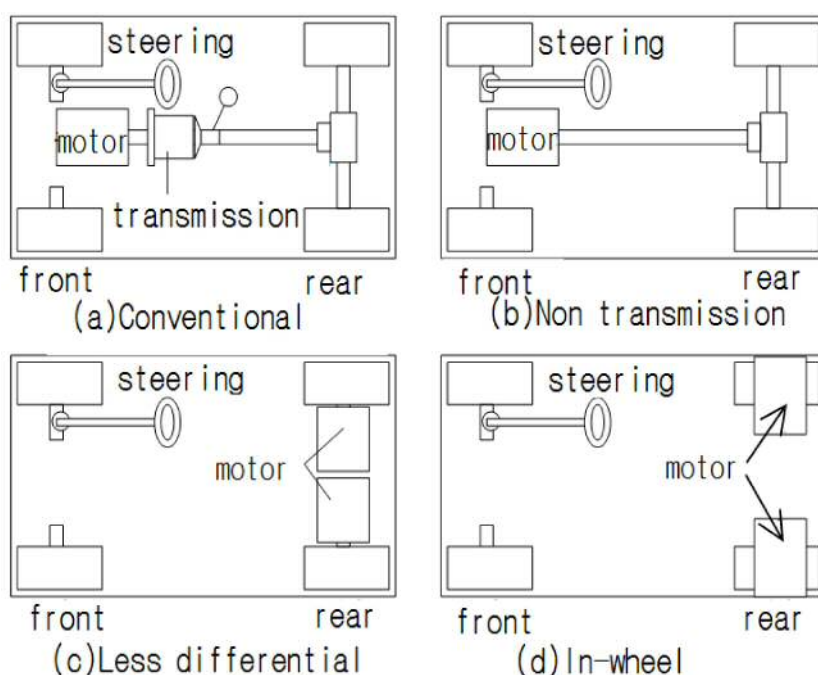


Fig 10: Each kind of construction for vehicle.

1.5 テイラー渦

1.5.1 概要

テイラー渦とは、中心軸が同心である二つの回転円筒間の狭い隙間に発生する流れである [16]. 図 11(a),(b) に二次元クエット流とテイラー渦の構造図を示し、図 11(c) にテイラー渦の流動様式である WVF (Wavy Vortex Flow) の流動構造図を表した. ここでは外側の円筒を固定し、内側の円筒のみを回転させており、この駆動方式はモータではインナーロータ方式として多数を占める. 二つの円筒間の隙間は円筒径に比べて小さいとし、レイノルズ数 Re が非常に小さい場合、流れは円筒周方向速度のみを持つ、CF (Couette Flow) となることを図 11(a) に示した. そこから Re を増加させ、ある値 Re_c に達すると、回転方向の異なるドーナツ状の渦が交互に並び、定常な軸対称流れへと遷移して TVF (Taylor Vortex Flow) と呼ばれる流動様式に変化し、図 11(b) のように表すことができる. Re が Re_c より大きくなり Re_w を越えると、テイラー渦が揺動を受けて TVF が変形した非軸対称流れである WVF に遷移して、図 11(c) で表される状態となる. 更に Re 数を増加させていくと、周期的揺動に付加的な成分が現れ、方位角渦の振幅が時間によって変化し始める. WVF で形成されていた波に変調が加わる MWVF (Modulated Wavy Vortex Flow) へと遷移する [16][14]. これ以上に Re 数を上昇させると、流動は乱雑となり、 Re 数の増加によって次第に複雑化する TTVF (Turbulent Taylor Vortex Flow) へと変化する [16]. 上記のようにテイラー渦は、 Re 数の増加によって様々な流動様式に変化する.

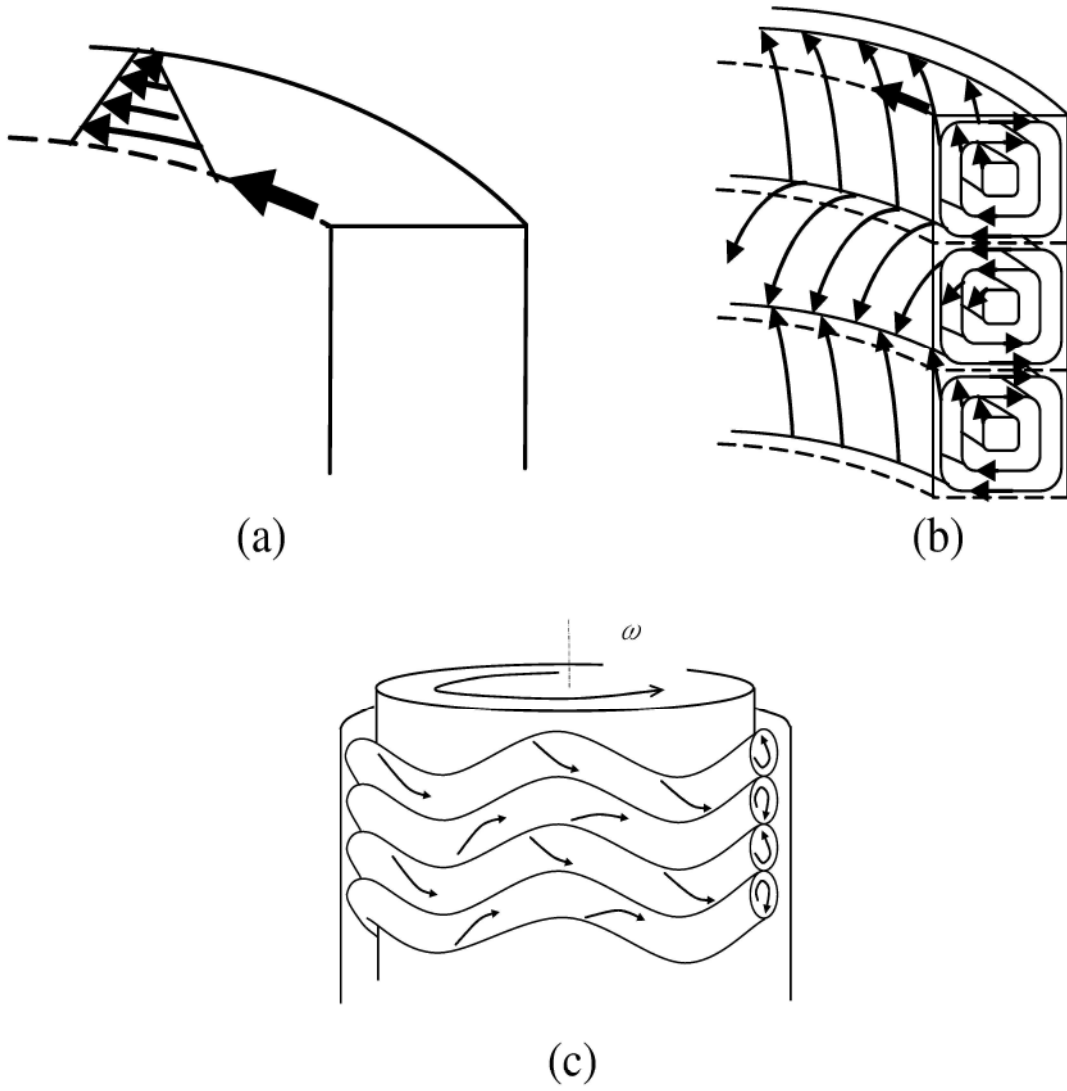


Fig 11: Schematic drawing of (a)Couette flow, (b)Taylor vortex, (c)Wavy vortex flow

1.5.2 テイラー渦の発生原理

テイラー渦は、圧力と遠心力のバランスの不安定によって発生する。図 12 に円筒間の流れを軸方向から見た図と流体塊の力のつり合いを示し、図 13 にテイラー渦発生メカニズムを示す。図 12 および図 13 の上図は円筒管を軸と垂直方向に切ったときの断面図を示しており、図 12 の下図は隙間内に流れる流体塊の力のつり合いを示している。図 13 の下図は、流体塊の力のつり合いを二次元座標で示したグラフであり、横軸に半径方向、縦軸に流体塊に発生する遠心力を示している。また、半径が大きくなるにつれ遠心力が小さくなるような曲線は、遠心力と周囲の圧力がつり合っている状態を示している。流れは Re が非常に小さい場合、単純なクエット流となる。このとき、流れの中のある流体塊を考えると、この流体塊には遠心力 V^2/r が外向きに働いており、これとバランスするように周囲の流体の圧力の合力が内向きに作用 [14] している (図 12)。つまり、遠心力が半径方向に進むにつれ小さくなることより、内側にある流体塊は、外側にある流体塊よりも圧力の合力は大きい値となる。ここで、なんらかの原因により、流体塊が外側に δr だけ移動したとする (図 13 ①)。流体塊は慣性により、元の位置の流速で円周方向に運動しようとするが、周囲の圧力は移動した場所での圧力値となるので、周囲の圧力よりも遠心力の方が大きくなる (図 13 ②)。その結果、遠心力と圧力のつり合いのバランスが不安定 (遠心力 > 圧力) となり、遠心力により流体塊は外側に移動する (図 12 ③)。上記の結果は連続して発生するので、流体塊が微小に移動しただけでも、外側への移動が助長され、円筒壁にぶつかると、半径方向の流れは円周方向へ向きを変える。逆に、流体塊が内側に δr だけ移動したとする (図 12 ①) と、慣性により、元の位置の流速で円周方向に運動したときの遠心力に対し、周囲の圧力が大きくなる (図 12 ②')。そのため、つり合いのバランスが不安定 (遠心力 < 圧力) となり、周囲の圧力により流体塊は内側に移動する (図 12 ③')。つまり、内側の円筒の方が外側の円筒よりも早く回転している場合、その隙間の流れは常に不安定であり、流れは図 11(b) のような細胞構造となる。

1.5.3 パラメータと実験装置の模擬条件

テイラー渦に関するパラメータは、装置の特徴を示す幾何学的パラメータと流動の特徴を示す物理的パラメータがある [13]。幾何学的パラメータには、半径比およびアスペクト比があり、半径比 η は、内側シリンダ径と外側シリンダ径の割合を示し、アスペクト比 Γ は、隙間に対するシリンダ高さの割合を示している。物理的パラメータは、レイノルズ数 Re 、テイラー数 Ta 、規格化したレイノルズ数 R^* があり、それぞれ以下の定義で示す。 r_i は内側シリンダ半径、 r_o は外側シリンダ半径、 L はシリンダ高さ、 d はシリンダ間の隙間、 ω は内側シリンダ角速度、

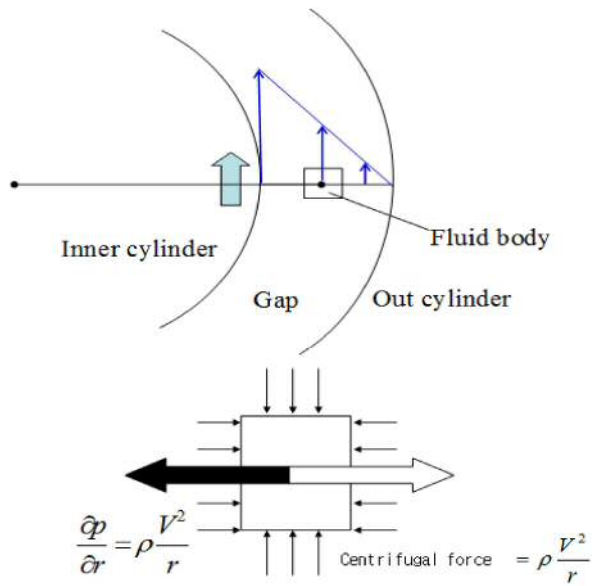


Fig 12: Balance of force in the ramp within fluid

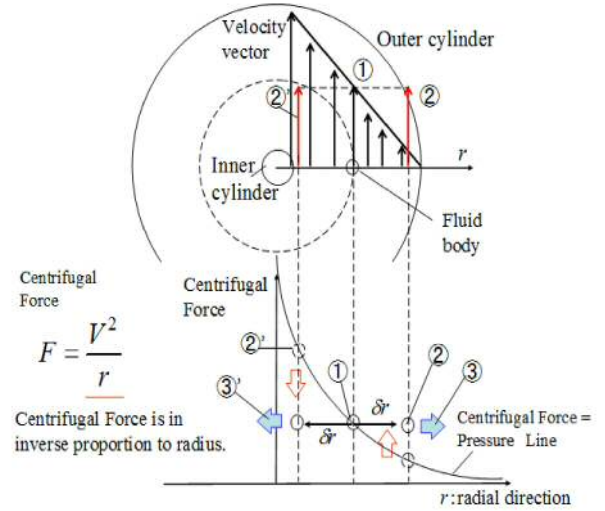


Fig 13: Balance of force in the ramp within fluid in case of TVF

ν は動粘度, Re_{crit} はテイラー渦が発生したときの Re 数である.

$$\eta = \frac{r_i}{r_o} \quad (28)$$

$$\Gamma = \frac{L}{d} \quad (29)$$

$$Re = \frac{r_i \omega d}{\nu} \quad (30)$$

$$Ta = Re^2 \sqrt{\frac{d}{r_i}} \quad (31)$$

$$R^* = \frac{Re}{Re_{crit}} \quad (32)$$

EV モータ実機の回転数は, 時速 60 km 程度で 3000 rpm と高速に回転する. 実機の作動流体が空気であるのに対して, 本実験装置では水とし, Re 数の相似則を適用して模擬することとする. 以下に相似則の計算式を示す.

$$Re_a = Re_w \quad (33)$$

$$\frac{2\pi n a}{60} \times \frac{r_i d}{\nu_a} = \frac{2\pi n w}{60} \times \frac{r_i d}{\nu_w} \quad (34)$$

$$n_w = \frac{\nu_w n_a}{\nu_a} \quad (35)$$

ただし, n は回転数, 添え字の a は作動流体が空気, w は水を示す. Re 数の相似則から, 実機の回転数が 3000 rpm の場合, 水を作動流体として実験装置の回転数を 200 rpm とすることで, 実際の流動を模擬できる. また, 装置の形状は実機と同じ値として模擬するため, アスペクト比・半径比は, 実機と同じ値である.

1.5.4 過去の研究における知見

回転二重円筒管内における流動は、テイラー渦などに代表される流れ場として既に多くの報告がなされている [9][10]. このような流動特性を参考にしながら、EV モータを設計する上では放熱特性が最も重要な課題の一つであるにも関わらず、 Re の相似則などに基づくモデル実験による検証は膨大なコストを要するため詳細な追求は稀であり、試作段階においてオーバーヒートの課題に直面することがある。しかしながら、今後モータのエネルギー密度が益々向上する事情を踏まえると、連続運転時における信頼性を獲得する上でモータの流動構造、及び伝熱特性を設計段階において捕らえておくことは重要である。

回転二重円筒管内での熱伝達特性に注目したもので、ギャップ領域のヌセルト数 Nu とテイラー数 Ta の関係については既にいくつかの報告がなされている。Becker は、Kayer らと共に縦置き回転二重円筒内の熱流動特性について、内部流体が一様な温度の場合と、底辺と上端部に温度差のある場合について内外円筒間の Nu について調べた。Becker は更に、NS 方程式の速度場を平均値と平均値からのずれとに分け、テイラー渦による揺動をずれとして扱うことで、円筒内部の温度差とテイラー渦の生じる臨界点の関係について、実験との誤差を数%以内に収めた解析解を得ることに成功した。また、橘と福井は、ロータとステータのそれぞれに冷却と加熱の様々な条件を印加し、更に円筒管内に軸方向の流れのある場合を含めた Nu を実験的に調べることを行った。このように回転二重円筒内の温度特性についての報告は例を挙げればきりが無いが、詳細な流れ場のプロファイルと Nu との関係について調べた報告はほとんど無いのが現状である。また、EV モータのように内円筒と外円筒の半径比 η が 0.99 以上の例についての報告もほとんどなく、本研究で詳細を調べることにした。

テイラー渦を実験体系とした過去の研究におけるテイラー渦発生時のパラメータを、典型的な EV モータと比較して表 2[16][17][18][19] に示す。表 2④の論文よりアスペクト比 Γ が十分大きいならば、 Γ が増加しても Re_c は変化しない。しかしながら、外側円筒と内側円筒の半径比 (η) の増加によって Re_c は増加するという知見が実験的に得られており [19]、流動構造における η の依存度が強いことが分かる。例として、 η が 0.9 前後の論文では、 Re_c は Γ によらずほぼ一定値となっている。一方、J. A. Cole[19] および R. W. Walden[14] らによって、 Re を実験パラメータとした場合、 Γ が増加するほど、テイラー渦の流動様式 WVF の領域は狭くなっていくことが知られている。この際、MWVF の領域は増加する傾向にある。近年の研究成果により、TTVF 内に関する知見が得られている。 Re を増加するにつれ、TTVF 領域内に推移すると複雑な流れとなるが、乱雑となるがゆえに方位角波の周波数が消えたように見える。この領域を R. W. Walden[14] らは非周期的な遷移と呼んでいる。しかし、その領域から Re を増加させると、方位角波は再出現し、さらに Re を増加させると、再出現した方位角波は消えたように見える。上記の現象は Γ が十分大きい場合 ($\Gamma \gg 25$) に発生する。さらに、その現象は装置の末端効果の影響を少なくすることに起因 [14] すると考えられている。

表 2⑤に示すように典型的な EV 車の体系においては、半径比 η 及び Γ が従来の研究に比べて大きいことが分かる。また、過去に行われたテイラー渦の研究では、ロータ端面側の流動の影響が無視されることが多いが、本研究で対象とする EV 用のモータではロータ端面側にはロータとモータを覆うフレームとの干渉を避けるための空間が設けてあり、流れ場が従来の研究結果とは異なる可能性がある。

Table 2: Description of TVF

	Description	Author	$2r_i$ [mm]	$2r_o$ [mm]	d [mm]	L [mm]	η	Γ	Re_c
①	Oscillating Taylor-Couette flow	Morinaga, M., Takeda, Y.	190	210	10	200	0.905	20.0	134.5 4
②	Particle-fluid velocities and fouling in rotating filtration of a suspension	Steven, T., Wereley, A. A., Richard, M. L.	84.6	104.4	10	450	0.810	45.0	97
③	Experimental observation of the quasiperiodic modes in a rotating Couette system	Takeda, W. E. Fischer, J., Sakakibara, K., Ohmura, K.	188	208	10	200	0.906	20.0	134.7
④	Taylor vortex instability and annulus length effects	Cole, J. A.	91.42	103.2	5.89	150 - 250	0.894	30 - 50	136.7
			94.45	100.01	2.78	50 - 250	0.954	20 - 110	233.9
⑤	Typical EV motor geometry	-	150	152	1	100	0.99	100	-

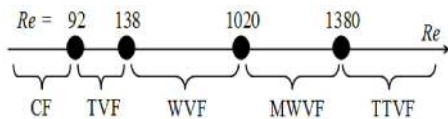


Fig 14: Balance of force in the ramp within fluid

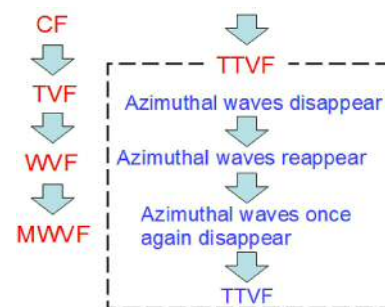


Fig 15: Balance of force in the ramp within fluid in case of TVF

2 流動実験

2.1 実験装置および可視化方法

流動実験には、キャリオスコープ粒子を用いたロータ円筒面、及び、ロータ端部の可視化と、シルバーコート粒子を用いた終端部の可視化を行った。キャリオスコープ粒子とは、アミノ酸を構成する塩基の一つであるグアニンを主成分とする扁平形の物体であり、寸法形状は $6 \times 30 \times 0.07 \mu\text{m}$ であり、水の体積に対し 0.6% の濃度となるように加えた。一方、ナイロン粒子は球状の粒子であり $\phi=50 \mu\text{m}$ のサイズであり、流体の流れに追従する。その粒子の移動を追うことにより、その箇所の流れを知ることができる。尚、ナイロン粒子の比重は 1.03 、水の量 3L に対し、 4.1 mg 混入した。ナイロン粒子の濃度が多すぎると、追従が難しくなるため、十分追従できることを確認することで、上記の量と設定した。

2.1.1 ロータ円筒面流動可視化

実験装置の概略図およびキャリオスコープ粒子を用いたロータ円筒面流動可視化における光源・カメラの配置図を図 18 に示す。キャリオスコープ粒子は、図 16 に示すように、流れを有する水中に含めると流れ場と平行な方向に向きを揃える性質があるため、混入した水溶液にライトを当てると流れ場の状態に応じた輝度が反射光として得られる。そのため、キャリオスコープ粒子を混入させた装置のロータを回転させると、流れ場の状態を可視化して捉えることが可能となる。実験装置は EV モータの二重管を模擬しており、内側にロータ、外側にステータを示す。ステータは可視化の際に屈折率の影響を除去するためウォータージャケットで覆い、ロータは軸によってモータと連結している。モータモデルの寸法形状として、ロータ外径は $2r_i = 218 \text{ mm}$ 、ステータ内径は $2r_o = 220 \text{ mm}$ 、隙間は $d = 1 \text{ mm}$ 、ロータの長さは $L_i = 40 \text{ mm}$ 、ステータの長さは $L_o = 100 \text{ mm}$ 、半径比は $\eta = r_i/r_o = 0.99$ 、アスペクト比は $\Gamma = L_i/d = 40$ とおいた。ロータ円筒面とステータ円筒面に挟まれた厚さ d の空間をギャップ領域、もう一方の外径 r_o 、奥行き $(L_o - L_i)/2$ となる空間をロータ端部と定義する。実験時にはポンプとタンクを用いてステータの内側に水を満たす。時空間図の可視化方法として、水には、キャリオスコープ粒子 (ENGELHARD 社製, Mearlmaid AA) を混入させる。容器に水を満たした後、水の体積に対し 0.6% の濃度の粒子を混ぜてから、インバータを用いてモータに連結したロータを回転させる。光源はメタルハライドランプを用い、可視化領域に照射してから高速度カメラによって可視化する。可視化領域は、ロータ円筒面、およびロータ端部とする。

2.1.2 終端部流動可視化

終端部の流動可視化における光源・カメラ配置図として、図 18 の (a) に装置の俯瞰図、(b) に (a) を上方から見た様子を示す。装置内の約 2L の水にシルバーコート粒子 $\phi = 10 \mu\text{m}$ を耳かき一杯程度混入する。光源は 1.5 W 出力のレーザを使用し、軸と水平方向からシート状に照射することでシルバーコート粒子の軌跡を捉えて流跡線を得る。軸と同じ高さに位置する隙間とロータ端部の領域を、軸と垂直方向から観測した。このとき、流れる粒子の軌跡を撮影す

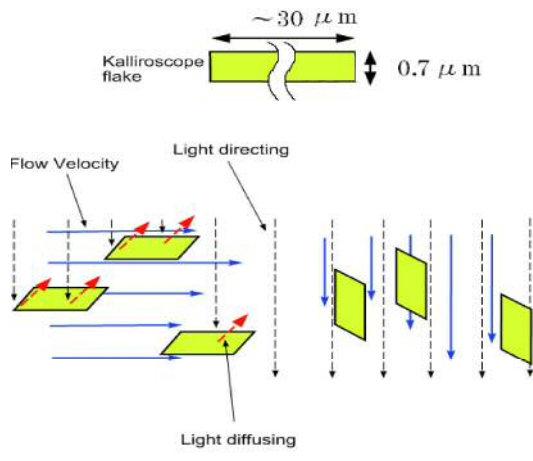


Fig 16: Image of effect due to Kalliroscope flake.

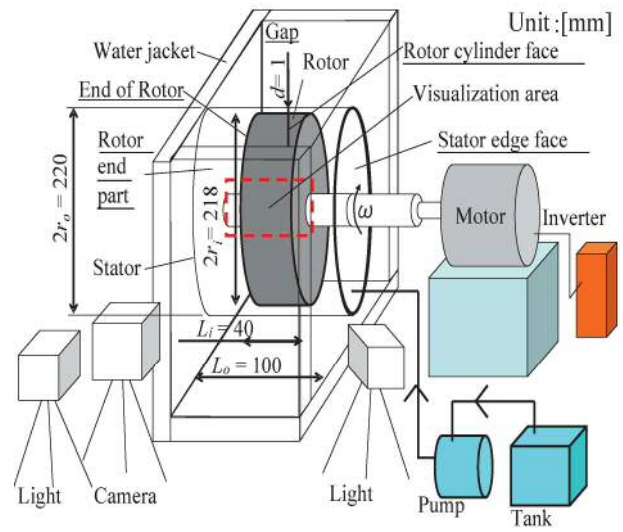


Fig 17: Experimental apparatus for visualization of the flow at the rotor cylinder surface.

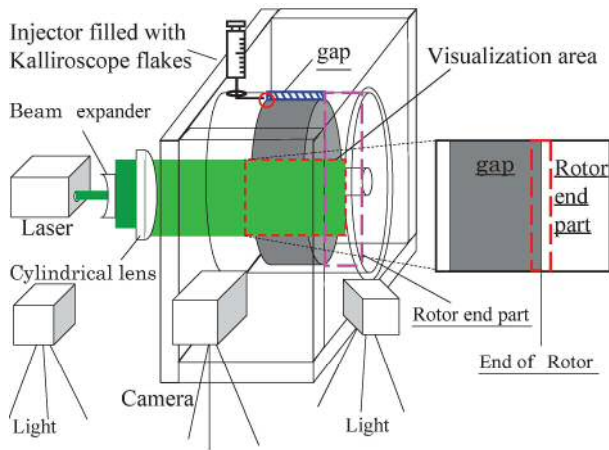


Fig 18: Experimental apparatus for visualization of the flow at the end of the rotor

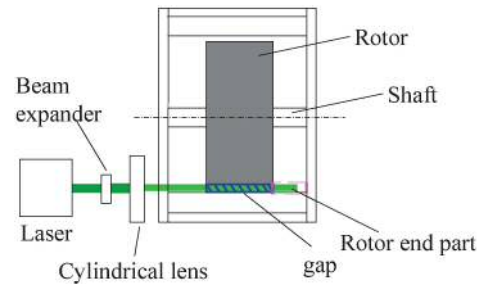


Fig 19: Optical setup and the visualization region at the rotor surface

るため、高速度カメラの撮影速度は24 fps(41.67 msに1回撮影)、露光時間は41 msに設定した。実験パラメータには Re を用い、 $Re = 140 \sim 1784$ の範囲内で変化させる。 Re を増加させた後、2分間程度待ち、流動が安定してから可視化した。

2.2 実験結果

2.2.1 ギャップ領域の流動構造

ギャップ領域とロータ端部の含まれるロータ円筒面の可視化画像を図20に示す。ロータ円筒面の流動において、 $Re = 247$ のとき、流動の変化は見られない(図20(a))。しかし、 $Re = 315$ では、ロータの円筒面上に縞模様の流動が発生する(図20(b))。さらに Re を増加させると、縞模様の揺動および縞模様が細くなる現象が見られる(図20(c)-(d))。

$Re = 315$ において、発生した縞模様の数は太く黒い筋模様注目すると22個であり、縞の間隔はおよそ $2d$ であることが分かる。更に詳細に観察すると、これらの筋模様の中に細い線のあることが確認できる。すなわち、黒く太い筋模様は2つの渦のペアをなしていると考えられる。また、その流動遷移は既存にあるテイラー渦の流動遷移と次の2つの点において合致することから発生した縞模様はテイラー渦[13][14]であると考えられる。一つ目として、テイラー渦に遷移するときの Re がこれまでの経験則とおおよそ一致していることが挙げられる。例えば、表2で過去のテイラー渦に関する知見を載せてあるが、アスペクト比 η が今回の場合0.99に近い0.954となっている④では、臨界レイノルズ数 Re_c が233.9となっており、今回の実験での315と近い値を示している。2つ目は、渦の幅がギャップ幅 d と同程度であるが挙げられる。今回の実験では軸長が40に対して、可視化の際の筋の個数が約40個となっているため、二つの渦で一つの筋模様ができるとすれば、本研究におけるギャップ領域での渦の個数は揺動が生じる前には約40個であると考えることができる。すなわち、渦のサイズはギャップ領域の厚みと同程度であることが過去の報告と一致している。以上より、本実験で得られた可視化画像は過去の経験と比較しても同様の条件が成り立つため、テイラー渦を捉えたものだと認識できる。

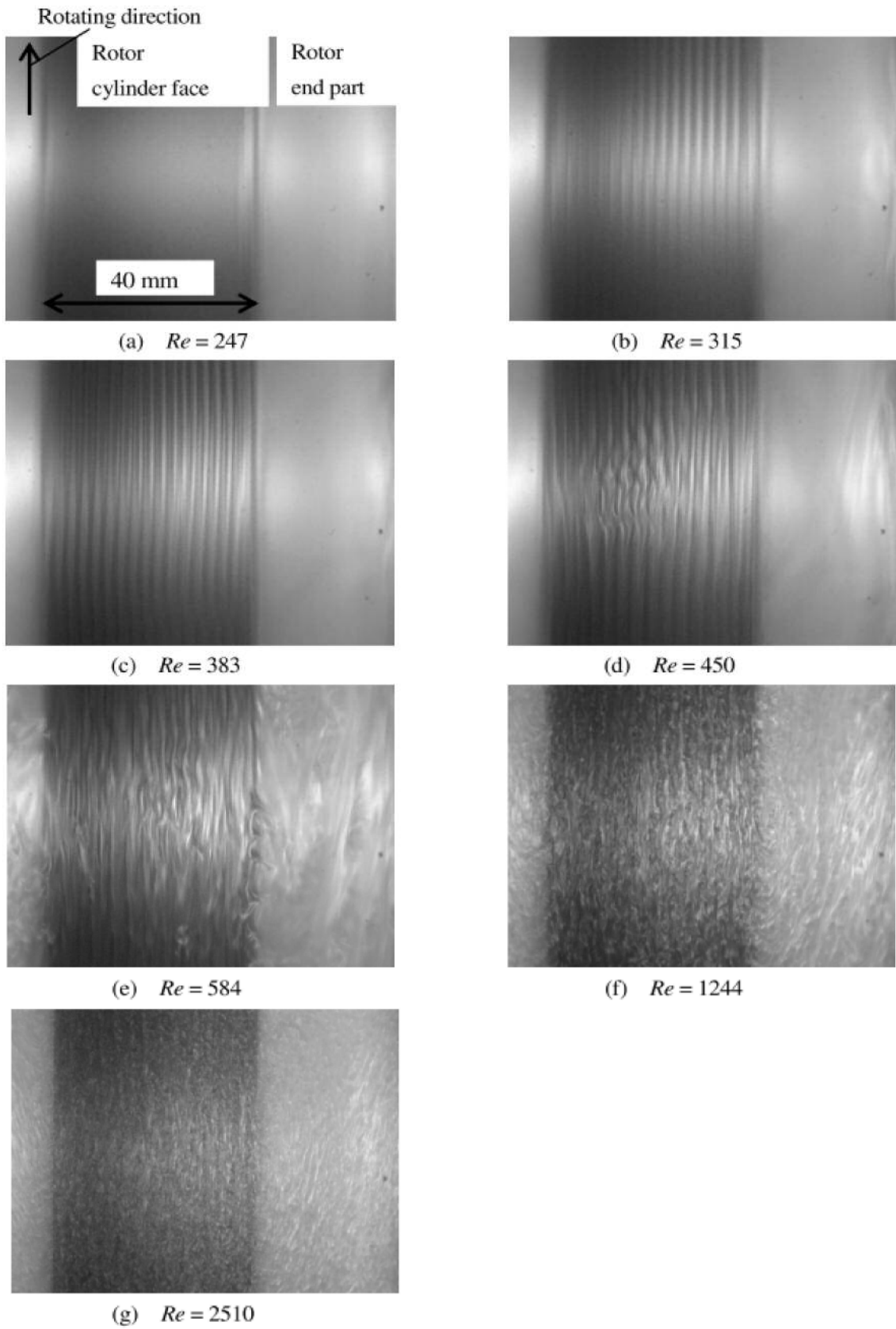


Fig 20: Flow structure at the rotor cylinder face and the rotor end part.

各 Re での可視化画像について任意の軸方向の輝度分布を調べたものを図 21 の中央図に表し、更にこれを高速フーリエ変換（以下 FFT）した結果を図 21 の右図に示す。但し、図 21 左図においてロータ左端部を $z=0$ とおき、 $0 < z < 0.04$ について輝度値を調べてある。このとき、画像の横幅は 512 pixel である。輝度の濃淡画像から FFT を施すと、可視化領域が有限長であることに起因して $k=0$ 近傍で値が突出するが、これは物理とは無関係な成分のため無視する。

図 21 (a) ではライトを照射する位置関係による輝度値の変動を除き、特別な流動が生じていないと言える。そのため、 $Re=247$ の値で除すことで図 21 (b) 以降の輝度値を規格化して表した。図 21 (b) 中央図の輝度値より、 $Re = 313$ では軸方向で振動する輝度のピークが見られ、“↓”で示すようにその数はおおよそ 18 個である。ここで、図 21 (b) 右図の FFT の結果を見ると、 $k=500$ 程度の波数で鋭いピークが立ち、一定の規則性を持つ流れ場の表れと言える。一方、図 21 (c) の $Re=383$ では、やや不鮮明ではあるが輝度に縞模様が確認できるため、一見すると図 21 (b) と変わらないようである。ところが、図 21 (c) 右図の FFT を見るとピークの位置は $k=500$ に加えて倍周期の $k=1000$ にも生じており、流れ場に二重周期運動が存在している。同様にして、図 21 (d) 左の画像では揺動が進行して輝度値が明らかに波打っており、FFT では周期的な縞模様と揺動の合成により 2 つのピークが明瞭に現れている。図 21 (c) 及び図 21 (d) で見られる周期の分岐は Hopf 分岐と考えられる。このような流れ場の Hopf 分岐は、層流から乱流への遷移過程で生じるもので、自然界でもしばしば見られる現象である。

これ以上の Re では流れ場の乱れが大きくなるため、輝度の FFT からはっきりとしたピークを数えることが困難となる。図 21 (e) の $Re = 584$ から分かるように、 Re が高まることで、輝度の FFT において低波数から高波数にわたって成分が分散していく様子が確認できる。図 21 (f) 及び (g) より $Re = 1244, 2510$ と Re が上昇するに伴って輝度分布の振動の波長は一層不規則で短くなり、FFT では広い裾野を持つ状態となる。以上より、輝度分布は Re が小さい時には平坦であるが、流れ場に縞模様が生じてから Re が上昇するに伴い、揺動に起因した二重周期が現れた後、次第に不規則かつ微細化することが分かった。

2.2.2 ロータ端部の流動構造

ロータ端部の可視化画像を図 22 に示す。ロータ端部の流動において、 $Re = 140$ のときステータ円筒面から中心に向かう渦巻き状の筋が観測された (図 22(a))。さらに Re を増加させると、筋状のような流動が細かくなることが分かる (図 22(b)-(d))。いずれの結果においても、ロータ外周側から内側に向けて渦巻き状の筋が観測されていることが言える。これら筋状の詳細な流れの様子については後の数値解析の章で再考する。以上より、 Re の上昇に応じてロータ端部の流動も細かくなることが分かった。

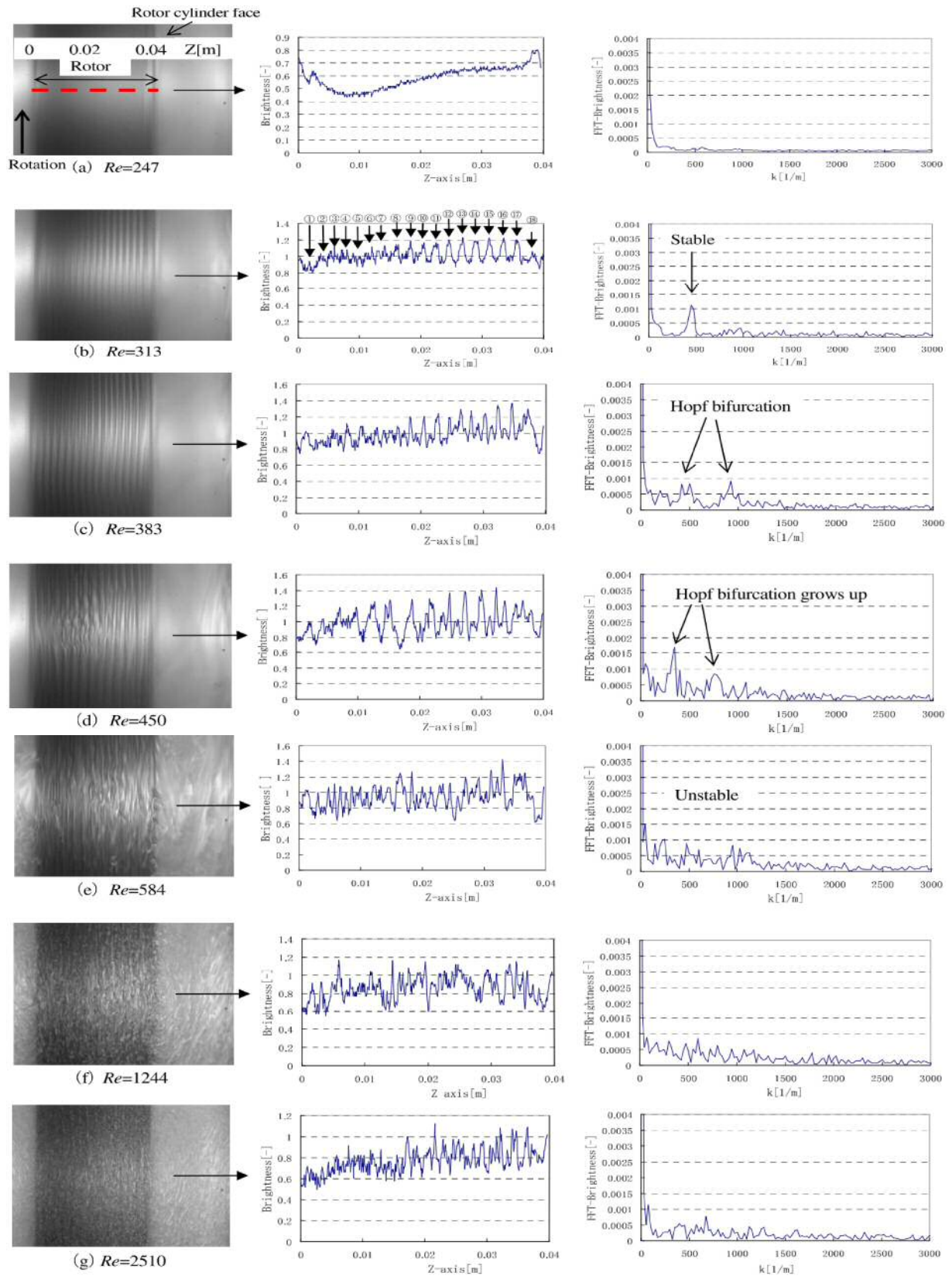


Fig 21: Flow structure at the rotor cylinder face and the rotor end part.

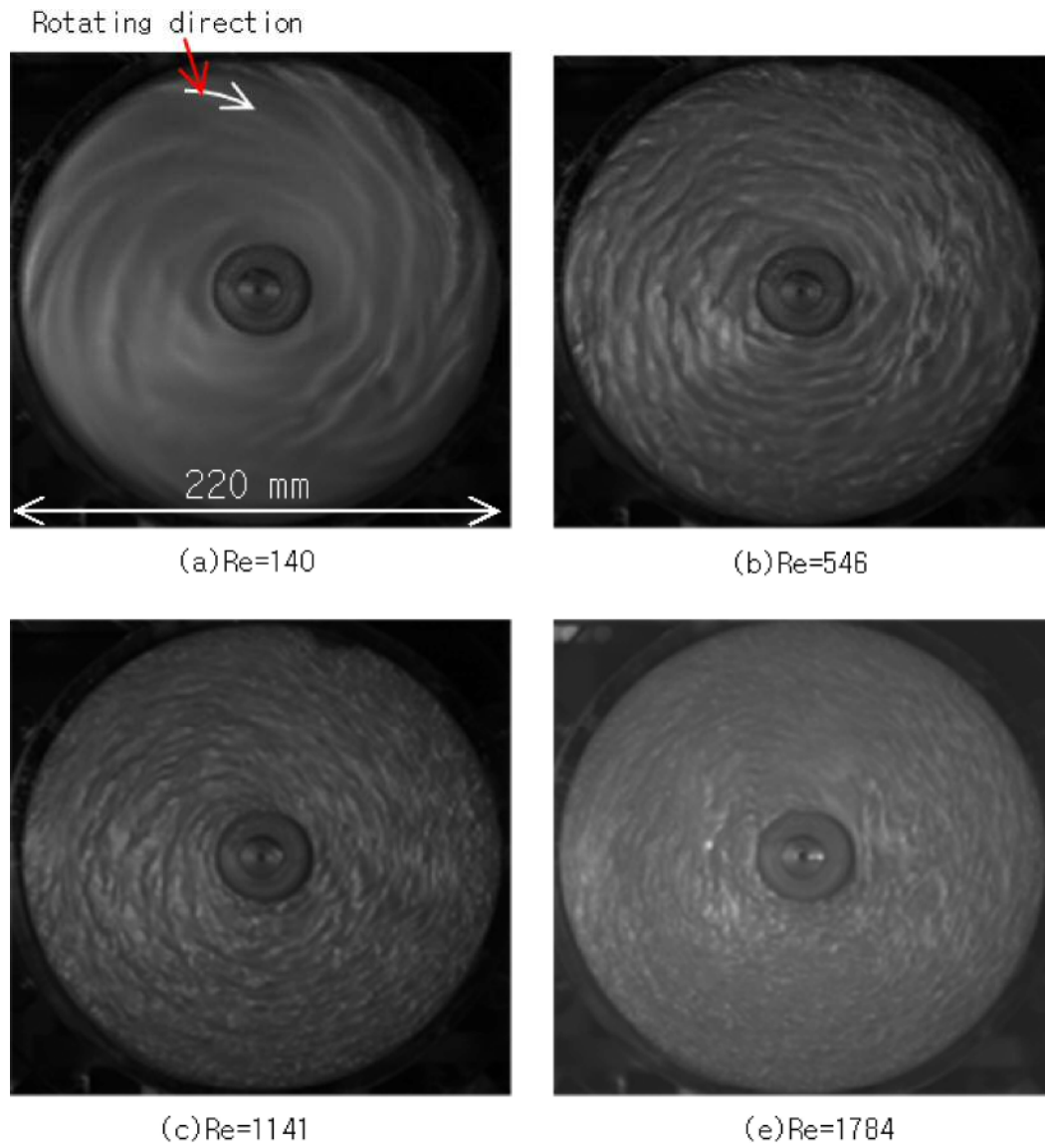


Fig 22: Flow structure at the stator edge part .

2.3 終端部の可視化実験

2.2.1 節では、ロータ円筒部の流れ場がある一定の Re を超えたところで揺動を生じる等の知見を得た。次に、この現象が工学的に重要な意味を持つことを述べる。終端部における粒子の可視化を、図 23 に示すように点線枠内部をロータのサイドから撮影することで行った。

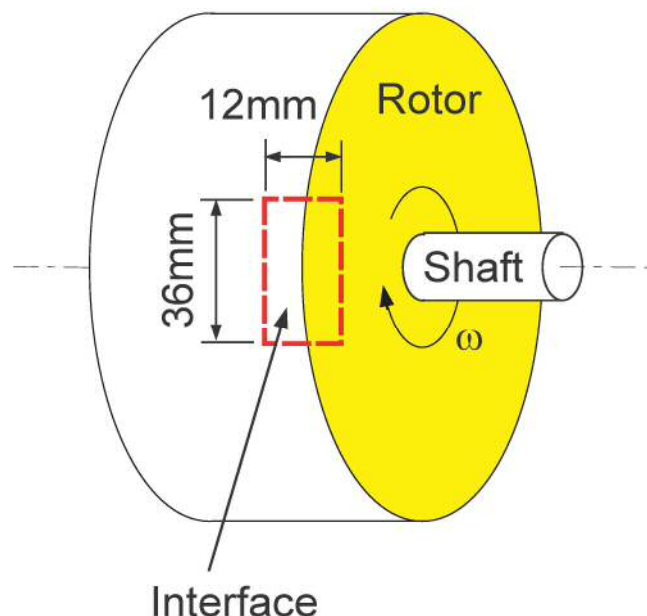


Fig 23: Observation of rotor end part.

2.3.1 注入実験

図 24 の (a) に、一例として $Re = 383$ の可視化粒子注入実験の時空間画像を示す。時空間画像とは図 21 のようなロータ円筒部の時系列可視化画像について、特定の縦 1 pixel × 横一列の領域内にある画像を各撮影フレームについて抜き出して、図 24 (a) 左図のように時系列ごとに並べる画像処理である。図 21 (a) 左図より、可視化粒子は注入される時間を $t = 0$ s として、ギャップの上部からロータの左側付近の位置で注入される。また、ロータは上方向に回転している。更に、図 21 (a) の右図は輝度の変化を $t = 0$ s, $t = 5$ s, $t = 15$ s について z 軸に沿った値としてプロットしてある。図 21 (a) 右図より $t = 0$ s のとき、粒子はギャップ内にまだ存在しないので、輝度分布は平坦である。一方、 $t = 5$ s になると可視化粒子が注入されるため、輝度分布の輝度が大きくなる。その後、時空間図では縞模様が形成されるため、 $t = 15$ s の輝度分布は変動している。時空間図の輝度値を各時刻で軸方向に積分することで、ギャップ領域とロータ端部間の流動の傾向について調べられる。図 21 (b) のように、時空間図の縦 1 pixel

、横一列の輝度を抜き出し、式 (36) で示すように輝度の積分値から軸の大きさを除すことで、時系列変化を調べることとした。

$$\overline{Brightness(t)} = \frac{\int_0^{0.04} dz Brightness(z, t)}{\int_0^{0.04} dz} \quad (36)$$

式 (36) の z は軸方向を示し、 $Brightness(t, z)$ は位置 z 、時刻 t における輝度値である。 $\overline{Brightness(t, z)}$ は軸方向の輝度の積分値であり、以降、特に断らない限りこの値を輝度と呼ぶこととする。

図 25 に、式 (36) に基づくギャップの輝度の時系列変化を示した。グラフの横軸は時間、縦軸は輝度を示し、プロット線と共に各 Re における $t = 10$ s のロータ円筒部可視化画像と共に示す。 $Re = 247$ において、輝度は時間軸に対してほぼ一定となっているのに対して、縞模様が形成される $Re = 383$ では徐々に減少する様子が観測されている。図 21 より、このあたりの Re では流れ場に筋模様が生じているため、流動の特徴が輝度に影響を与えているとみなせる。これ以降、 Re を増加させると輝度が急激に減少する様子が確認できた。ここでの Re の流れ場は、図 5 より縞模様に加えて揺動が生じており、 $Re = 383$ の場合と同様、特徴的な流れ場が粒子の拡散を促進していると推定できる。しかしながら、このような揺動を生じた流れ場と輝度減少との直接の関連については定かではないため、ギャップ領域とロータ端部の境界部分について詳細を調べる必要がある。

ロータ円筒部を詳細に可視化し、粒子の挙動を調べた。図 28 にロータ円筒部及びロータ端部の境界の画像を示す。図 28 の (a) は $Re = 247$ 、(b) は $Re = 383$ 、(c) は $Re = 450$ 、(d) は $Re = 917$ の可視化結果である。図 28 (a) ~ (d) の左図にロータ円筒部の可視化画像を示し、右図に各時間における終端部の可視化画像を示す。(a) $Re = 247$ において、ギャップとロータ端部の境界付近では粒子の量は少なく、ギャップからロータ端部への粒子の移動は見られない。図 28 の (b) $Re = 383$ では、ギャップには縞模様が形成されているが、 $Re = 247$ と同様に明らかな粒子の移動は見られない。しかし、(c) $Re = 450$ ではギャップからロータ端部への粒子の拡散が発生している。さらに (d) $Re = 917$ の流動においては、ギャップからロータ端部への粒子の拡散がより強く現れており、流れ場における揺動の影響が顕在化することが理解できる。したがって、図 25 の可視化画像で見られたギャップ領域の輝度の減少はギャップからロータ端部への粒子の拡散を表すと言える。

図 25 及び図 28 より、ギャップ領域の流動は筋状の流れが生じない間、ロータ端部との流動がほとんど起こらないが、流れ場に縞模様が生じる Re を超えると流れの出入りが活発化することが分かった。更に、縞模様に揺動が生じた Re_w を境にして輝度の減少スピードが急激に増しており、ある一定の Re を境にしてモータ内部の攪拌の程度が大きく上昇することが理解できる。本研究のモデルでは $Re_w = 500$ 程度である。このとき、ロータ回転数は 43 min^{-1} である。

$Re = 313$ で見られた時間に対して定常的な縞模様の流動は、流体を滞留させるような特性であることが示された。このことは、実機の EV モータ内部において冷却の目的等で積極的に流体の質量交換を期待する場合、低い Re では冷却が十分に行われえない条件であることを示唆している。図 25 より、モータ内部で攪拌を促進したい場合には、ギャップ領域で筋状の流れが

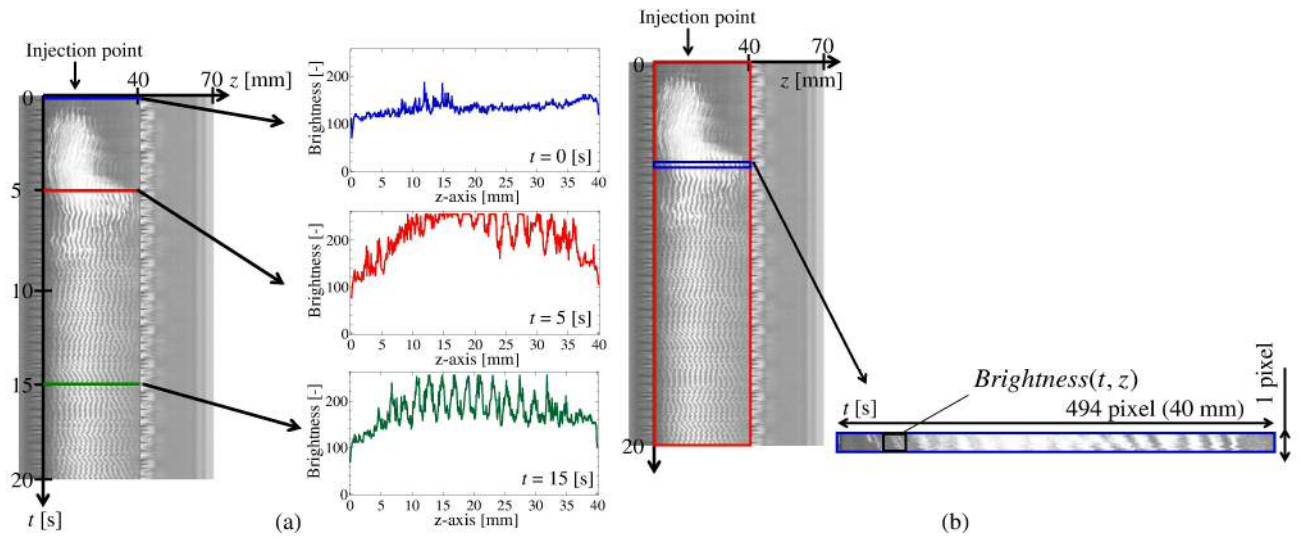


Fig 24: S pace-time diagram and brightness of rotor cylinder face of particles injection at $Re = 383$ (a) Integration of brightness value from $t=0$ to $t=20$ (b) Picking brightness up as a certain step

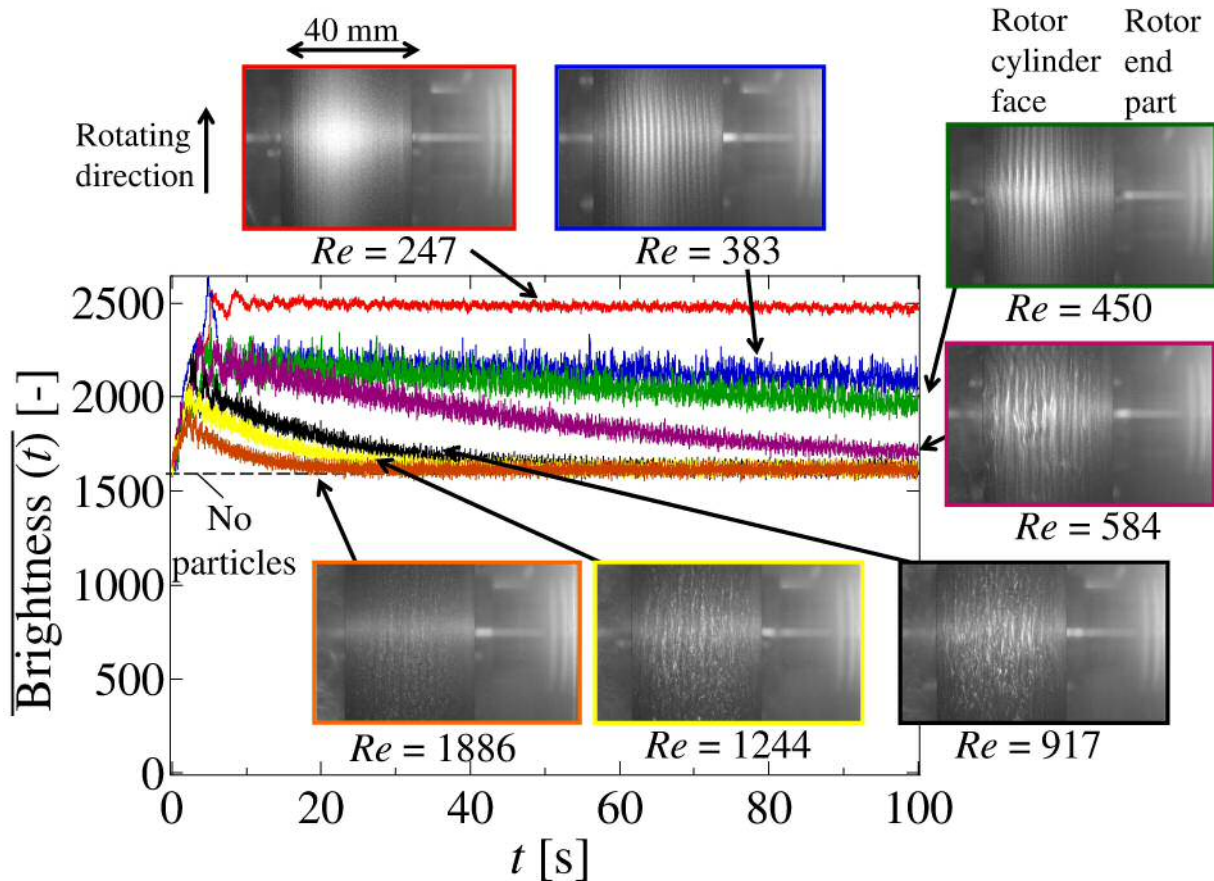


Fig 25: Transition of injected Kalliroscope flakes according to time

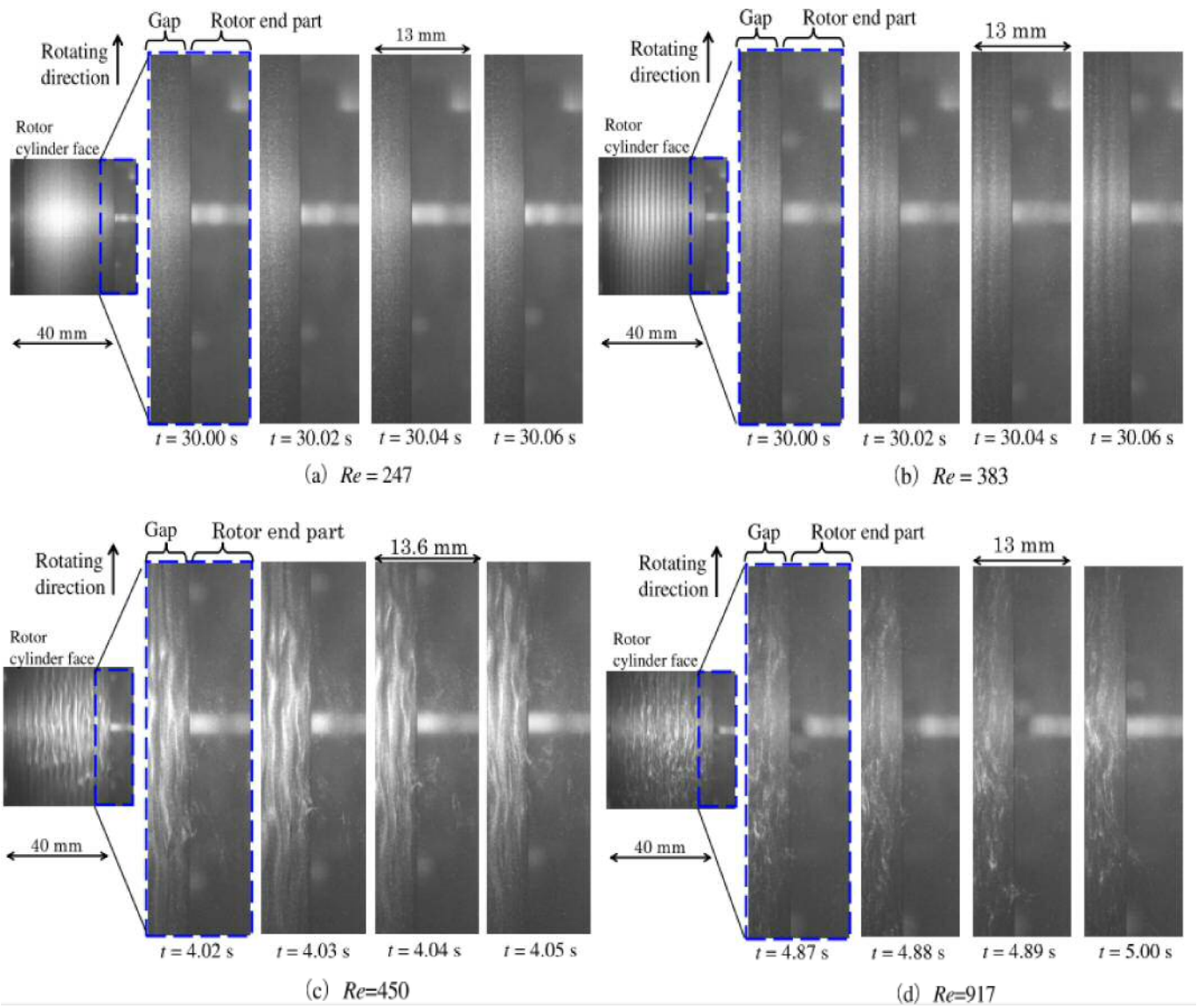


Fig 26: Flow structure at the boundary of the gap and rotor end part

揺動するときよりも Re を増大させる必要があり、式 (32 より

$$\omega = \frac{\nu Re_w}{r_i d} \quad (37)$$

以上に回転角速度 ω を上昇させなければならないことが分かる。実機等では式 (37) の ν を作動流体の動粘度に置き換えて ω を計算すれば良い。

2.3.2 終端部の流動構造

粒子が通過した軌跡を用いて、流体の詳細な運動を調べる。これには流跡線のプログラム処理により、撮影データから流跡線画像を作成することで行う。流跡線のプログラム処理を図9に示す。図9のように撮影した動画データを画像データに変換し、二値化する。二値化のしきい値は終端部に存在する粒子が明るくなるように設定して、二値化した画像データの輝度値を全て足し合わせることで流跡線画像を作成する。

終端部の流動構造を示したものが図10である。図10の (a) は $Re = 584$, (b) は $Re = 917$, (c) は $Re = 1886$ の流跡線画像である。ギャップとロータ端部の境界の流跡線に着目すると、(a) $Re = 584$ の終端部では、ロータ端部からギャップへと移動し、その後ギャップからロータ端部へと移動する流跡線が観測された。(b) $Re = 917$ では、ギャップとロータ端部の境界を軸方向に揺動しながら移動する流跡線が観測された。このときの流跡線はロータ端部とギャップを交互に移動している。(c) $Re = 1886$ になると、 $Re = 917$ と同様にギャップとロータ端部の境界を軸方向に揺動しながら移動する流跡線が存在し、その流跡線の経路はロータ端部とギャップを移動する回数が $Re = 917$ の場合よりも一往復多い。つまり、終端部の流動は Re 数の増加により、ギャップとロータ端部の境界を軸方向に揺動する回数が増加すると考えられる。

ここで、装置内の流動を比較する。図29に装置内の流動構造を示す。図29 (a) では左上に実験装置の概観図を示し、左下に扁平粒子を用いたロータ円筒部の可視化画像、右上に扁平粒子を用いたロータ端部の可視化画像、図の中央に終端部の可視化画像を示す。図29の (a) は $Re = 247$, (b) は $Re = 584$, (c) は $Re = 1886$ のときの流動構造である。図29 (a) $Re = 247$ において、ギャップに縞模様が観測されず、終端部の流動では軸方向に揺動する流跡線の移動は見られないが、ロータ端部には外周から軸方向に向かう一定の間隔で並ぶ螺旋状の筋模様が確認出来た。図29 (b) $Re = 584$ になると、ギャップに縞模様が発生し、終端部の流動では軸方向に揺動する流跡線が観測された。さらにロータ端部に確認できた筋の本数が増加している。 Re を増加させ図29 (c) $Re = 1886$ となると、ギャップの縞およびロータ端部の筋状の流動は複雑な流動となり、終端部でも軸方向に揺動する回数が増加して流れることが分かる。つまり、ギャップの縞およびロータ端部の筋状の流動が複雑になることと、終端部で見られた流跡線の揺動回数の増加は相関があると考えられる。

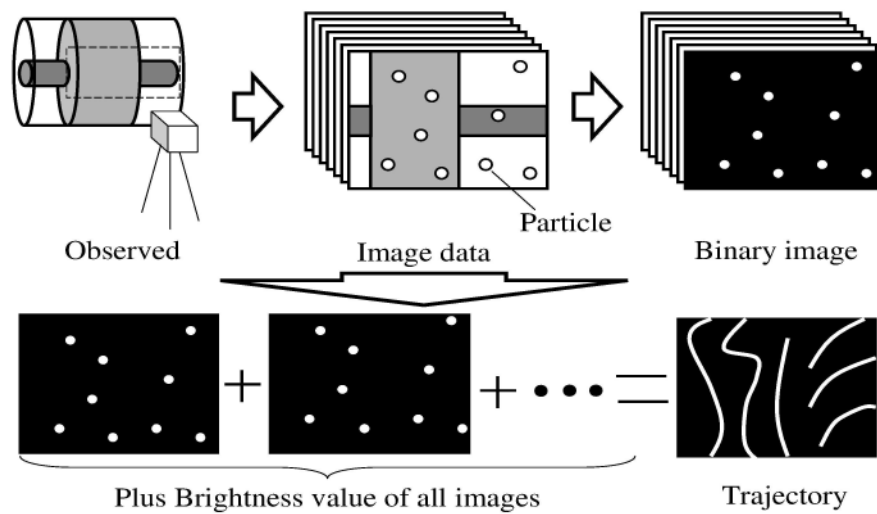


Fig 27: Image procession of trajectory

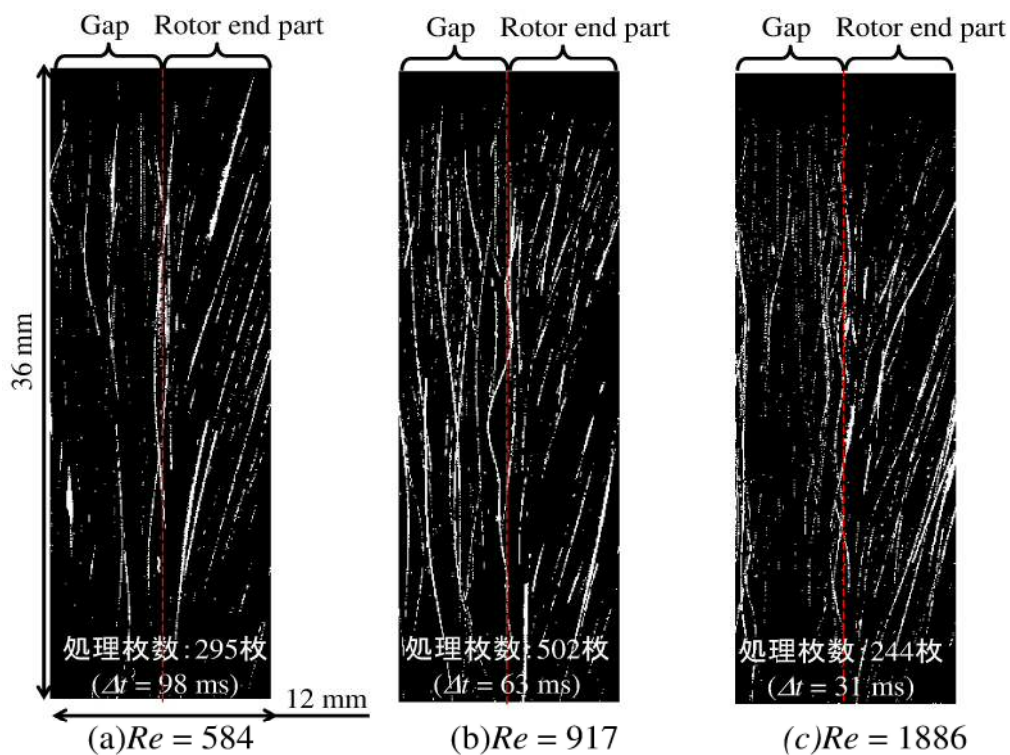


Fig 28: Trajectory of end of rotor

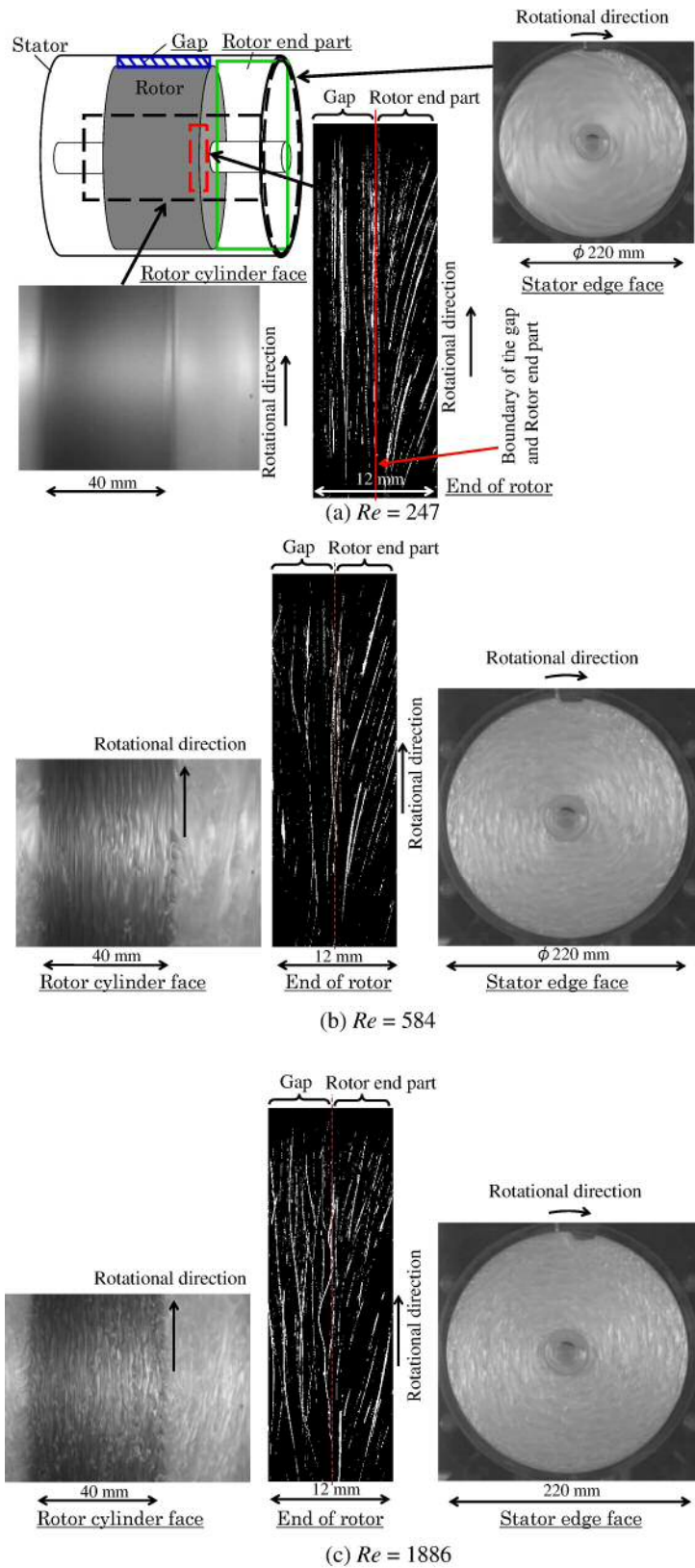


Fig 29: Fluid behaviour in various Re within apparatus

2.4 本章のまとめ

EV モータ構造を模擬するために、同心二重円筒において円筒間の隙間が従来より狭く、ロータ端部が広い領域を持つ条件において、内円筒を回転させた場合の流動特性を実験的に求めて、次の結論を得た。

ギャップ領域に関しては、流れ場中に粒子を注入して時空間図で追ってみたところ、筋状の流れ場が定常である場合にはロータ円筒部に注入粒子が留まり続けることが確認できた。 Re が大きくなり筋状の流れ場が不鮮明になった際にはロータ円筒部の輝度は時間とともに著しく減少して、最終的にロータ終端部を含めた全領域に拡散してしまうことが分かった。これはすなわち、ロータ終端部を含む EV モータ内部の流れ場は、ある特定の回転数に達しない間は、ロータ円筒部に流れ場が留まり続ける為、モータ内部での全体的な流動の往來が生じにくいことを意味している。更に、一連の流れ場は、筋状の流動に揺動の生じる $Re_w \doteq 500$ を境にして大きく異なることが分かった。したがって、本研究が対象とする実機を想定した場合、特定のロータ回転数の前後においてモータの流動特性が変化して伝熱特性に影響を与える可能性が考えられる。

一方、ロータ端部ではステータからロータ回転軸に向けて螺旋状の筋模様が確認され、このような流動は Re の上昇によって細かくなることが分かった。但し、ギャップ領域とロータ端部では流体の往來が少ない $Re \ll Re_w$ の場合、ギャップ領域からロータ端部への流動の影響が小さいため、テイラー渦との相関については明確ではない。更に、ギャップ領域では厚み d が 1 mm であったのに対して、ロータ端部では領域の厚みが約 20mm でありスケールが異なることから Re の評価が両者で異なると考えられる。したがって、 Re の評価を個別に行う場合、ロータ端部で縞模様が生じる Re と、ギャップ領域で TVF が生じる Re と比較することは、現状ではインバータの周波数をこれ以上に下げられないため困難である。以上のようなギャップ領域とロータ端部の関係については、実験では測定困難な局所的な速度場ベクトルや圧力などについて調べる必要があるため、次章から数値解析を導入して詳細な議論を行う。

3 流動解析

第2章では、モータモデルを用いたギャップ領域、及び、ロータ端部それぞれの流れ場の観測と、終端部における流れの出入りについて説明した。しかしながら、速度場の強さや圧力についてなど不明な点が未だ多い。本章では、これらの流れ場の数値解析を行い、実験との整合性と、実験では得られなかった物理量を含めて流れ場の検証を行う。数値解析を行う際、主にギャップ領域とロータ端部領域の2通りについて調べることにする。初めに流動場について示した後、モータでの熱流動構造について調べる為、ギャップ領域の熱流動解析について定量的な評価を行う。

3.1 ギャップ領域

3.1.1 基礎方程式と境界条件

以下の円柱座標の Navier-Stokes 方程式（以下 NS 方程式、Appendix B.2.1 参照）を基礎方程式として用いる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{v_\theta^2}{r}, \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) - \frac{v_\theta v_r}{r}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 v_z.\end{aligned}\quad (38)$$

式 (38) において、 v_r , v_θ , v_z はそれぞれ速度場の径方向、角度方向、軸方向の成分を表す。また、 $\nu = \mu/\rho$ は流体の動粘性係数、 p は圧力場、 t は時間を表す。実際の数値解析では式 (38) を空間、時間成分とも離散的に扱う。空間に関しては速度場や圧力などの物理量がメッシュ状の同一の点で定義されるコロケート格子を用いており、有限差分法によって時間積分を求める。時間積分に関しては、対流項に2次精度 Adams-Bashforth 法を用いて、圧力の Poisson 方程式は SMAC (Simplified Marker and Cell) 法を使用して解いた。式 (38) の対流項の基本的な計算スキームとしては3次精度の風上差分法に基づく。また、拡散項については完全陰解法を用いることで解の安定的な時間発展を実現した。尚、方程式の解法として特別な乱流モデルは用いておらず、非定常的な挙動を許すことにする。これにより式 (38) の時間積分には多くのメッシュ数と多大な時間コストが要求されることになるが、より現実に近い時間発展を実現でき、詳細な物理量の挙動を得られるといった利点がある。

計算用メッシュは $N_r \times N_\theta \times N_z = 30 \times 300 \times 300$ の構造格子を用いている。計算領域の境界条件としては、主流に対して垂直な境界に周期的境界条件 (PBC) を適用し、主流に対して平行な境界 S_z に slip 条件、及び、出入り条件の2種類を試した。ここで、 S_z の法線ベクトルを \vec{n} とし、slip 条件では $\vec{v}|_{S_z} = 0$ 、出入り条件では Neumann 条件 $\partial v_i / \partial n_i = 0$, $\nabla \cdot \vec{p} = 0$ が課されるものとする。

モータでは、ギャップ厚み d は加工精度や熱膨張などを考慮してできるだけ小さく取るため、ロータ半径 r_i よりも十分に小さいという特徴を有している。表記の便宜上、以下では $0 < \theta < \Delta\theta$ として、ギャップ領域の $\Delta\theta \ll 1$ となる一部を切り出し、図 30 に示すようにロータ端部との境界面を S_z と定義する。また、ロータの回転角速度 ω は、式 (32) に基づき、 $Re = 500$, $Re = 1000$,

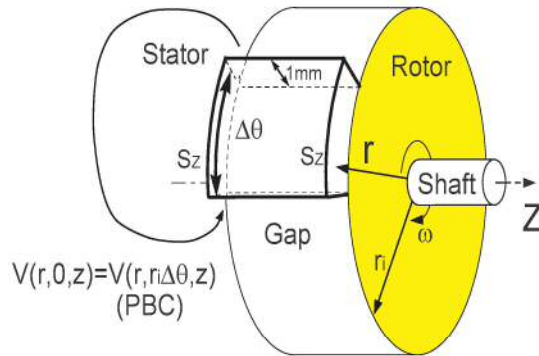


Fig 30: Region of simulation for gap
Area for simulation of gap region focused on limited volume.

$Re = 1500$ を実現する値を選択する。すなわち、これらの Re を用いてギャップ領域の底面の速度 $v(r = r_i)$ は $v(r = r_i) = Re * \nu / d$ と書けるので $r_i \omega = Re * \nu / d$ より、 $\omega = Re * \nu / (r_i d)$ となる。

3.1.2 ギャップ領域の解析結果

ロータの回転は $v_\theta(y = 0) = r_i \omega$ とおいて表し、いくつかの Re における解析を行った。図 30 において注目する計算領域について、初めに $Re = 500$ として S_z での境界条件を出入り条件とした結果を図 31 と図 32 に示す。但し、表示領域は見易さのため $dr \times d\theta \times dz = 1\text{mm} \times 10\text{mm} \times 10\text{mm}$ に拡大して示した。

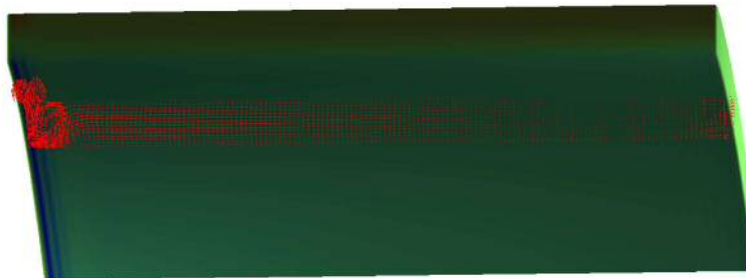


Fig 31: Onset of simulation for gap region at $Re = 500$.

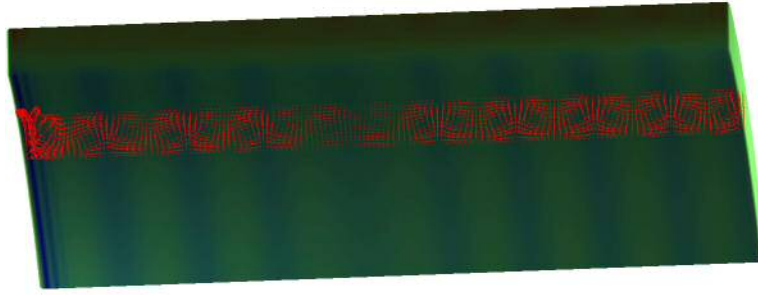


Fig 32: Final result of simulation for gap region at $Re = 500$.

図 31, 図 32 では, 圧力の相対的な大きさを青色から赤色にかけて大きくなるように色分けして示してあり, 速度場は赤い矢印で示した. 図 31 では, 計算開始直後のスナップショットで, 左側に最初の渦が生成されていることが分かる. 他方, 右側の中央付近からも多少の渦が生成されていることに注意されたい. 最終的には図 32 のようになり, 渦が規則的に並んだ状態が得られている.

幾つかの Re について流れ場を調べた結果を図 33 に示す.

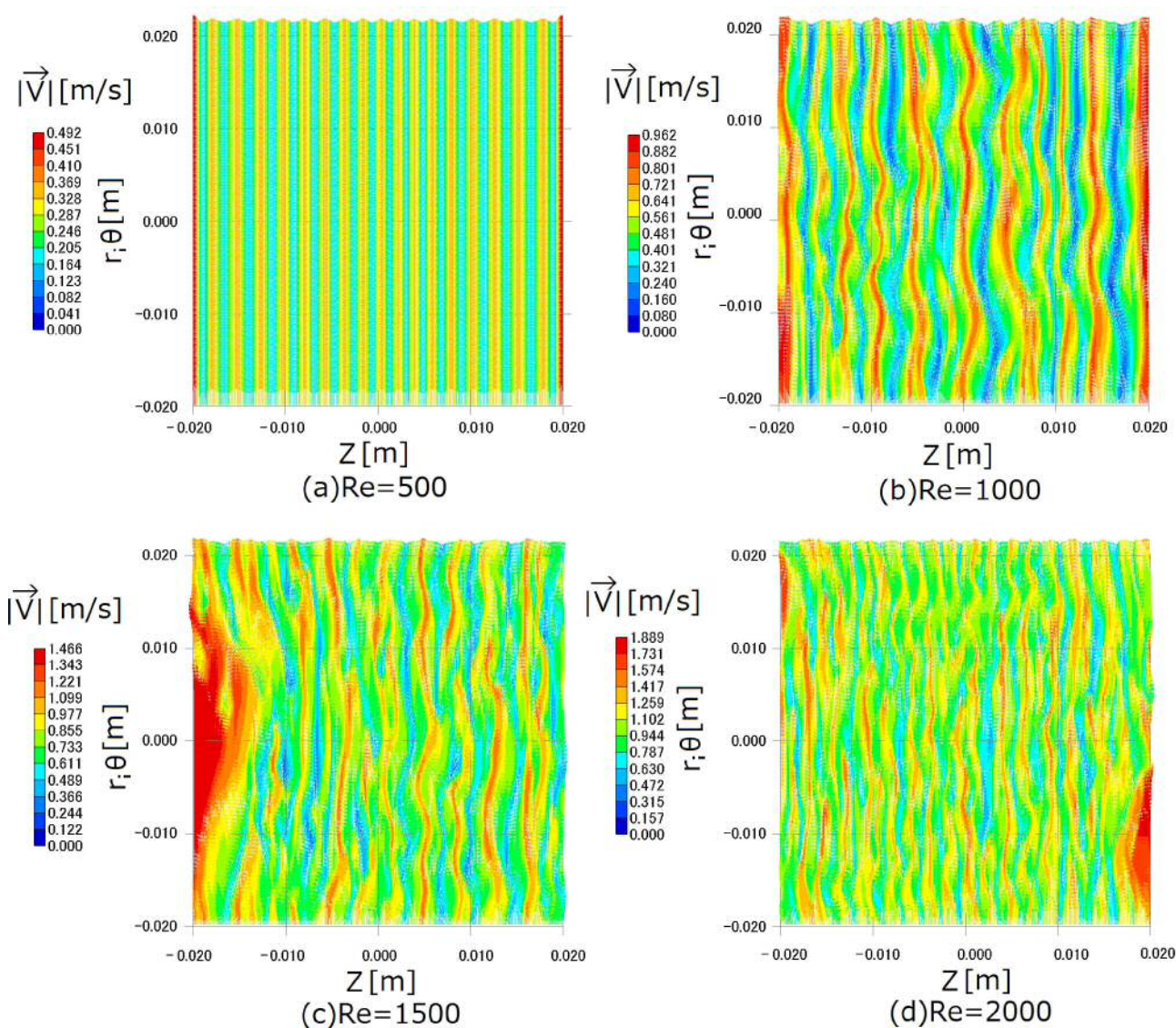


Fig 33: Result of velocity distribution according to Re in order.

但し、ロータの回転は $vx(y=0) = r_i\omega$ とおいて表し、 $Re = 500, 1000, 1500, 2000$ における解析を行った。図 33 では $r = r_i + d/2$ での速度場ベクトルに色づけをして流れ場を表している。図 33 より、 $Re=500$ のときには整然とした筋状の流れ場が生じているのに対して、 Re が上昇するに従って、 z 軸方向における流れ場の変動の間隔は小さくなっていることが分かる。すなわち、流れ場の状態が Re の上昇に伴って著しく変動していることが示されている。

次に、図 30 右側に示す計算領域について、初めに $Re = 500$ として S_z での境界条件を slip 条件とした結果を図 34 と図 35 に示す。但し、表示領域は $dr \times d\theta \times dz = 1\text{mm} \times 40\text{mm} \times 40\text{mm}$ として拡大して示した。図 34 では計算領域を $40 \times 1 \times 40$ (単位: mm) にとり、ロータ円筒面での圧力場に色付けをして示した。また、図 35 では図 34 と同様の領域でロータ回転から約 0.1 秒

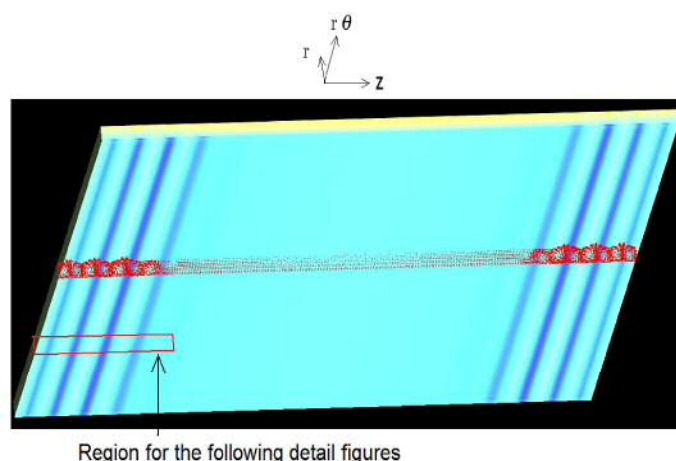
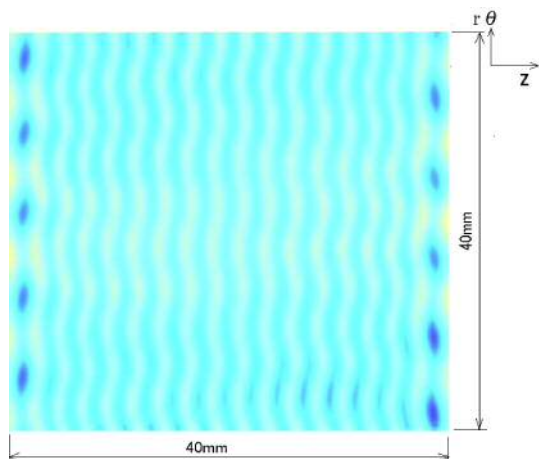
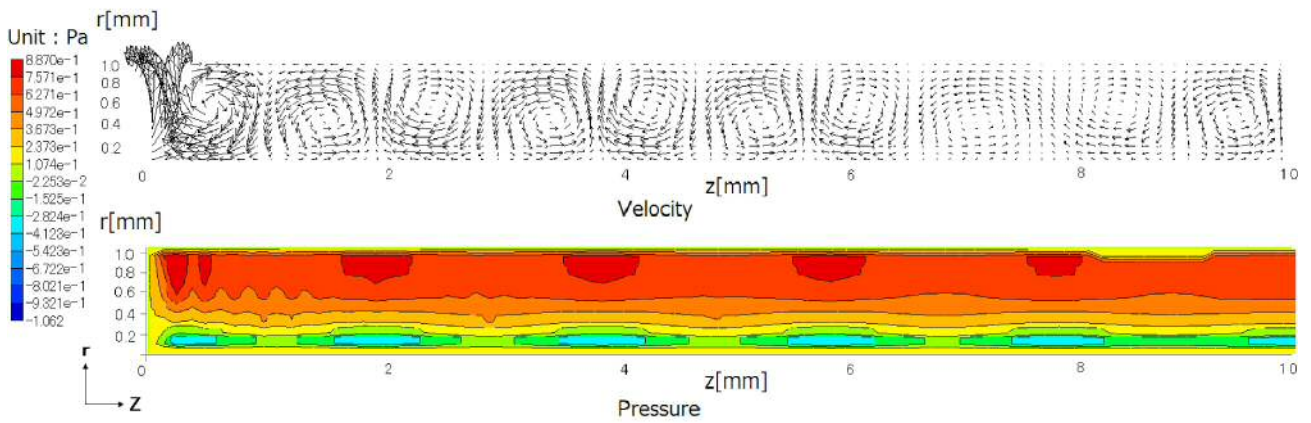


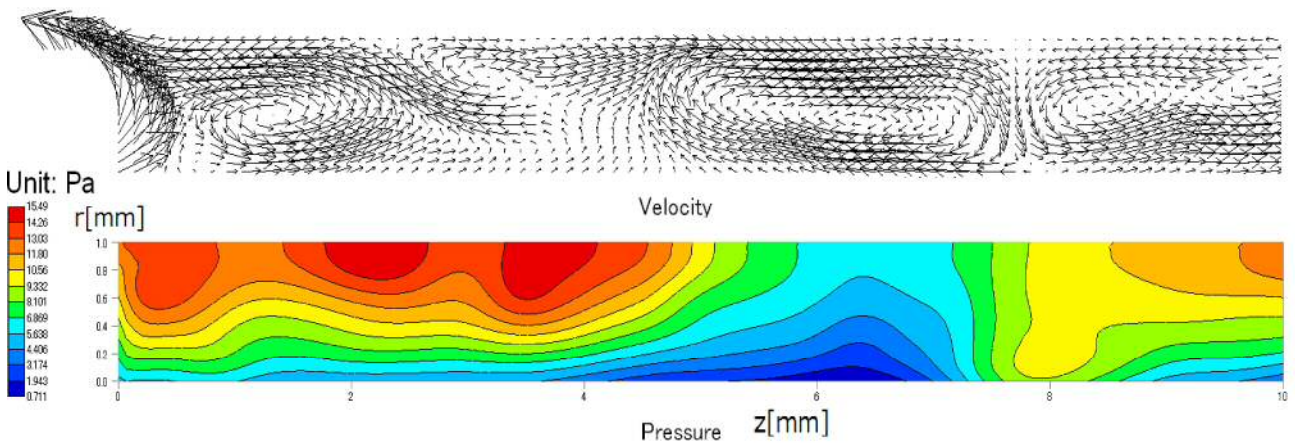
Fig 34: Pressure distribution at rotor surface $y = 0$. Fig 35: Three dimensional velocity and pressure distribution.

後の流れ場を赤色で速度場ベクトルを用いて圧力コンタと併に示した. 図 35 から, θ 方向を向いた渦が境界 S_z 面から徐々に生成されていくことが分かる. 流れが安定すると図 34 のような状態となり, 揺動した筋状の渦が一定の間隔で整列している状態となる. 流れ場を詳しく調べるため, 図 36, 図 37 に, S_z での境界条件をそれぞれ出入り条件, slip 条件として, 図 35 のようにギャップ領域の赤枠で示した断面について, $R-Z$ 断面における端から 1×10 の領域を抜き出して流れ場を示した. 但し, 各 Re について上段と下段に分けて流れ場を示してあり, それぞれ速度場ベクトルと圧力コンタを表す. 比較的流れが安定な $Re=500$ に関して言えば, ギャップ領域のサイド S_z が出入り条件, slip 条件の場合共に, 一つの渦のサイズは d の幅を持つと言える. 図 36 及び図 37 より, 更に大きな Re の場合では, S_z が出入り条件の場合には全体的に流れの乱れが大きくなり, 個々の渦のサイズも不揃いとなっている. 図 36 から分かるように, S_z が出入り条件の場合, ギャップ領域とロータ端部の境界 S_z の近くに注目すると, 流速が大きい程 S_z を介して流れの出入りが大きくなることが分かる. 但し, Re が上がるに従ってこのような出入りはより強く現れるが, いずれの Re においても, 一旦, ロータ端部からギャップに進入した流れは再びもとの領域に押し戻されていることは注意すべきである. これが図 45 の流れ場を再現しているとすれば, 実モデルでのギャップ領域とロータ端部において, 流体の交換はごく一部分に限られていると考えられる. 次に, 図 36 及び図 37 の圧力に注目すると, p はロータに近い図の下側が小さく, ロータから離れるにしたがって大きくなることが分かる. したがって, ギャップ領域での圧力は, 流速と負の相関の傾向があると言える. また, 等圧線図から, 圧力の低い部分を中心に渦状の流れがあることが分かる. 一方で圧力の大きな部分では, 渦同士の境目に相当するような, 流れが壁に向かう場所であることが確認できる.

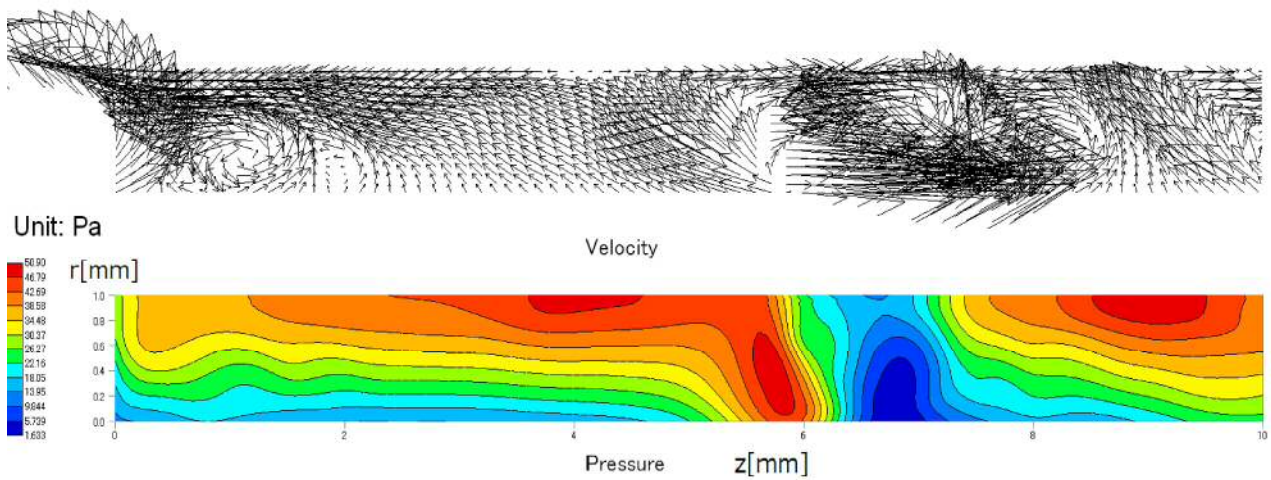
ここで, テイラー渦が生じる際の物理量の変化について考察する. ギャップ領域における局所的な流体素辺に注目すると, NS 方程式の右辺第 1 項より圧力勾配 $\partial p / \partial r$ による成分と, ロータの回転に起因する遠心力 f_c との差分が流体素辺に作用する径方向の力となる. このような力



(a) $Re=500$



(b) $Re=1000$



(c) $Re=1500$

Fig 36: Velocity and pressure distribution at cross-section area in Fig 34 with in-out BC at surface S_z .

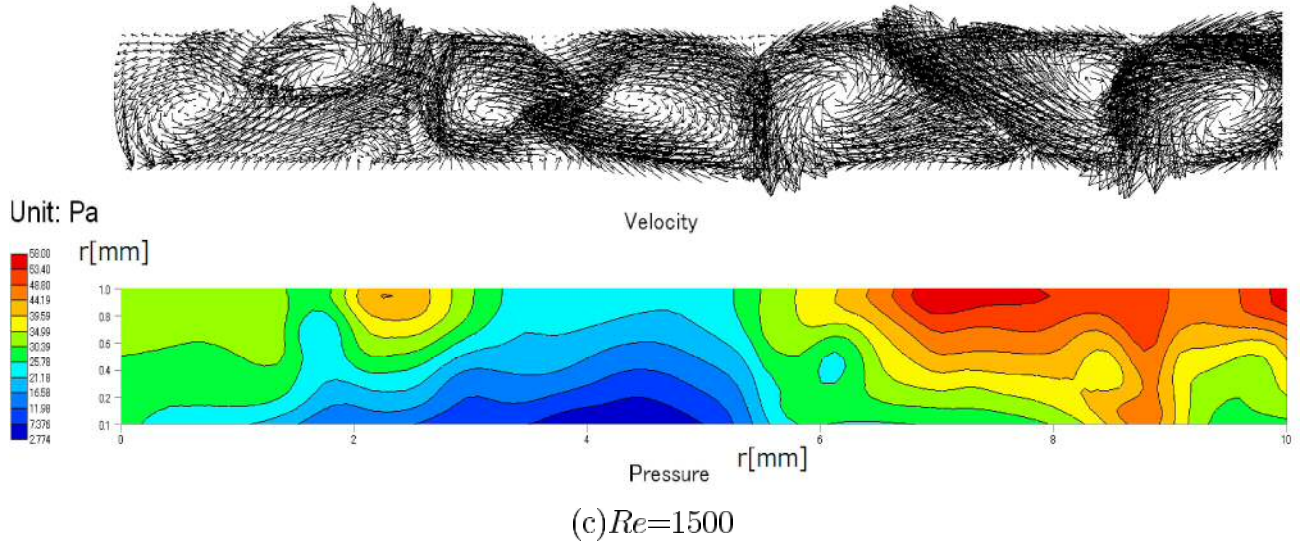
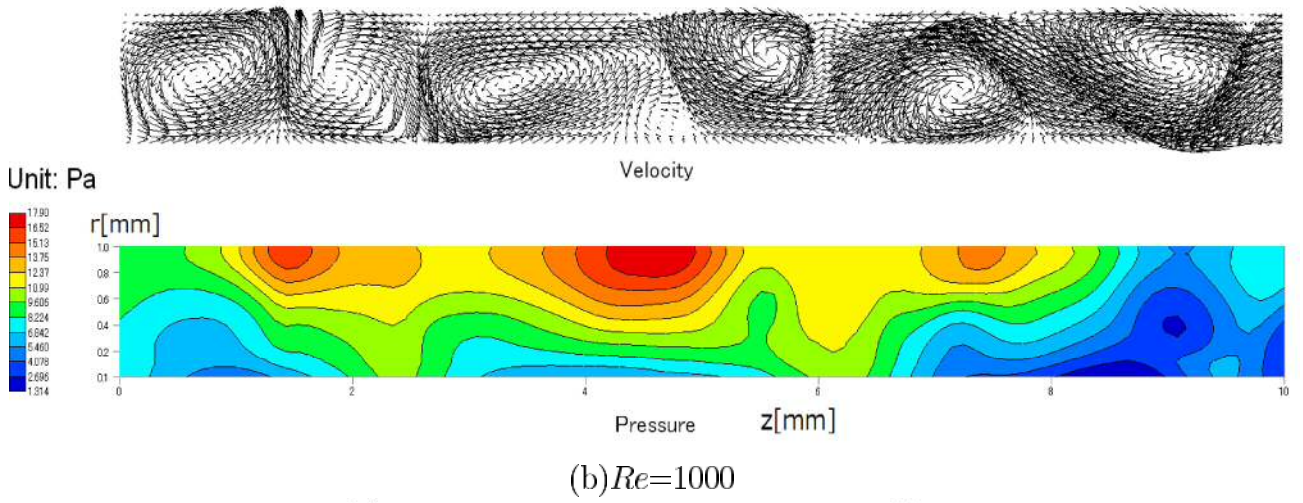
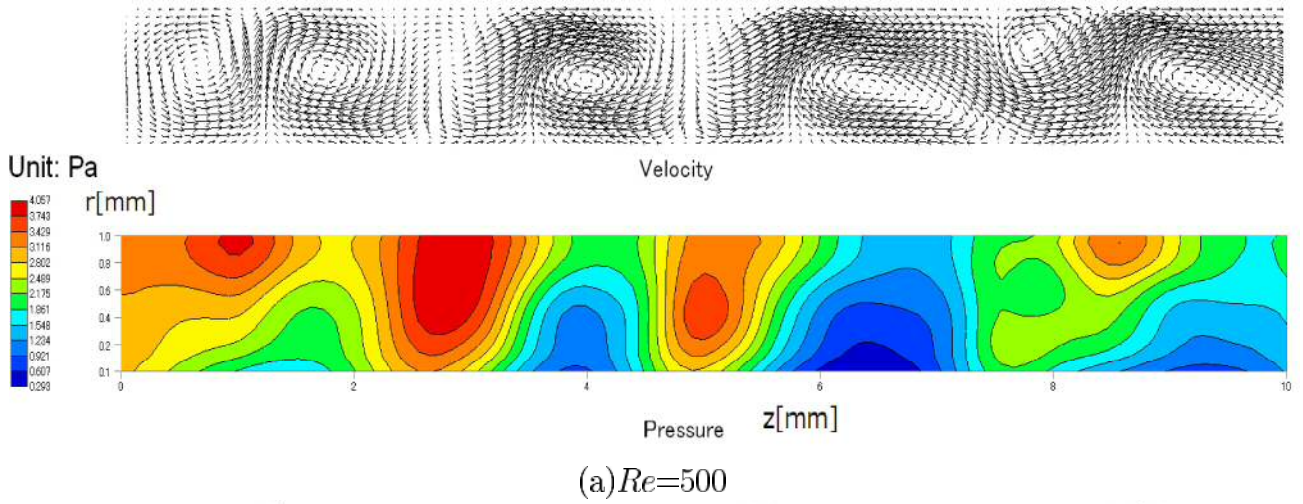


Fig 37: Velocity and pressure distribution at cross-section area in Fig 34 with wall BC at surface S_z .

に注目すると、式 (38) より、 Re が十分大きく粘性が無視できるとき、

$$\rho \frac{Dv_r}{Dt} = f_c - \frac{\partial p}{\partial r} \quad (39)$$

と書くことができる。但し、 D/Dt , f_c はそれぞれ Lagrange 微分、遠心力を表し、

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} &= v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z}, \\ f_c &= \rho \frac{v_\theta^2}{r} \end{aligned} \quad (40)$$

と表せる。

流れ場の構造が定常的となっている $Re=500, 1000, 1500, 2000$ の場合で、ギャップ領域のステータ側に近い部分、中間部分、ロータに近い部分の3箇所について f_c 、及び、 $\partial p/\partial r$ を調べたところ、図 38 に示す結果を得た。図 38 では、上から速度ベクトル、式 (40) の各成分の値を図示してある。ギャップ領域の径方向の中間付近では図 36 に示されている通り、速度場が壁に向かう領域では p が大きくなり、速度場が壁から遠ざかる領域では p が小さくなっている。この際に遠心力 f に注目すると、図 38 について、速度場が p の微分にかなり追従しており、両者が釣り合うことで周期的に変化する v_r が安定して実現する。したがって、テイラー渦の発生時にはギャップ領域の中間付近において、 p の径方向微分と遠心力とのバランスが保たれており、流体粒子はほぼ等速直線運動を行っていることが示されている。同様にして、ロータに近い部分では、 f_c と $\partial p/\partial r$ が共にほぼ 0 に等しく、 v_r がほとんど変化していないことが分かる。これから、ロータ側からステータ側に向けて移動した流れ場はステータ表面に到達したところで径方向の加速が低下し、粘着条件により穏やかに移動していると言える。一方、ロータに近い側に注目すると、 $\partial p/\partial r$ は小さいものの、 f_c は突出して大きくなっており、 f_c が有限となることが分かる。ステータ側からロータ近傍に到達した f_c による減速、または、加速を行った流体は、テイラー渦に起因する移流に乗り Z 軸方向に移動した後、ステータ近傍よりも高速で径方向の向きを変えて、再度反対側に戻るといった動きを繰り返すことになる。

次に、図 36～図 37 では、ある特定の断面上の流れ場を見たが、流れ場の様子を全体的に捉える方法として等渦度面の可視化結果を図 39 に示す。等渦度面の閾値は $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ として、視覚化に適した $|\vec{\omega}|=1200$ を用いた。但し、上図と下図はそれぞれ Y 軸、Z 軸に平行な視線の図を表す。図 36、図 37 との比較から、おおよそ渦の個数と等渦度面の閉じた領域の個数が一致しており、特に、渦同士の間大きな渦度が生じていることが確認できる。

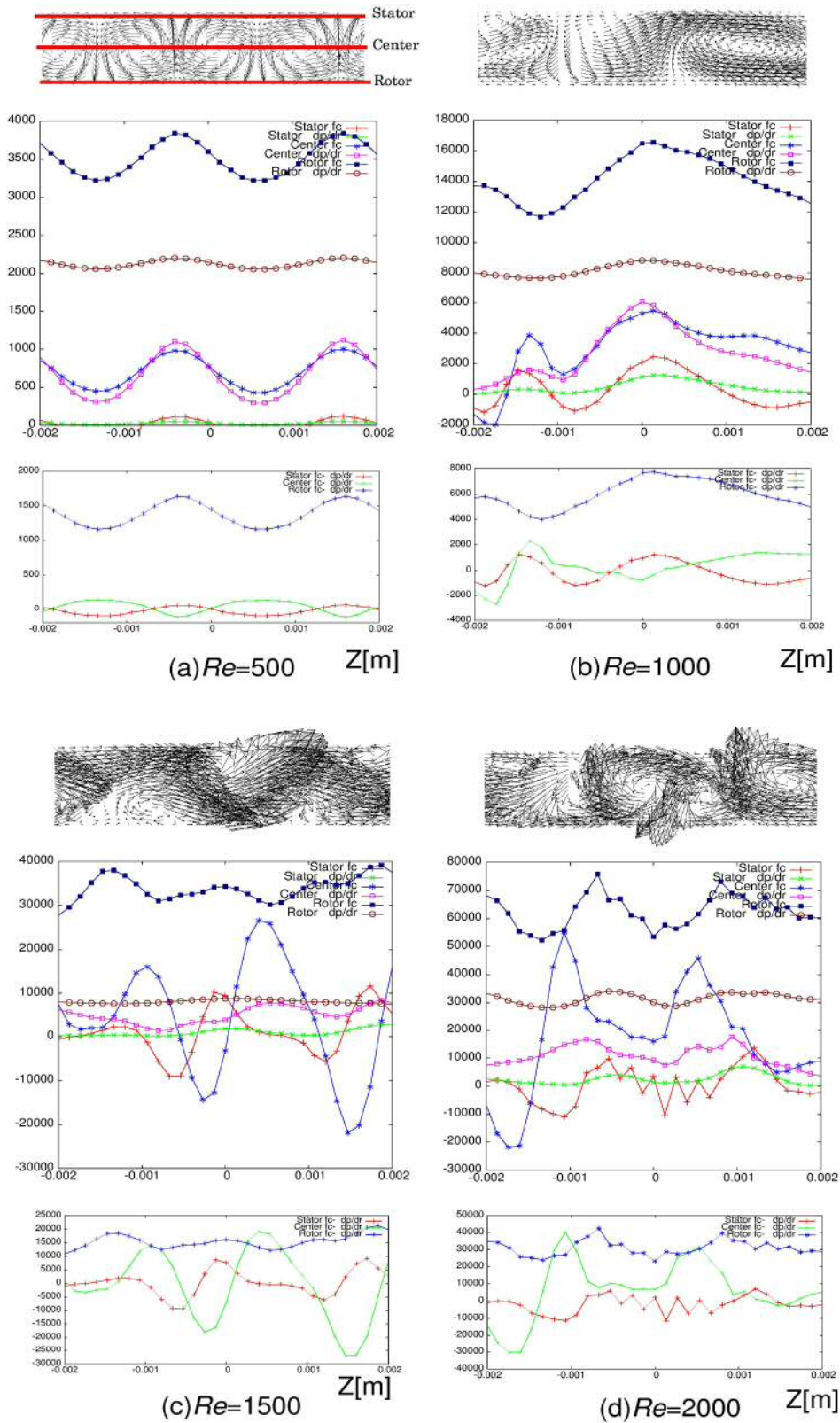
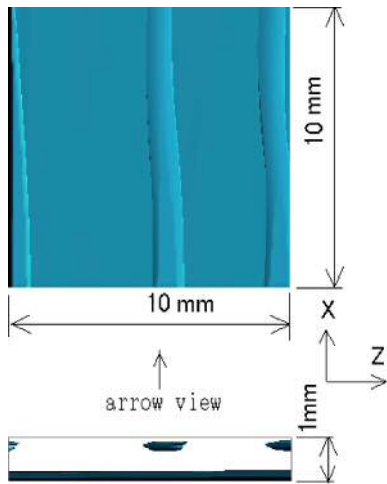
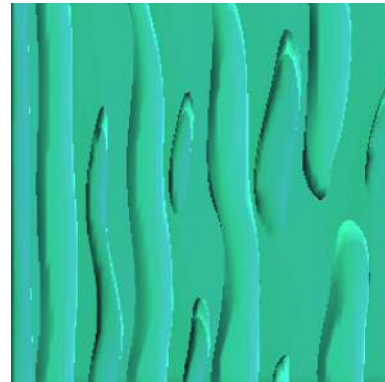


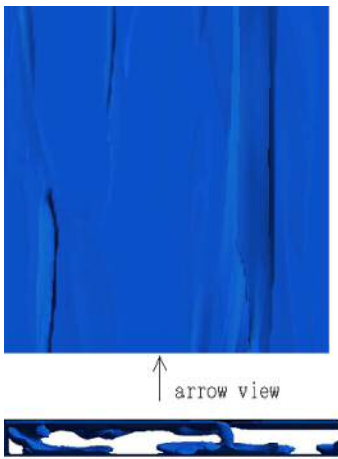
Fig 38: Derivative of pressure with radius and centrifugal force at midst of stator and rotor.



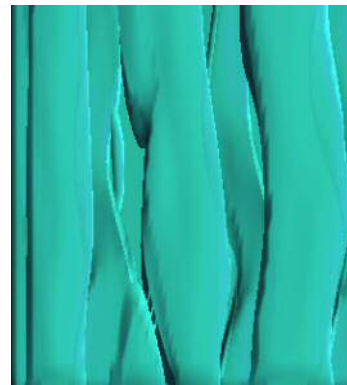
(a) $Re=500$



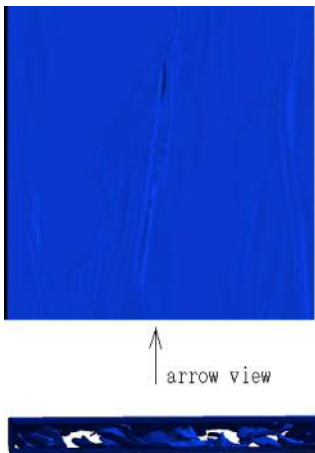
(a) $Re=500$



(b) $Re=1000$



(b) $Re=1000$



(c) $Re=1500$



(c) $Re=1500$

Fig 40: Projection of vorticity structure calculated with wall BC onto stator (above) and onto orthogonal plane(below).

Fig 39: Projection of vorticity structure calculated with in-out BC onto stator (above) and onto orthogonal plane(below).

3.2 ロータ端部

3.2.1 基礎方程式と境界条件

ロータ端部の流れ場は、式 (38) ではなく、直交座標における NS 方程式 (A.87) を用いて解いた。式 (38) を使わない理由は、格子に円柱座標を用いた場合、径方向において解像度の著しい変動が起こり信頼性に課題が生じるからである。物体と流体の境界の扱いについては、直交格子を用いて境界を精度良く取り込む方法を用いた [20]。境界条件はロータ端部の領域全てを壁面条件として、円柱領域の一方の底面を角速度 ω で回転させる計算を行う。また、 Re の見積もりには径のサイズや軸長を採用するなど幾つかの方法が考えられるが、統一的に扱う目的でギャップ領域のパラメータによる式 (32) から Re を決めた。

3.2.2 解析結果

ロータ端面から 20mm 程度離れた部分における断面の速度場を表すと図 41 に示すような状態となり、ロータの外周側から軸方向に向かう筋状の流れ場が観察できる。実測と比較すると、同様の Re におけるキャリオスコープ粒子を用いた実験では、図 42 のようになっており、筋模様の向きについてはおおよそ一致している。但し、実験とは次の 2 点が相違点として挙げられる。一つ目は、図 42 の筋模様は図 41 に見られるものよりも細かくなっている点である。実験では z 方向に沿った奥行き情報が含まれているのに対して、数値解析では特定の面上の流れ場しか見ていないことなどが要因の可能性はある。二つ目は、図 43 の右側におけるシャフト付近では渦のような特別な流れ構造が見られないにも関わらず、図 42 に示すように、実験では中央近傍まで筋状の流れ場が見えている。これは、キャリオスコープ粒子の特性上、せん断する流れ場と平行な向きに粒子の向きが揃う傾向があるが、一旦何らかの模様が生じた後、ステータ近傍からシャフトに向かって径方向での平行移動があった場合、粒子は傾きを維持したまま流れ場に乗り移動していることも考えられるため、一概にシャフト近傍で筋模様を生じるような流れ場があるとは言い切れない。以上より、図 41 と図 42 の対応について明確にするには、流速についてのより詳細な情報を観測で得るなどする必要がある。

図 41 の結果をより詳細に調べると、図 43 に示すように、ロータ表面に近い部分ではロータの外側に広がるような流れが生じており、ステータまで届いた所でヘリカル状の渦①を伴い、派生したサブスケールの渦②が生成されていることが確認できる。更に、①の生成した流れは軸方向に向かっており、再度ロータに戻るような循環を生じていることが分かる。

このように、図 42 のロータの角に近い部分に主流となる渦が常に生成され続け、ロータ端部は乱流、もしくは乱流に近い状態が維持されることが分かる。一方、軸に近い部分では軸を取り囲むように渦が出来ており、ギャップ部分で生じたテイラーケット流れと同様な流れ場が生じている。これから、図 22 における螺旋状の筋模様はギャップ領域の場合と同様、渦状の流れ場がロータ外周から軸に向かって伸びていると考えられ、ロータ端部の流体の攪拌に寄与していることが分かる。以上のようなヘリカル状の流れ場は物体表面に沿って通り過ぎるため、途中に温度勾配があった場合は熱交換が促進されると期待できる。一方で、渦を生成するだけのエネルギーが余計に費やされることにもなるため、基本的な渦の生成原理について把握するこ

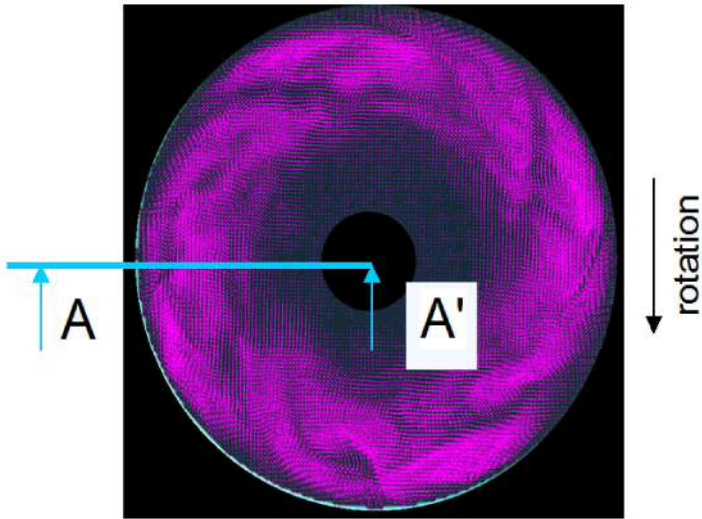


Fig 41: Velocity profile at rotor end part at $Re=500$ resulted from simulation.

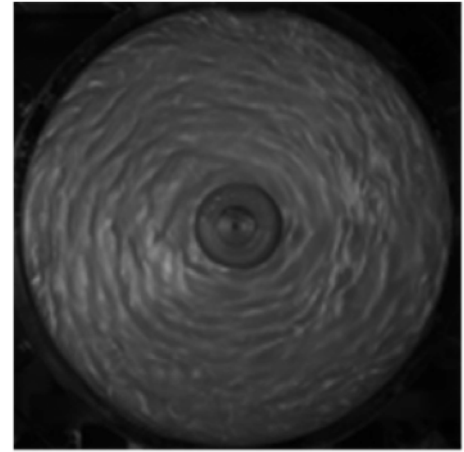


Fig 42: An image of flow pattern at $Re=546$ taken from experiment.

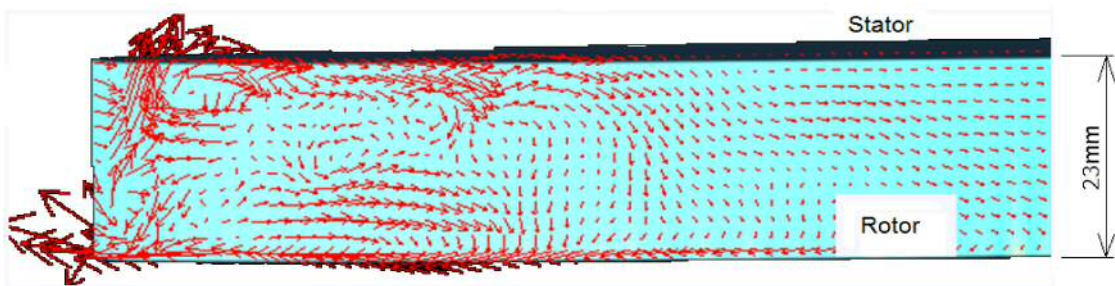


Fig 43: Velocity vector at section A-A' of figure 41

とは重要である．以下に図 42 の流れ場の詳細な考察を行う．流れ場成分は $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ と書き， Re が十分大きく粘性を無視できる場合は Euler 方程式（式 (A.31) 参照）で記述できるため，Lagrange 形式（Appendix B.1.2 参照）を用いて以下のように表せる．

$$\begin{aligned}\frac{Dv_x}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega v_y \\ \frac{Dv_y}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega v_x \\ \frac{Dv_z}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned}\tag{41}$$

但し，式 (41) の第 1 行及び第 2 行の右辺第 2 項はコリオリ力を表し， D/Dt は全微分で

$$\frac{D}{Dt} = \frac{d}{dt} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\tag{42}$$

と書かれる．ここで，流れ場は回転軸の周りで対称であり XY 面上での圧力勾配が 0 と仮定すれば，式 (41) の第 1 行及び第 2 行の右辺第 1 項を 0 とみなすことができ，多少の式変形より

$$\frac{D^2 v_i}{Dt^2} + 4\omega^2 v_i = 0 \quad (i = x, y)\tag{43}$$

が得られる．(43) 式の有限な解は

$$\begin{aligned}v_x &= v \sin 2\omega t \\ v_y &= v \cos 2\omega t\end{aligned}\tag{44}$$

と書ける．更に，式 (44) を積分して位置を求めると

$$\begin{aligned}P_x &= \int dt v \sin 2\omega t \\ &= -\frac{v}{2\omega t} \cos 2\omega t \\ P_y &= \int dt v \cos 2\omega t \\ &= \frac{v}{2\omega t} \sin 2\omega t\end{aligned}\tag{45}$$

と表せるため，ロータ端部中の流体粒子は ω に反比例した軌跡を描くことになる．

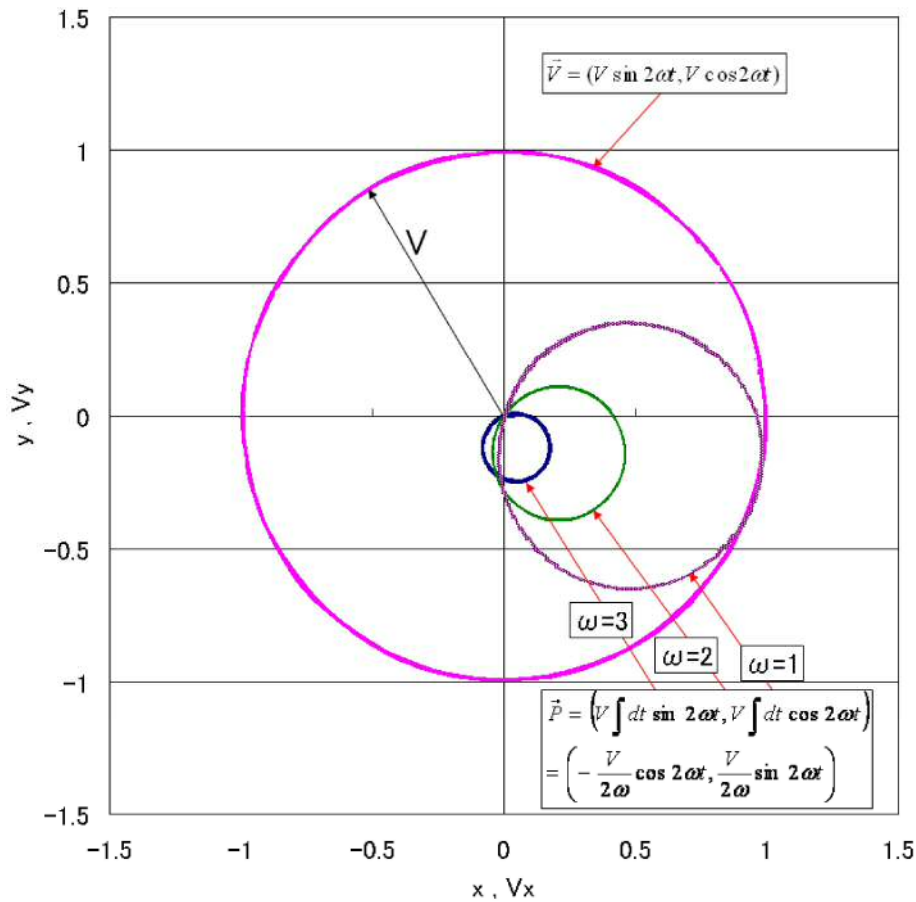


Fig 44: Trajectory of Ekman Vortex. When \vec{v} is generated, trajectory of particle is drawn tracing to circle of which diameter is proportional to $1/\omega$.

図 44 に、式 (44) で $v = 1$ とした場合の \vec{v} と、 \vec{v} によって得られる流体粒子の軌跡を描いた。 \vec{v} は ω の値によらず一定であるのに対して、 \vec{v} を積分して得られる位置は ω に反比例して小さくなる事が分かる。したがって、図 43 の筋状の流れがこのような過程で生じる渦だとすると、 Re が高くなるにしたがって筋の幅が小さくなることは式 (45) の ω が大きくなることで粒子の回転半径が縮小している現われであると言える。ここで、式 (45) は Lagrange 形式で導出されていることを思い出すと、実際のロータ端部の流れ場では、式 (45) に従い回転する流体に遠心力に起因する径方向の流れと回転方向のせん断流れが生じているため、これらの移流に乗った渦がヘリカル状の流れ場として実現すると考えられる。式 (45) で表される渦は地球物理学などの分野でエクマン渦 (Ekman vortex) と呼ばれており、海洋の流れ場が北半球と南半球で異なることの説明としてしばしば用いられている。

3.3 ギャップ及びロータ端部を含めた流れ場の解析

ロータ端部とギャップ領域の複合領域が実際にどのような流れ場になるかは、キャリオスコープ粒子による実験からある程度の推測ができる。

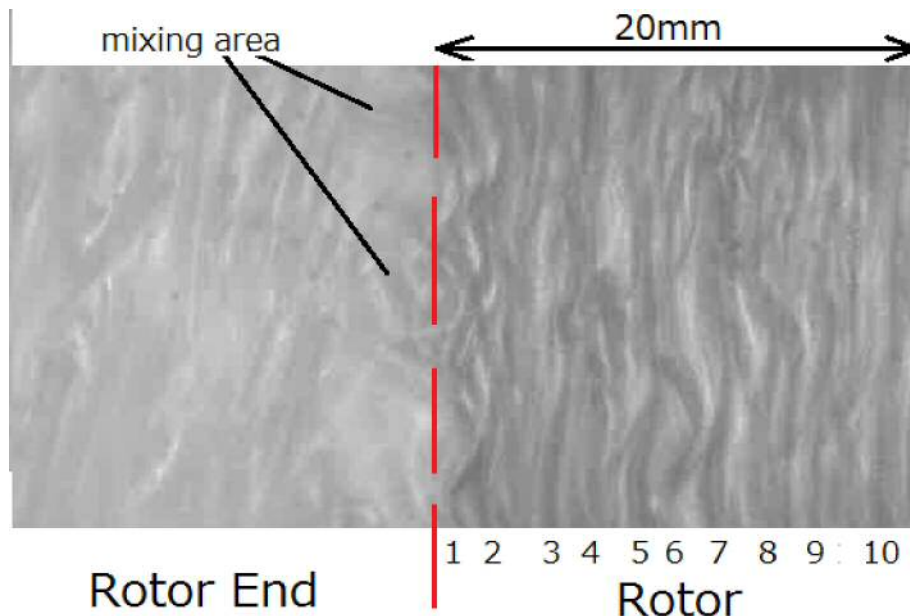


Fig 45: An image of constructed area captured by Kallioscope flake.

図 45 では、 $Re = 1000$ における軸方向の中間を境としてギャップ領域とロータ端部の流れ場を可視化した写真を示してある。図 45 において、赤色の点線がロータ端部とギャップ領域の境界を示してあり、下側の数字が筋状の流れ場の数を表している。ここでは、ギャップ領域で縦方向に伸びた筋はおおよそ 10 個程度あり、揺動している様子が理解できる。また、赤色の点線を境として、ギャップ領域とロータ端部を横切るような模様が確認できる。これはギャップ領域とロータ端部で流れ場の出入りがあると考えられる箇所であり、揺動が大きい場所ほどこのような筋の広がりが多いのは、テイラー渦が及ぼすギャップ領域とロータ端部間での質量交換の表れと推測ができる。したがって数値解析を行うにあたり、ギャップ領域とロータ端部両領域の相互作用が小さな場合には一定の精度が保たれるが、 Re が大きくなった場合では図 45 から分かるように両領域を介した質量輸送が生じてくるため、何らかの対処を要する。特に、ギャップ内の流れ場が乱流に遷移した後では、レイノルズ応力の増大などから主流と垂直方向への質量輸送が活発に行われる可能性がある。本章では終端部に注目して、全領域とはいかないながら、ギャップとロータ端部の両方を含む領域を切り抜いたモデルを用いて数値解析することを試みた。図 46 に系全体から見た計算領域、図 47 に計算領域を抜き出した形状を示した。図 47 の奥行き中心方向で段違いになっているのはこの部分がロータ形状を表しているためである。また、計算上、へこんでいる面の部分が角速度 ω で回転していると仮定して一定の速度場が与えられる。更に、図 47 中の断面 S は、流れ場の可視化を行う際に速度場を得る仮想的な面を

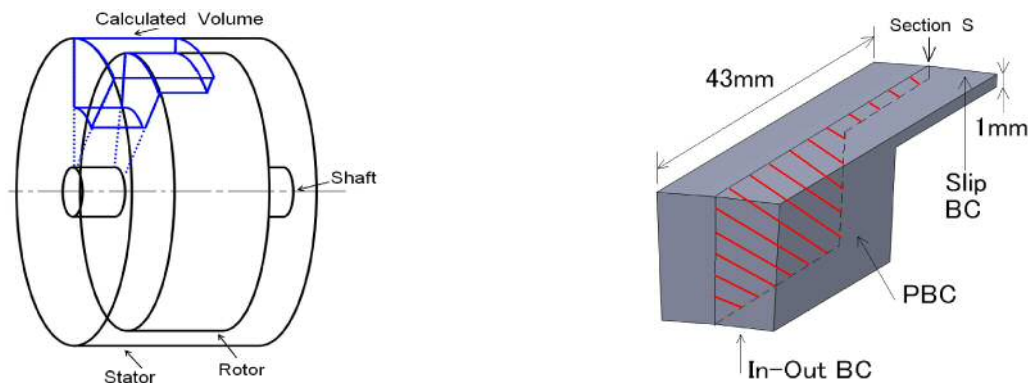
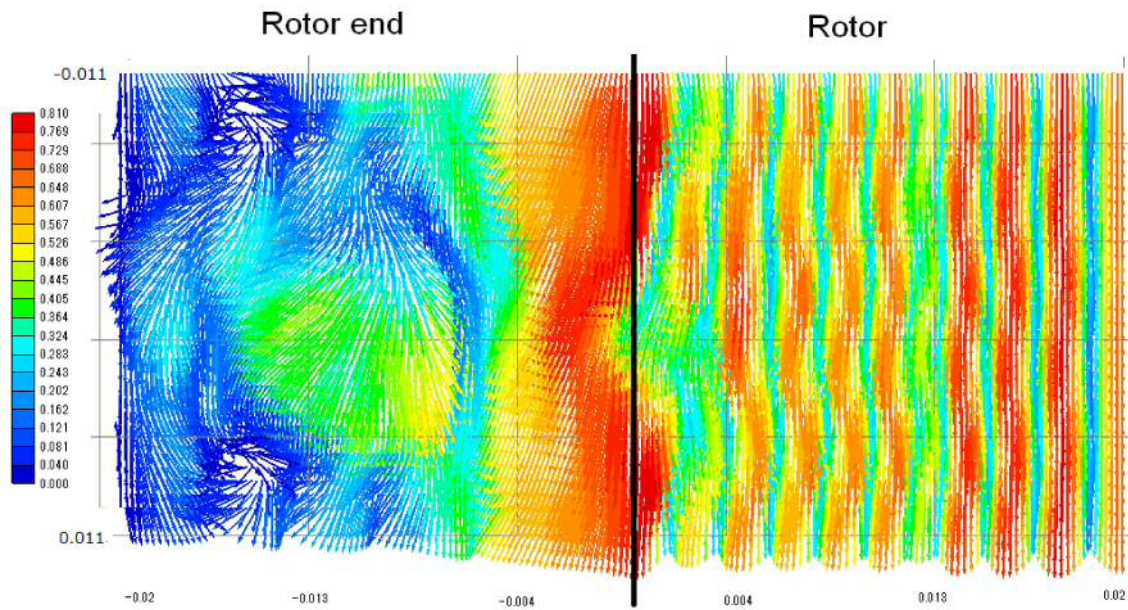


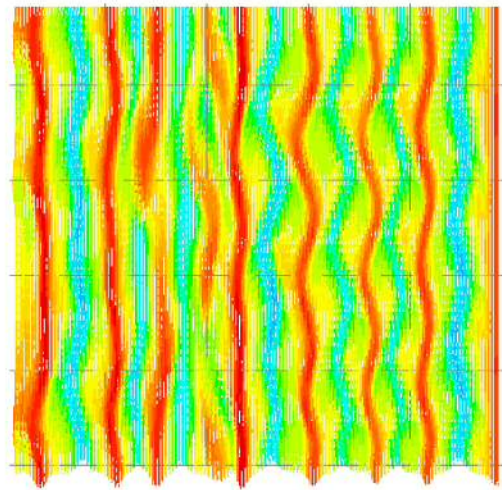
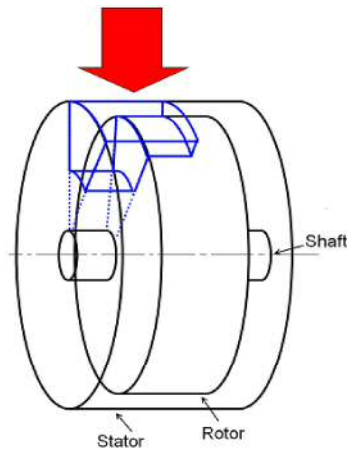
Fig 46: A part of considering region among Fig 47: Detail of calculated area for mutual effect rotor-end and gap area.

表す。具体的な計算領域としては、図 46 より、ステータ内側の領域において方位角 θ は 5° として、径方向に 10mm、軸方向は全体長さの半分である 43mm を取り、メッシュ数はそれぞれの方向について 30, 220, 250 とおいた。 θ 方向についてメッシュ数が極端に少ないのは θ 方向では変動成分が他の方向よりもはるかに小さいためであり、この方向と垂直な境界面に周期的境界条件を設けることで仮想のリング状領域を形成している。メッシュ分割数に関して θ 方向と特に対称的なのは径方向であり、メッシュの間隔が 0.045mm となっていて 1mm のギャップに対して 20 個以上の分割数を与えている。更に、軸方向についてもメッシュ間隔が 0.17mm でありギャップ間隔に対して十分細かい精度を持つと考えられる。図 48 に、ロータが回転開始 2 秒後におけるロータを側面から観測した速度場の結果を示す。



(a) Bisectonal area

Viewing along red arrow



(b) Gap restricted area

Fig 48: Velocity on the section for gap plus rotor-end-part as $Re=1000$ at gap region .

図 48 では, (a) にギャップ領域とロータ端部の複合領域を解いた結果, また, (b) ではギャップ領域を単独で解いた場合の結果を示して比較した. 図 48(a) の縦方向の中央付近にある黒い横線はロータの端面があることを表しており, これから少し離れた部分では図 48(a) と (b) における速度場の増減の様子が一致していることが分かる. また, この境界線を境にして流れ場が出入りしているため, ギャップ領域とロータ端部間ではある程度の流れ場のやり取りがあることが分かる. 同様の位置における実験結果を図 45 に表したが, ここでもギャップ領域とロータ端部間でやり取りがあることが分かっていたので, 両者は共通の性質を持つと言える. 尚, 領

域をギャップ領域とロータ端部とに分けて計算する方法と複合領域で解く方法とでは、図 48(b) の左側境界を見ると流れの出入りが図 48(a) に比較して穏やかであることから、両領域の境界付近の流れ場については互いに異なっている。したがって、ギャップ領域の流れ場を単独で解いた場合には、両サイドの境界付近で実際の流れ場との相異が生じる得ることに注意する必要がある。次に、角度を変えてこれら複合領域を見るため、図 47 の赤色の斜線で示した断面領域での速度場を調べてみると次のようになっている。

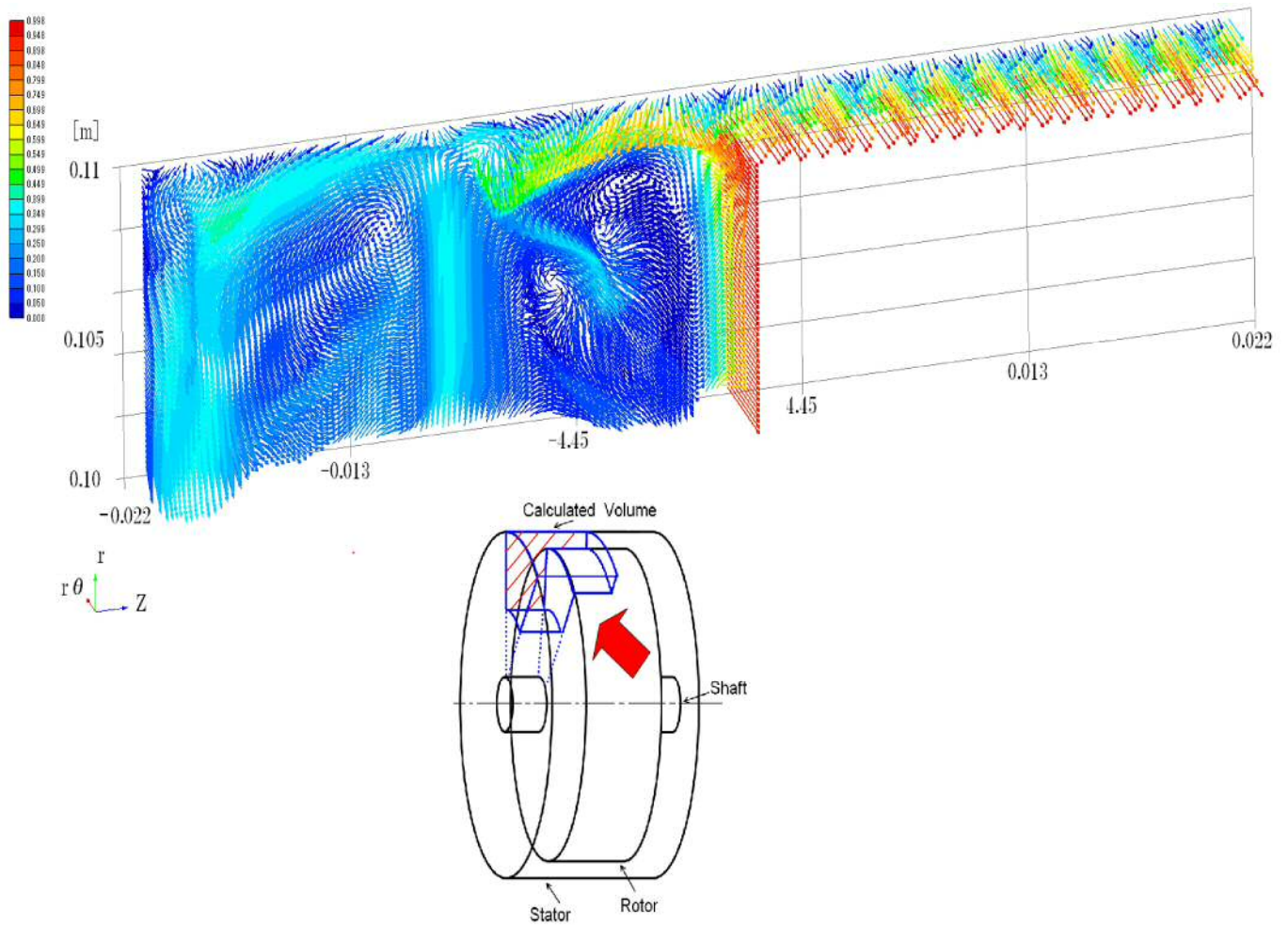


Fig 49: Velocity for gap plus rotor-end-part as $Re=1000$ at gap region.

図 49 より、ロータ近傍の流れ場が大きく、ギャップ領域では何らかの周期的な流れ場があることが確認できる。全体的に流れの乱れ成分が大きいため、図 49 のギャップ領域とロータ端部領域を拡大したものが以下となる。

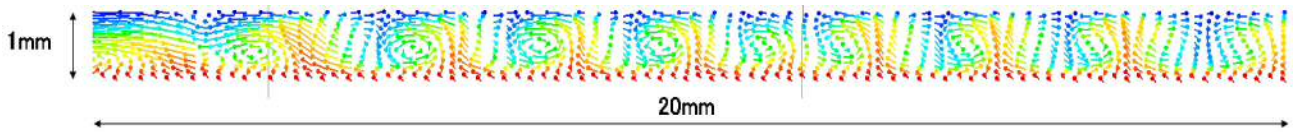


Fig 50: Velocity for gap plus rotor-end-part as $Re=1000$ at gap region.

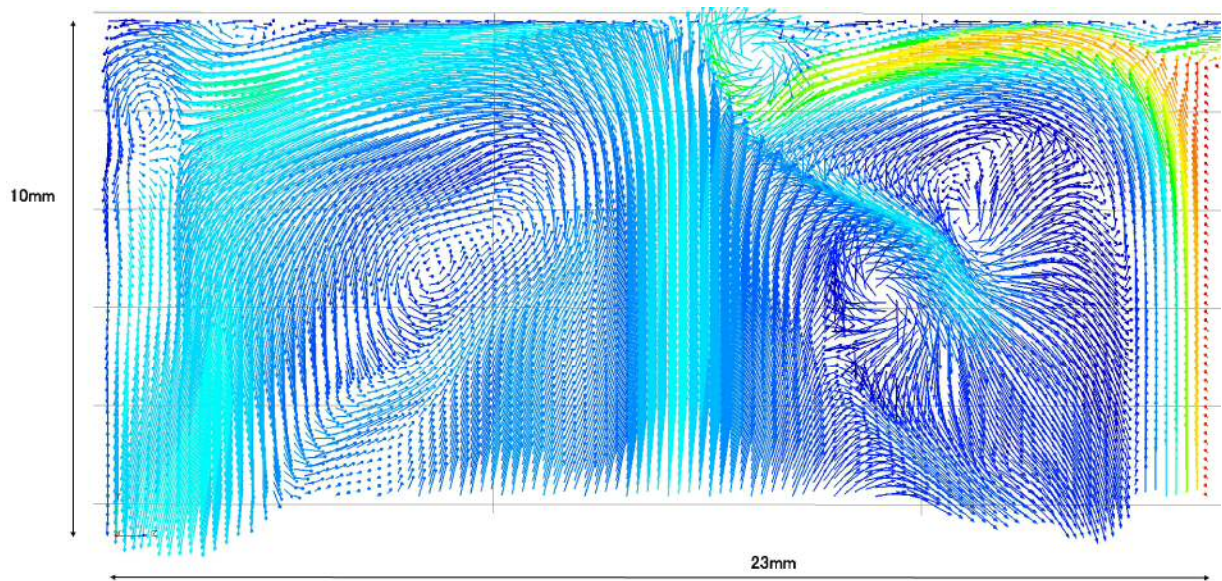


Fig 51: Velocity for gap plus rotor-end-part as $Re=1000$ at rotor end part.

図 50 では、ギャップ領域の回転軸と垂直な断面に射影された速度場を示してある。ここでは、ロータ周辺部の軸方向 20mm の領域について、約 10 個の速度場のピークがあることが分かり、それぞれが回転する流れ場を持つため、揺動を伴ったテイラー渦を成していると言える。図 36(b) の結果を見ると、このような渦が約 4 個生じており渦の個数の密度としてはほぼ同等である。ここで、図 50 の左端はロータ端部とギャップ領域の境界を表しており、ロータ端部からギャップ領域に進入した流れが、ロータ端部へ再度戻される循環のあることが分かる。一方、ロータ端部に注目すると、図 51 に詳細を示す通り、乱流としての乱れ成分が大きくなっているが、主流としてロータが回転する際に生じる遠心力により、ロータ端面に近い部分からロータ外側に向かって流れが生じていることが確認できる。図 41 でもこのような流れ場が生じており、流れのおおまかな傾向としてはロータ端部を個別に解いた場合とギャップとの複合領域について解いた場合とで相違がないと言える。以上より、ギャップ領域を個別に解いた場合とギャップとの複合領域について解いた場合とでは、終端部を除いておおよそ一致していることが示された。

3.4 本章のまとめ

計算条件として、ギャップ領域とロータ端部との境界部分を介してそれぞれの領域を往復する流れ場が生じているものとして、隙間比 η が 1 に近い流れ場を解析した。過去の知見からは、ギャップ領域の両サイドが出入り条件の場合にテイラー渦が生じることは自明ではないが、本研究の場合には同様なテイラー渦が生じることが示された。その際、 Re が上昇するに伴って流れ場は乱れて乱流状態に遷移することが分かり、実験での観測と良く一致することが分かった。更に、ギャップ両サイドが出入り条件の場合には slip 条件に比較して発生するテイラー渦の数は約半分となり、境界条件が流れ場に強い影響を与えることが分かった。したがってギャップとロータ端部の境界の流動を変えることは、ギャップ領域の流動を制御する手段の一つになると考えられる。

一方、ロータ端部では筋状の渦を伴う流れ場が生じており、 Re を上げることでこのような筋模様が更に細かくなることが示された。Lagrange 形式による解析より、エクマン渦に起因する流れ場が生じており、 ω の上昇に伴って渦の径が細かくなることが示された。

4 熱流動解析

これまでの説明では流れ場の流動特性のみを扱ってきたが、以下では、モータ内部の流動特性と伝熱特性との関係について考察する。モータにおける流動特性を調べることは、設計時にあらかじめ伝熱特性を把握できるため減磁等のオーバーヒートを未然に防ぐ有効な手段となり得る。モータ設計時の熱特性の把握については主に2つの方法がある。一つ目は、最も簡便な方法として、モータを周囲が断熱された孤立系と仮定し、熱容量を基にして温度上昇を見積もる方法である。この方法では熱流を考慮できないため熱的平衡状態での温度特性を捉えられないが、比較的エネルギー密度が低いモータでは実用上は問題なく扱われることが多い。しかしながら、今後普及が想定されるモータでは装置全体の小型化の要求などからエネルギーの高密度化が予想されるため、モータ内部では過渡的状态を経てから定格温度を超えるような深刻な状態が起こり得ることは容易に想像ができる。二つ目は、モータを外気などの放熱経路を含む開放系として扱う方法であり、過去の経験則を元に Nu を推定する等の方法があるが、伝熱特性の新規設計への応用に関してはモータ内部の流体を含めたより複雑な議論を要する。以上のような流動構造に基づく伝熱の課題を解決するべく、新しい方法として、本章ではモータ内部の詳細な熱流動特性が、熱伝達に如何に寄与するか注目して議論を行う。尚、ギャップ領域の両サイド S_z において、実験と同様の境界条件が出入り条件であるため、ここでは S_z を出入り条件の場合についてのみ扱うこととする。

4.1 計算条件

数値解析で用いるのは図 52 に示すように、上下2面の温度がそれぞれ一定値 T_1 , T_2 , $T_1 < T_2$ に設定して、内部が流体の充たされた領域とおく。この系には状況に応じてギャップ領域などの想定しているモデルを対応させる。流体は Boussinesq 近似に基づき非圧縮性として、粘性に

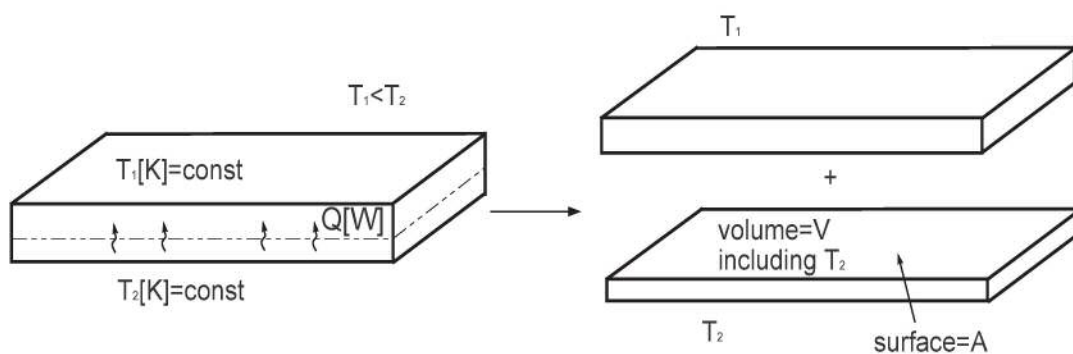


Fig 52: Region of simulation for gap with temperature distribution.

よる散逸は外場による熱量に比べて無視できると仮定すると、系のエネルギー方程式は式 (5) のように書ける。 T_2 面から T_1 面への熱移動が一定となるような十分な時間が経過すれば系は

定常状態に達するため式 (5) は左辺が 0 となる．ここで，計算領域を便宜上， T_2 面と T_1 面の中間で 2 つに分離することを仮定して，下側の領域を V とおき， V 内で式 (5) を積分すると

$$\begin{aligned}
Q &= \int_V d^3x q = \int_V d^3x \left\{ \rho C_p \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T - k \vec{\nabla}^2 T \right\} \\
&= \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \left\{ \rho C_p T \vec{v} - k \vec{\nabla} T \right\} \\
&= \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \left\{ \rho C_p (T - \tilde{T}) \vec{v} - k \vec{\nabla} T \right\} \quad \because \vec{\nabla} \cdot (\tilde{T} \vec{v}) = 0 \\
&= \int_A d\vec{S} \cdot \left\{ \rho C_p (T - \tilde{T}) \vec{v} - k \vec{\nabla} T \right\} \\
&= \int_A d\vec{S} \cdot \vec{J} \tag{46}
\end{aligned}$$

が得られる． Q は熱移動が一定化した際の高温側から低温側に輸送される全熱量を表しており，非圧縮条件 $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ ，及び，第 2 行から第 3 行へは積分にガウスの発散定理を用いている．また， \vec{J} は熱流を表し以下のように書ける．

$$\vec{J} = \rho C_p (T - \tilde{T}) \vec{v} - k \vec{\nabla} T \tag{47}$$

但し， \tilde{T} は一定の温度値を表し，高温側からの移流に注目して T_2 などを用いる． T を $T - \tilde{T}$ に置き換えたのは， T が不変の場合に $\vec{J} \neq 0$ となることを避けるためのゲージ変換と言える．本解析では式 (46) の面積分を実行することで，境界 A を通過する熱エネルギーを見積もる．伝熱実験では式 (47) の右辺第 2 項の温度勾配のみを熱流として扱うことが通常であるが，温度境界層が非常に薄いことに配慮をして第 1 項のフラックスの寄与を取り入れた．式 (47) の右辺各項の比較については後述する．計算の境界条件については $T_2 - T_1 = 10$ ， $r = 0.109$ ， $\omega = \{4.58, 9.16, 13.74\}$ ($Re = \{500, 1000, 1500\}$ に相当) とおき領域の底面を $r\omega$ の速度で動かして，定常的になった時の温度分布と熱抵抗値について考察する．また，計算領域は角度方向に 20mm，厚みを 1mm，軸方向に 20mm とおく．実際には粘性率 ν は温度変化に伴って変わるが，本解析では中間温度を採用するため，粘性の変化は無視して ν は一定値とした．更に，移流の寄与が浮力よりも十分に大きいとして，重力の効果も無視した．

4.2 計算結果

4.2.1 温度分布

$Re = 500$ の場合について，渦構造が現れ始めた初期の段階において，温度分布に色付けしたものが以下となる．ここで，系の境界条件として $\Delta T = T_1 - T_2 = 10$ とおき，ギャップ内部を熱流が通る状態を数値計算で再現した．系が十分定常状態になっている状態で温度分布を色付けしたのが下記の結果となる．

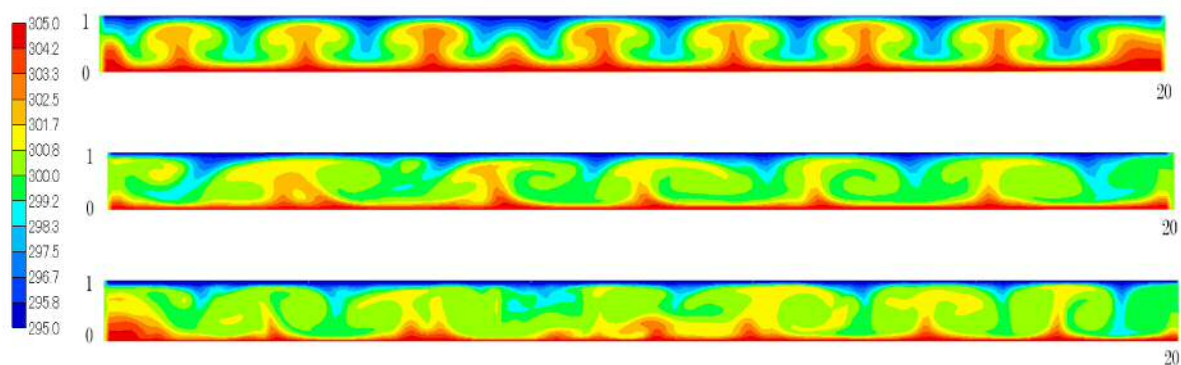


Fig 53: Velocity and pressure contour for gap plus rotor-end-part as $Re=500$ at gap region.

断面の温度分布から分かるように、マッシュルーム状に温度上昇が生じており、テイラー渦が伝熱に寄与している様子が理解できる。 Re が比較的小さな 500 の場合には、このようなマッシュルーム状の温度分布が実現されているが、 Re が上昇するに伴って全体的に温度が均一化されていることが確認できる。これは、ロータの回転数が上昇することでテイラー渦に揺動が生じていることに起因しており、流れ場が温度場に影響を与えていることが理解できる。

4.2.2 熱流束について

次に、式 (46) における熱流束 J について考察する。ここでは特徴的な 2 つの項が存在する。すなわち、第一項の移流による寄与と、第二項の熱伝導の寄与があり、それぞれ異なる性質を持っている。最初に J の第一項 $\rho C_p (T - \tilde{T}) v_r$ について可視化した結果が以下のようになる。

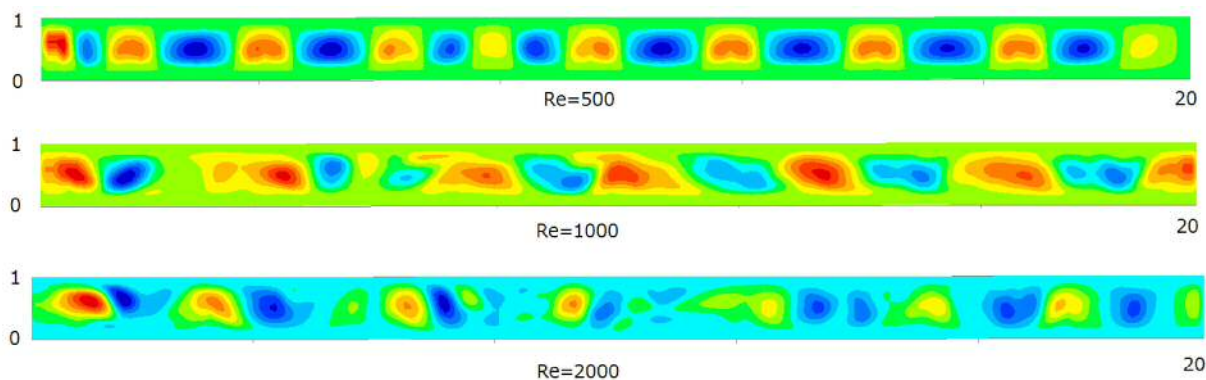


Fig 54: Temperature contour as $Re=500$ reaching at equilibrium state.

図 54 から分かるように、壁面に近い部分では J の移流成分が比較的小さく、壁から離れるにしたがって大小の変化量が増していることが分かる。これは、壁面近傍では流れの壁面と垂直

な成分が0に近づくためであり、ギャップ領域の中間付近ではテイラー渦に起因する対流成分が支配的になるからであると考えられる。比較的 Re が小さい場合では、はっきりとしたテイラー渦の影響が確認できるが、 Re が上昇することで揺動が大きくなり次第に不規則な分布を示すようになってきており、このような対流成分の熱伝導への寄与が乱れ成分を多く含んで現れてくることが確認できる。

一方で、 J の第二項を可視化すると次のようになる。

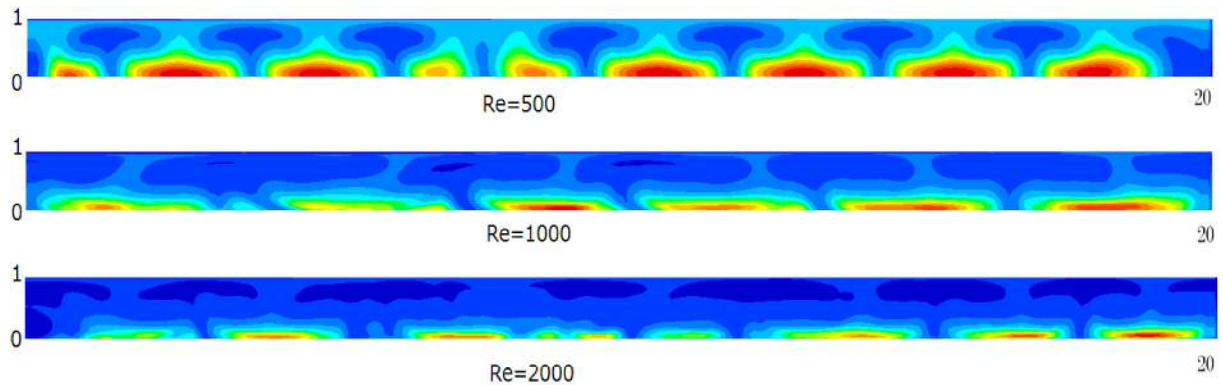


Fig 55: Temperature contour on the XY section within calculated area. Distribution of temperature tends to be uniformity according to enlargement of Re .

図 55 は図 54 と性質が異なっており、壁面に近い部分では大きく、壁面から離れるにつれて小さくなっていることが分かる。壁面近傍では熱伝導が支配的であることの表れであり、 Re が変化してもこの傾向は同様であると言える。また、流れに揺動が生じた場合についても、図 53 で示したような温度の不均一性が見られるが、揺動が大きくなるに従って場所による違いは小さくなっていることが確認できる。

ここで、それぞれの項の役割を定量的に議論するために、ギャップ領域においてロータからの距離 y を $y = 0$ と $y = d/2$ とした 2 種類の平面上で各項の占める割合を計算した。

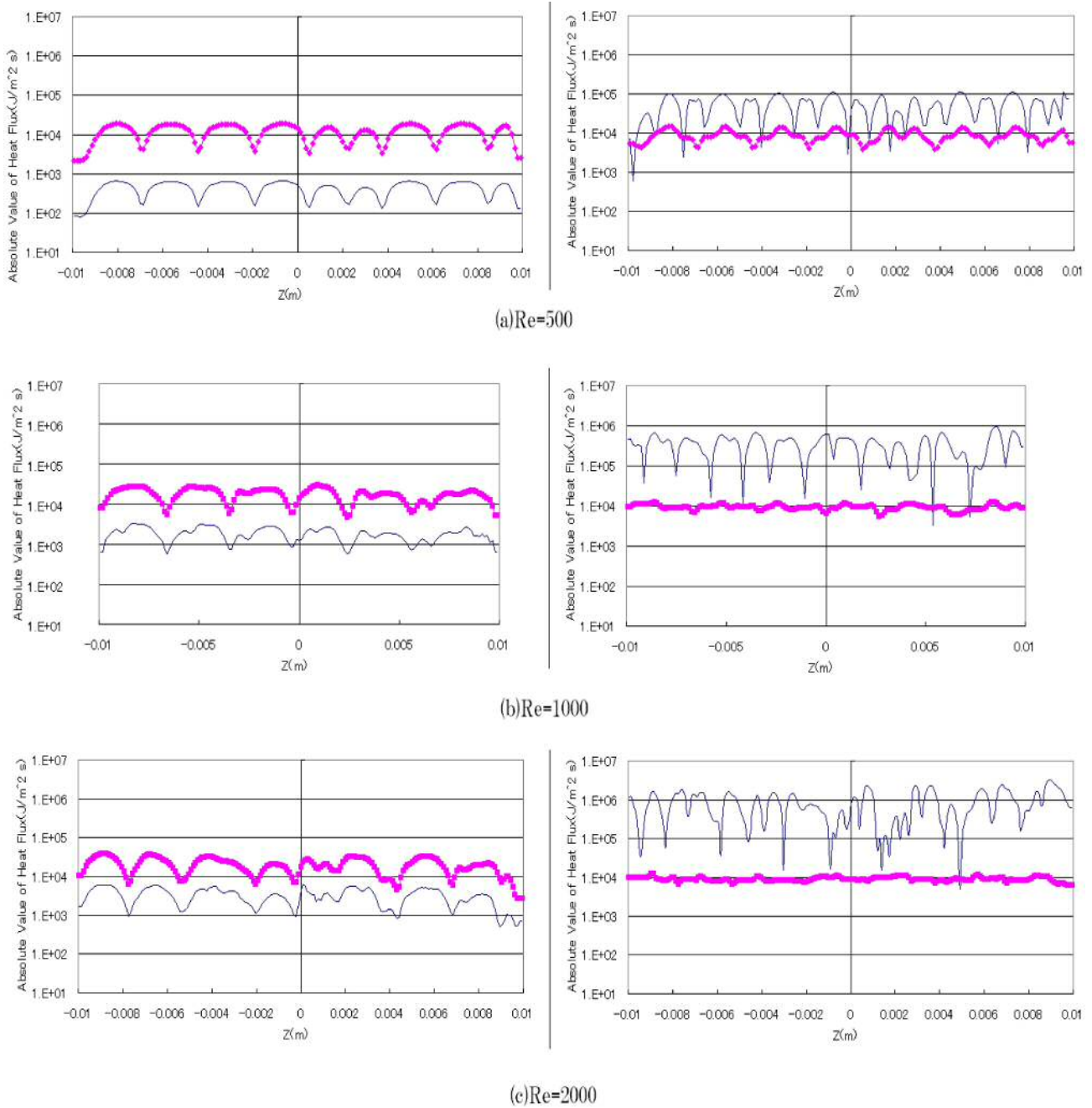


Fig 56: Temperature contour on the XY section within calculated area. Distribution of temperature tends to be uniformity according to enlargement of Re .

図 (56) において、実線が移流、四角の点を結んだ線が熱伝導による寄与を示す。また、左側が $y = 0$ 、右側が $y = d/2$ における値である。図 (56) の左側から分かることは、いずれも熱伝導の寄与が移流の寄与を上回っており、 Re の上昇に伴って増大していることである。これは

すなわち、ロータの回転数が上昇することでテイラー渦に起因する流れ場が生じると、壁面近傍の温度変化が素早く緩和されることを示唆している。他方、右側の図では熱伝導と移流の寄与が逆の傾向を示していて、 Re の上昇に伴って移流の寄与が突出してくることが確認できる。これは領域の中間付近では、熱が流れに乗って移動する寄与が一層支配的となり、流れ場の状態に熱流束が支配されていることを表している。したがってテイラー渦に起因する伝熱効果はこのような移流に強く表れており、結果的にギャップ領域全体の熱流束を増大させていることが理解できる。

4.2.3 熱伝達率と流れ場の関係

これまでの計算結果に基づいて、熱伝達率を Re , Nu とプラントル数 Pr の関係によって定性的な議論を行う。ギャップの伝熱解析において、図 57 の赤の斜線領域における温度分布を表してみると、図 58 のように大小のばらつきを持つことが分かる。しかしながら、これを壁面上で平均化することで Re と対応する一つのデータとして集約した。すなわち、ロータの円周か

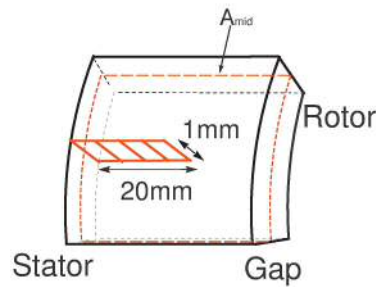


Fig 57: Visualized part of section within gap region

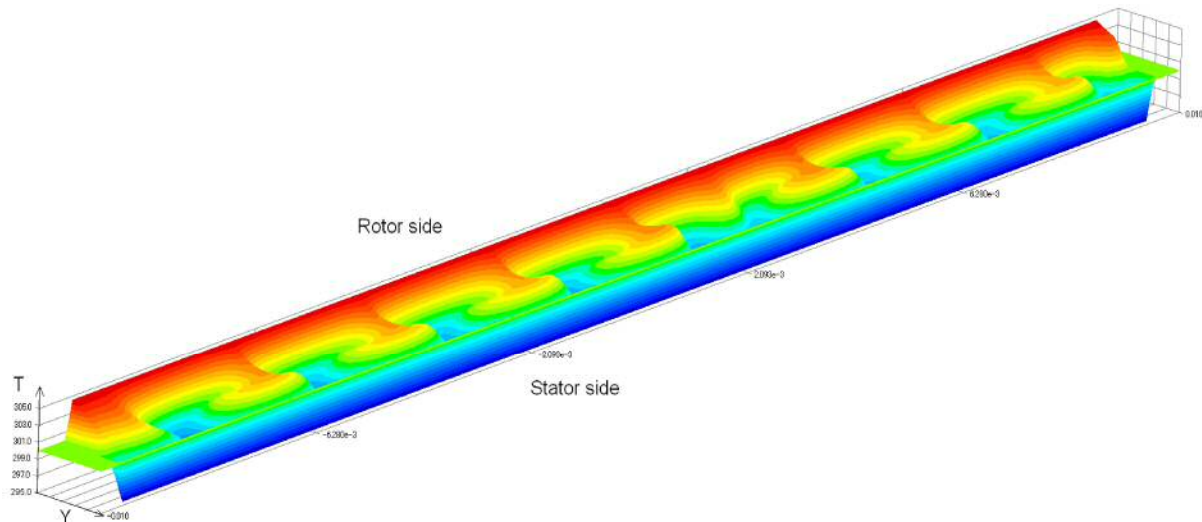


Fig 58: 3D Contour view of temperature according to the XY section

らステータに抜ける伝熱について調べるため、図 57 におけるギャップ領域の中間の面 A_{mid} に

ついて

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{A_{mid}} \int_{A_{mid}} d\vec{S} \cdot \vec{J}, \\
 Nu &= \frac{hd}{\lambda} \\
 &= \frac{|J|d}{\Delta T \lambda}, \quad \Delta T = 10
 \end{aligned} \tag{48}$$

のようにして平均化した熱流束 J を得ることができる。但し、 \vec{J} は式 (47) に基づいている。式 (48) を基に、各 Re について Nu を求めた結果が以下の通りである。図 59 より、テイラー渦の

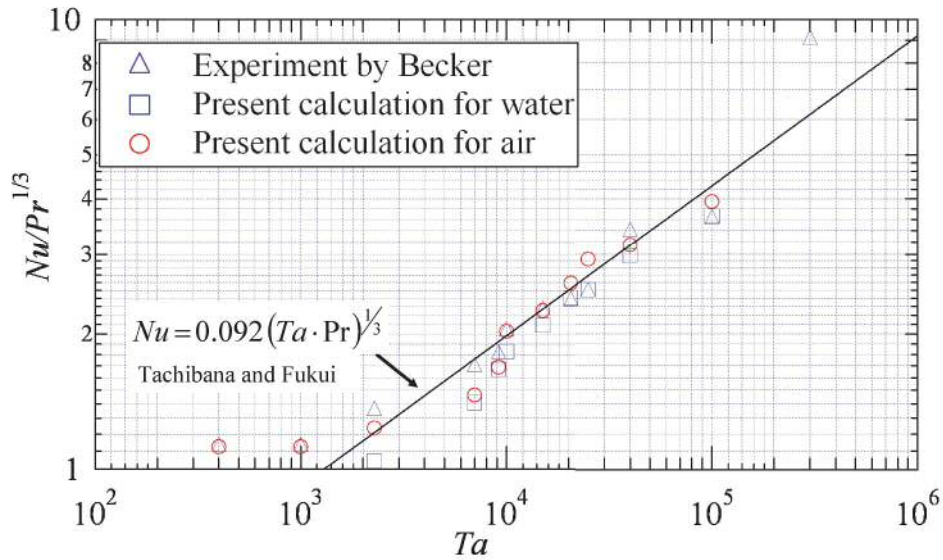


Fig 59: Distribution of mean Nusselt number Nu according to Ta . All results tend to $Nu = 0.092Re^{2/3}(Pr d/r)^{1/3}$ for $Re > Re_c$

生じる臨界では $Re = 300 \sim 500$ であることから、 $Re = Re_c$ を境にして Nu が上昇していることが分かる。橘ら [21] によれば、このとき $Nu = 0.092Re^{2/3}(Pr d/r)^{1/3}$ の曲線が得られることが指摘されており、本解析の結果とよく一致している。ここで、流体に水を用いたのは流体の違いによる Nu の変化を見るためであり、空気と水に関しては Re のみならず Pr による規格化により流体の相違を吸収できたことになる。モータ内部では空気以外にも ATF をはじめとした鉱物油が適用される例があるが、あらかじめ流体の特性を知っておくことで同様に扱えると考えられる。但し、ATF の種類は多岐に渡るため逐一特性を確かめるようなことはここではし

ないで、事例報告に留めておく。尚、モールド処理等を行わず、ステータ内面が今回の例のように滑らかでなくスロット等の凹凸がある場合については、 $Ta < 10^6$ であれば Nu が10%以内で上昇することが指摘されているため、ステータ内面の形状変化がある場合については、熱伝達率に極端な相違は見られないと考えられる。

このようなギャップ領域の熱流解析は工業的に重要な意味を持っている。なぜならば、ギャップ領域の実験による温度測定は間隔 d が狭すぎるために非常に困難な作業となり現実的でないが、同じ領域を数値解析により調べられることで流れ場と熱流束の関連を読み取ることが可能となるからである。例として、温度測定を実験で行うとした場合、最も小型の熱電対でもプローブの直径が0.2mm程度であるため、ギャップ領域の平均的な温度を取得することが限界と考えられ、壁面近傍の詳細な温度プロフィールまでを取得することは不可能である。また、サーモグラフィでの測定なども検討できるが、測定粒子の発する赤外線の影響を抑えて正確な温度の計測を行うことは現状では極めて困難と言える。

以上より、本解析のようにモータの内部領域を個別に調べる方法が、モータの流動、及び、伝熱特性を得る際に有効な手段であると考えられる。これは後でモータ全体の冷却構造を調べる上で活用される内容であり、実験結果を補う形で導入が見込まれる。

4.3 本章のまとめ

熱流動解析におけるギャップ領域の熱伝達は、 $Ta > Ta_c$ において増大しており、 $Nu = 0.092(Ta Pr)^{1/3}$ に漸近することが分かった。ここで、 Ta_c は式(32)より $Ta_c = Re^2 \sqrt{\frac{d}{r_i}}$ と書ける。一方、モータの回転数が比較的小さく $Re < Re_c$ の場合にはロータの熱が停滞しやすくなるが、 $Re = Re_c$ を境にして急激に除熱特性が上昇することが理解できる。また、少なくとも空気、及び、水が作動流体の場合について、 Nu と Pr の合わせ込みにより流体の相違によらない扱いが可能であることが示された。

流動解析の結果を踏まえると、テイラー渦が生じることにより流れ場の状態が急激に変化することから、 Nu の急峻な変動はテイラー渦に起因すると結論できる。更に、 Nu が上昇する際に、ロータ及びステータ壁面近傍では温度勾配が著しく増大していることが確認された為、流れ場の状態と熱伝達率の関係について明確になったと言える。

5 実機への適用性評価

モータの温度を推定することは、モータ設計を行う上で減磁等のオーバーヒートを防ぐ重要な技術である。4章では、ギャップ領域の熱抵抗を求める方法を学んだが、実際の系では様々な部品の複合体であるため周辺の伝熱特性についても把握しておく必要がある。そこで本章では、モータ内部で発熱があった際の伝熱特性について考察していくことにする。初めに、熱源を含んだモータを模擬したモデルを用いて、各部品上の温度特性について検証する。次に、実際にこれら伝熱特性を実機に当てはめる際の手法として、熱回路網法の活用について説明する。

5.1 熱流動実験

5.1.1 EV モータ構造を模擬した実験装置

図 60 に実験装置の概略図を示す。実験装置は、モータ、インバータ、軸、ロータ、ステータ、ヒータ、フレーム、スリップリング、スライダック、温度データロガー（温度分解能 0.1 °C，時間分解能 0.1 s）から構成される。ステータの直径 220 mm，ロータの直径は 218 mm であり、ステータとロータの半径方向における隙間が 1 mm と非常に狭い。ステータの長さは 100 mm，ロータの長さは 40 mm である。ロータにはヒータ（ニクロム線：抵抗値 46.1 Ω）が埋め込まれてあり、スライダックからスリップリングを介してヒータに電流を流し発熱させる。スライダックの入力電圧を V [V] とし、ヒータの発熱量 Q [W] は

$$Q = V^2/46.1 \quad (49)$$

とする。軸、ロータ、ステータ、フレームに、それぞれ熱電対が設置されている、回転体であ

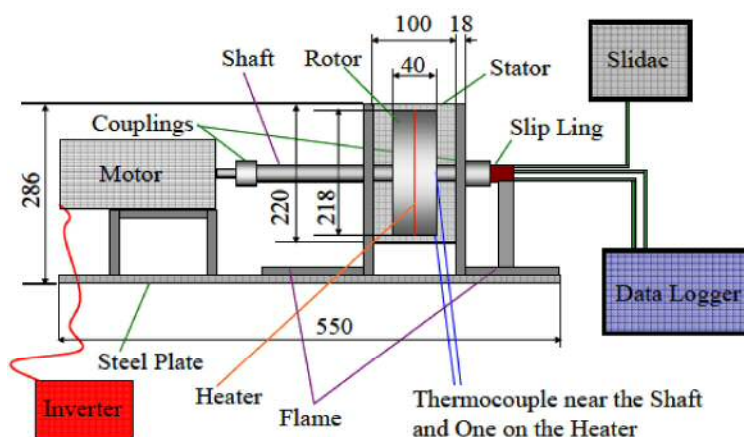


Fig 60: Schematic drawing of the heat tester.

る軸およびロータには、軸に 1 箇所、ロータに 2 箇所、熱電対が設置されている。これら 3 箇所について、スリップリングを介して熱電対をデータロガーにつなげることで温度を計測する。

また、回転体ではないステータおよびフレームには、ステータに3箇所、フレームに2箇所、熱電対が設置されている。これら5箇所について、熱電対をデータロガーにつなげることで温度を計測する。実験装置は鉄板の上に乗っており、鉄板にも熱電対を取り付け、この箇所の温度を外気温とする。インバータの周波数を変化させることで、モータの回転数を変化させることができる。発熱量、回転数をパラメータとして、熱電対を取り付けた箇所の温度変化について調べる。

5.1.2 インバータ周波数とモータ回転数の関係

インバータ周波数 f [Hz] と回転数 n [rpm]、モータの極数 p 、滑り s とすると、インバータ周波数とモータ回転数の関係性は以下のように示される。

$$n = \frac{120 \times f}{p}(1 - s) \quad (50)$$

尚、本実験装置のモータの極数は、 $p=2$ である。インバータ周波数（以下周波数）を、0-5 Hz の範囲においては0.5 Hz ごとに、5-50 Hz の範囲においては5 Hz ごとに変化させた。この条件下でのモータ回転数（以下回転数）を、ハイスピードカメラを用いて実測した。周波数を増加および減少させた場合の2通りについて調べた。また、周波数を増加させた場合および減少させた場合それぞれについて、同様な条件で5回行い、結果の平均をプロットした。但し、ばらつきの標準偏差をエラーベクトルで示すこととした。また、式(50)による表示と比較した結果を示したものが図61である。図61から、周波数が増加することに対して回転数のばらつきはほとんどなく、周波数の上昇時と減少時におけるヒステリシス損失もないことが分かる。また、(5)式の滑りを $s=0.01$ とした時、(6)式による直線と実測によって得られるプロットがほぼ一致することが確認された。ここで、周波数と回転数の関係を、最小二乗法を用いて求める。図61の周波数増加時における周波数と回転数の関係を表すプロットを、最小二乗法により線形近似したところ、下記の結果を得た。

$$n = 59.897f - 1.2716 \quad (51)$$

周波数増加時のプロットと最小二乗法から得られる直線を図61に示す。図61から、プロットと直線はほぼ一致していることが分かる。本研究では、周波数と回転数の関係に関して式(50)を適用することとする。

5.1.3 温度計測位置

図62(a)にヒータの位置および軸とロータにおける熱電対の位置を示す。ロータの中心から半径方向に98~101 mm の位置にヒータが埋め込まれている。ロータにおける熱電対は、ヒータ及び軸付近（軸の中心から約56 mm の位置）の2箇所それぞれに取り付けられている。軸における熱電対は、軸の中心から約19 mm の位置に取り付けられている。図62(b)にステータとフレームにおける熱電対の位置および外気温を計測する熱電対の位置を示す。モータに近

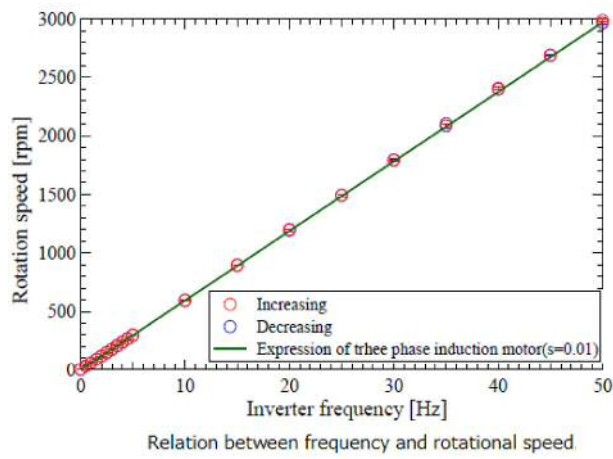


Fig 61: Schematic drawing of the heat tester.

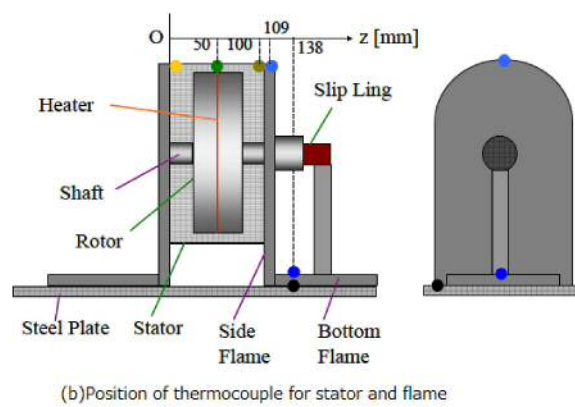
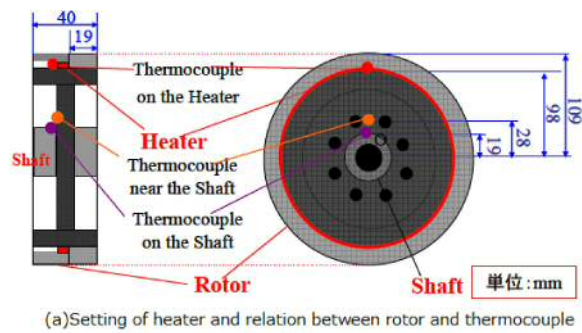


Fig 62: Constructure of heat tester

い側の端を基点とし，スリップリングに向かう軸方向を正として考える．基点から軸方向の距離を z [mm] とする．ステータにおける熱電対は， $z = 0, 50, 100$ mm の位置にそれぞれ取り付けられている．フレームについては，フレーム側面およびフレーム底面と2つに分けて定義する．フレームにおける熱電対は，フレーム側面の $z = 109$ mm の位置およびフレーム底面の $z = 138$ mm の位置にそれぞれ取り付けられている．また，鉄板の $z = 138$ mm の位置に熱電対が取り付けられており，その位置における温度を外気温とする．

5.1.4 スリップリング

スリップリングとは，回転体に対して環状の電路とブラシを同心円状に配置したものである．図63にスリップリングの内部の様子を写真で示した．図63では，左側の円形の物体が回転体に

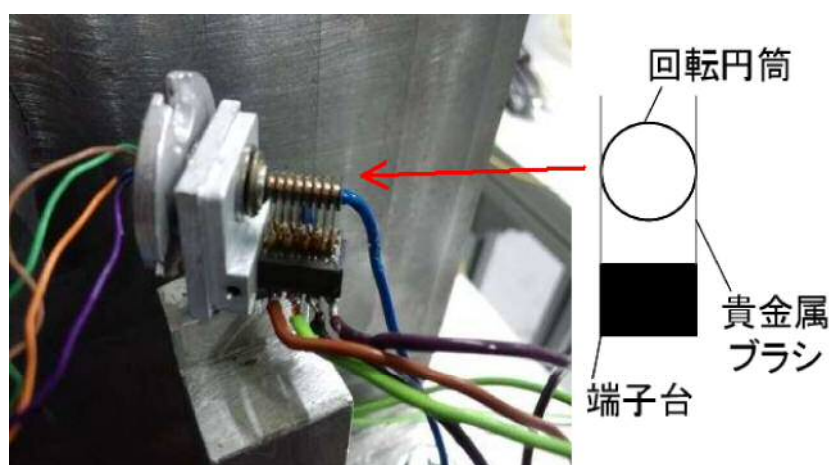


Fig 63: Constructure of slipring

接続する部分であり，導線が伸びていることが分かる．また，右側に見える円筒形と楕状の物体がそれぞれ接点とブラシであり，固定側に配置される．ここで，回転側にあるリング状の電極に対して，固定側にあるブラシを押し当てることで，回転側と固定側の電気信号および電気出力の伝達を実現する．本実験装置においては，回転体であるロータおよび軸に取り付けられた熱電対の電気信号を固定側にある温度データロガーに伝達させるためにスリップリングを介して導体の接続を行う．また，ロータに埋め込まれたヒータに固定側にあるスライダックからの電流を流すためにスリップリングを介することとする．本研究では製品スリップリング（日本ムーグ社製）を用いた．製品スリップリングは10端子を有している．すなわち，温度計測点およびヒータ回路のうち5セット分まで使用することが出来る．

5.1.5 実験条件

ヒータ入力を 0, 54.22, 138.82 W と変化させた。各発熱量において、周波数を 0 Hz の状態から 10 Hz ずつ上昇させ、50 Hz まで上昇させた。発熱量、及び、周波数の異なる幾つかの場合において、温度が定常になったと思われる時刻から、各部品の温度を 500 s 計測する。

5.1.6 時系列温度および温度ヒストグラム

温度を計測した場所は、ヒータ (Heater)、軸付近 (Near the shaft)、軸 (On the shaft)、ステータ 3 点 ($z = 0, 50, 100$ mm)、フレーム側面部 ($z = 109$ mm)、フレーム底面部 (Bottom flame)、外気温 (External air) である。ここで、ヒータ入力 138.82 W, 周波数 0 Hz の場合およびヒータ入力 138.82 W, 周波数 50 Hz の場合における、各部品の温度計測結果を示す。図 64 がヒータ入力 138.82 W, 周波数 0 Hz の場合、図 65 がヒータ入力 138.82 W, 周波数 50 Hz の場合における時系列温度である。また、図 64, 図 65 に温度計測位置を併せて示す。また、これらの温度データから、温度ヒストグラムを作成した。ヒータ入力 138.82 W, 周波数 0 Hz の場合の温度ヒストグラムが図 66 であり、ヒータ入力 138.82 W, 周波数 50 Hz の場合の温度ヒストグラムが図 67 である。図 64 から、ヒータで発生した熱の一部がステータ中央部 ($z = 50$ mm) に

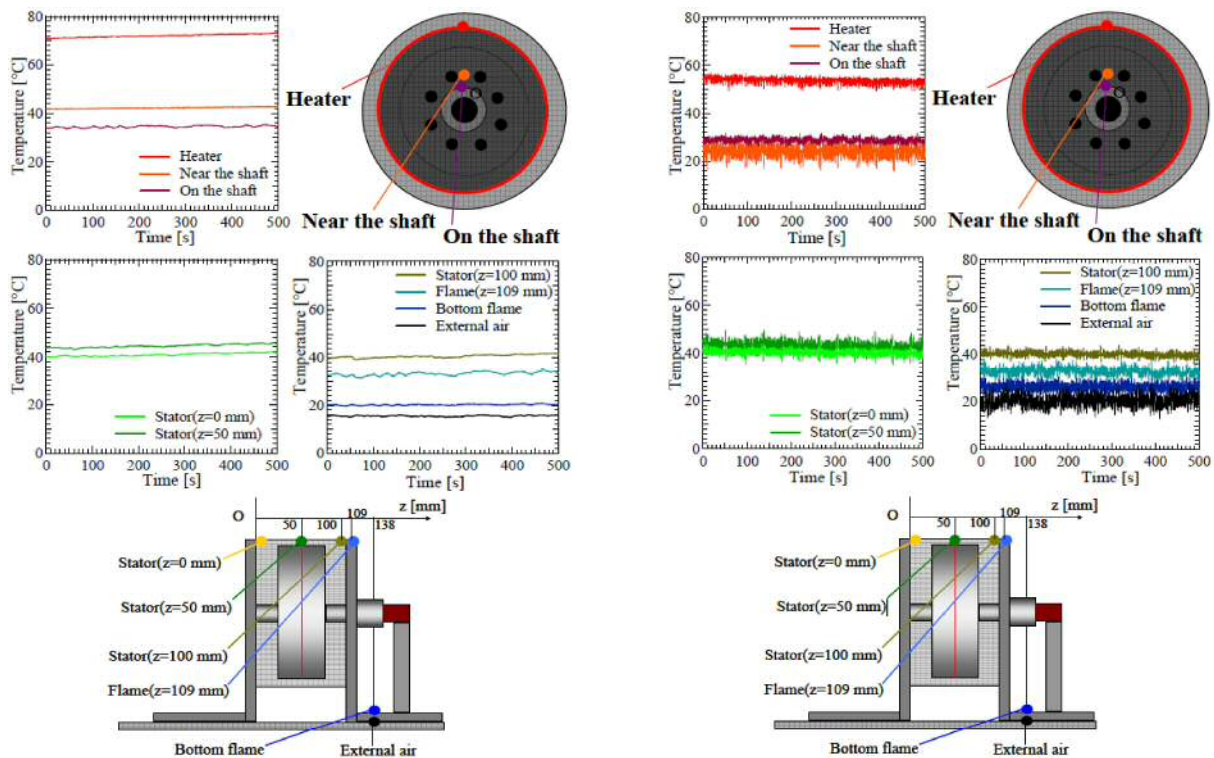


Fig 64: Result of heat tester as $Q = 138.82W, f = 0Hz$

Fig 65: Result of heat tester as $Q = 138.82W, f = 50Hz$

伝わり、ステータの両側 ($z = 0, 100$ mm) へと移動しているのが確認できる。また、ステータ

$z = 100 \text{ mm}$ の温度とフレーム側面部 ($z = 109 \text{ mm}$) の計測位置が近いとはいえ、温度の差が大きいことが分かる。部品が変わることによって熱の移動が抑えられていることや、フレームは大きい部材であり、熱容量が大きくなるため温度上昇が抑えられていることが考えられる。図 65 から、モータを回転させると、回転体の温度が下がることが確認された。さらに、周波数 50 Hz にすると、ロータの軸付近の温度と軸の温度の高低の関係が入れ替わることが分かる。これは遠心力の影響が考えられる。回転の中心位置から離れているほど遠心力は大きく働く。遠心力が大きく働けば、外向き（ステータやフレームへの方向）の流動が大きくなる。流動が大きければ、熱移動も活発になると考えられる。回転の中心位置から軸付近の距離がロータの軸付近は回転の中心位置から軸よりも大きいため、外向きの熱移動が大きくなり、温度が軸よりも低下したと考えられる。回転を加えたことによりフレームの温度が無回転の温度よりも上昇したことから、回転を加えることが外向きの熱移動を活発にしていると考えられる。また、回転を加えると、各計測点の温度の振れ幅が大きくなっていることが確認された。原因として考えられるのは、モータの回転によるノイズである。しかし、図 66、図 67 の温度ヒストグラムから、測定温度以外のピークが見られないことが分かる。回転の影響を受けず、適切に温度が測定できていると考えられる。

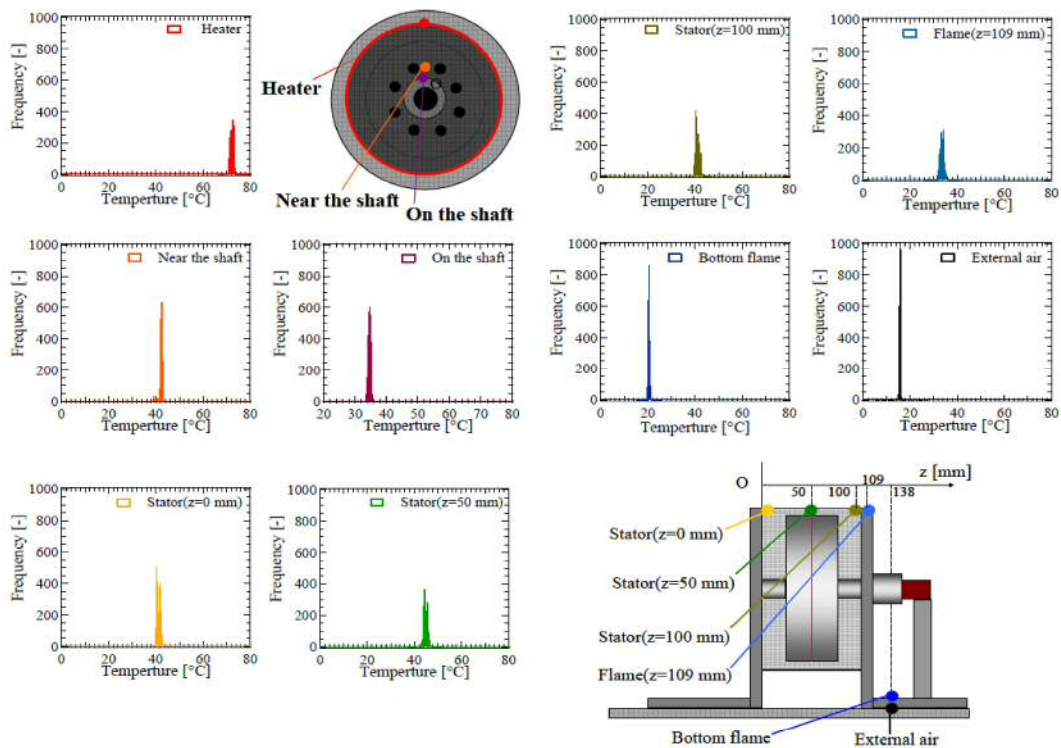


Fig 66: Temperature distribution around heat tester at $Q = 138.82W$, $f = 0Hz$

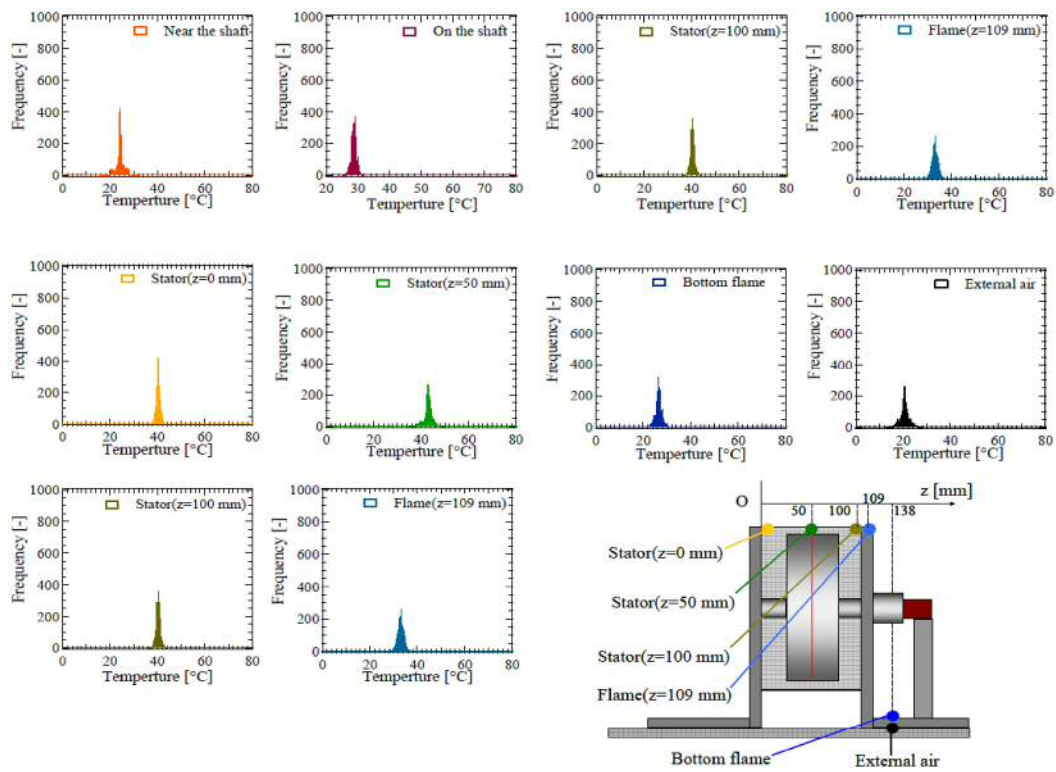


Fig 67: Temperature distribution around heat tester at $Q = 138.82W$, $f = 50Hz$

5.1.7 諸回転数に対する温度変化

図 68 に示すモデルでの温度計測点において、諸回転数に対する温度変化のグラフを、横軸が回転数、縦軸が温度として図 69 に示す。但し、ヒータの出力を 130 W とおいた。計測時間は 500 s、温度データロガーの時間分解能は 0.1 s であるので、各回転数において 5000 の温度データが得られる。先程の温度ヒストグラムから平均値および標準偏差を求めてから、各ヒータ入力および回転数における平均値をプロットし、エラーバーをつけている。図 69 より、ロータ

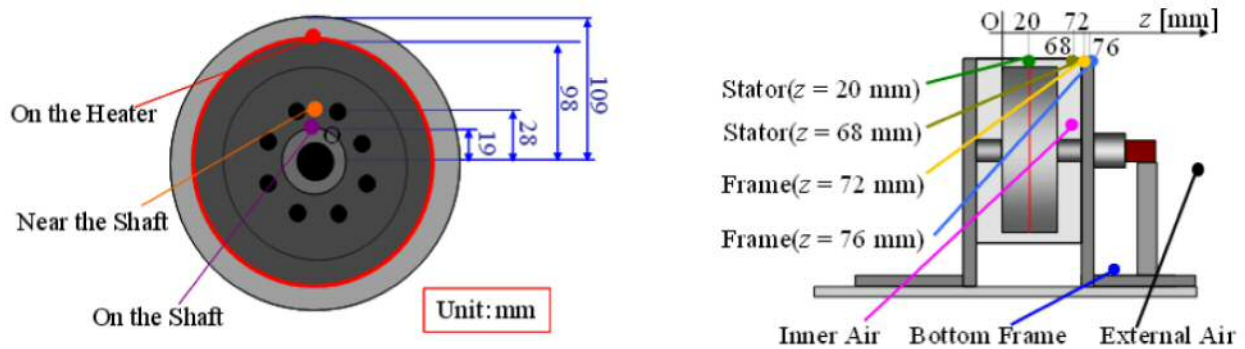


Fig 68: A model to test cooling system for EV motor.

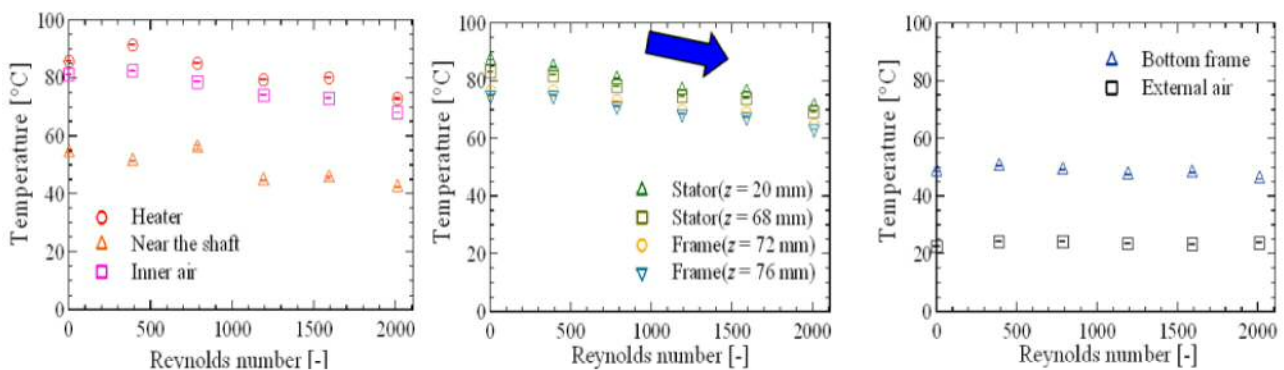


Fig 69: Comparison for temperature at $Q=130W$.

の回転数の上昇に応じて各部の温度は低下しながら外気温に近づいている様子が確認できる。図 69 の左側のグラフで $Re = 500$ 程度を境にロータ各部の温度が急激に低下していることは注目すべきである。これは図 20 の可視化実験で、ギャップ領域においてテイラー渦が生じるのが $Re = 500$ の周辺となっているため、流れ場と何らかの相関があると考えられる。一方、図 69 のその他のグラフではほぼ一様に温度が低下しているため、ステータやフレーム等ではギャップ領域ほどテイラー渦の影響を受けていないと言える。したがってギャップ領域における $Re = 500$ 近傍の温度の急激な変化は、熱流動解析における図 59 の結果との比較により、テイラー渦の生成による熱伝達率の急激な上昇に起因する可能性が大きい。

5.2 熱回路網計算

ここまで、各 부품の温度特性について調べてきたが、各部品間における伝熱特性について検討を行い、それぞれの部品間での具体的な伝熱の割合を考察する。

伝熱実験での課題として、部品間の繋ぎ目の伝熱特性の決め方などがある。すなわち、嵌め合いのある部品間や配線の繋ぎ目、コイルの巻かれている部分などではモデル化が複雑であり、物性値から推定する方法は適用が困難である。したがってこのような部分については実測、もしくは何らかの仮定に基づいて熱抵抗を見積もることを検討する。

伝熱の問題を扱う際、最終的に求めたいのは各部位の温度であるが、あらかじめ熱抵抗率を求めておく必要がある。伝熱現象を電気回路の問題で例えるならば、熱抵抗率は回路間のインピーダンスに等しく、電流、及び電圧に相当するものがそれぞれ熱流束と温度である。すなわち、電気回路ではインピーダンスを得てから電流や電圧といった出力を求めることが、伝熱現象では熱抵抗率から熱流束、及び、温度を得る作業と類似する。

熱抵抗の求め方には2通りが考えられる。一つは、部品間における熱移動量と温度勾配を特定の部分毎に得る方法であり、実測や物性値に基づいて決定する。二つ目の方法は、熱回路網から熱回路行列を構築して、必要最低限の熱抵抗率から他の熱抵抗率を推定するやり方であり、実験により熱抵抗率を測定することが困難な場合に有効である。本節では、以上二つの方法について、実例を挙げながら説明する。

5.2.1 熱抵抗値から温度を導出する方法

モータモデルにおいて、構成部品内部の温度分布まで注目した場合の熱回路網は図 70 のように書ける。このように一つの部品について幾つかのパーツに分解することで、部品内部で大きな温度勾配が存在している場合でも、それらを便宜上異なる部品として扱い詳細な温度分布に対応できる。しかしながら、一つの部品情報を平均化して表すことで十分な近似が成り立つことがあるため、図 70 のような詳細モデルは部品単位で熱伝導を求める等の目的に限り使用する。したがって、本研究における装置全体としての熱回路網には、手法の検討の意味もあり、図 71 のような部品単位を1接点とした構成とする。

モータ全体の熱流動において、図 71 のように系の境界における情報を把握しておくことは各部位の温度特性を知る上で必須の条件である。このような情報は個々の部品にとっての境界条件となるものであり、中間に位置する部品の物理量は全て一意的に決定されることが、以下で議論する熱的定常状態の系における基礎としている。定常の意味は、境界から一定の熱量を与えた際に、領域内部での温度や熱流速束等の熱力学的変数が時間的に一定な状態を指す。ここで、実際に発熱量等の入力条件から温度を推定したい場合には、 T_i を発熱量 Q と R_{ij} の関数として表す必要がある。

図 71 において、各部位に出入りする熱量は、エネルギー保存則、及び、回路網での閉ループ

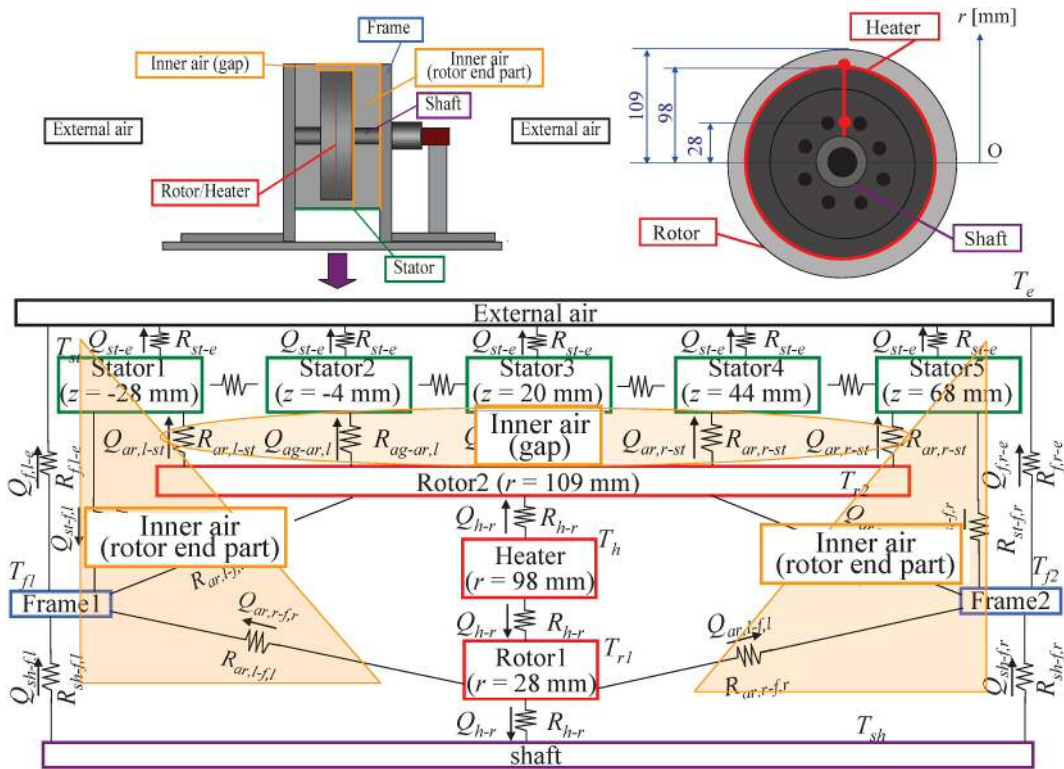


Fig 70: Heat circuit detailed model.

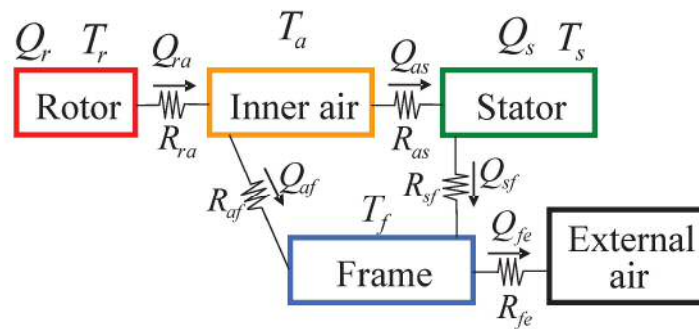


Fig 71: Heat circuit model.

における温度差の関係より,

$$\sum_{i,j=\text{total flux}} Q_{ij} = 0 \quad (52)$$

$$\sum_{i,j=\text{closed roop}} (T_i - T_j) = 0 \quad (53)$$

と書ける. T について R の関数として行列に表すには, 式 (52) に式 (6) を代入して, T について代数的に解けば良いが, 各項に異なる R 同士の成分が混ざり合うため扱いにくい. 以下のように, 式 (52) に基づいて T_i を発熱量 Q と R_{ij} の行列で示すと簡単化できる.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_{ra}} & -\frac{1}{R_{ra}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_{ra}} & \frac{1}{R_{ra}} - \frac{1}{R_{rs}} - \frac{1}{R_{rf}} & \frac{1}{R_{as}} & \frac{1}{R_{af}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_{as}} & -\frac{1}{R_{as}} - \frac{1}{R_{sf}} & \frac{1}{R_{sf}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_{af}} & \frac{1}{R_{sf}} & -\frac{1}{R_{af}} - \frac{1}{R_{sf}} - \frac{1}{R_{fe}} & \frac{1}{R_{fe}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_r \\ T_a \\ T_s \\ T_f \\ T_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_r \\ 0 \\ -Q_s \\ 0 \\ T_e \end{pmatrix} \quad (54)$$

T_e の項目は次元が一致しておらず不自然ではあるが, T を得るための便宜として考慮している. 式 (54) を T について解くことで

$$\begin{aligned} T_r &= Q_r R_{ra} - \frac{1}{R_{af} + R_{as} + R_{sf}} (-Q_r R_{af} R_{as} - Q_r R_{af} R_{fe} - Q_s R_{af} R_{fe} \\ &\quad - Q_r R_{as} R_{fe} - Q_s R_{as} R_{fe} - Q_r R_{af} R_{sf} - Q_s R_{af} R_{sf} \\ &\quad - Q_r R_{fe} R_{sf} - Q_s R_{af} R_{sf}) + T_e \\ T_a &= -\frac{1}{R_{af} + R_{as} + R_{sf}} (-Q_r R_{af} R_{as} - Q_r R_{af} R_{fe} - Q_s R_{af} R_{fe} \\ &\quad - Q_r R_{as} R_{fe} - Q_s R_{as} R_{fe} - Q_r R_{af} R_{sf} - Q_s R_{af} R_{sf} \\ &\quad - Q_r R_{fe} R_{sf} - Q_s R_{fe} R_{sf}) + T_e \\ T_s &= (Q_r + Q_s) R_{fe} + \left\{ \frac{Q_r R_{af}}{R_{af} + R_{as} + R_{sf}} + \frac{Q_s (R_{af} + R_{as})}{R_{af} + R_{as} + R_{sf}} \right\} R_{sf} + T_e \\ T_f &= (Q_r + Q_s) R_{fe} + T_e \end{aligned} \quad (55)$$

と記述できる. 式 (67) と式 (55) では, いずれにおいても T を部品上で平均化した値であるから, 温度分布が大きい場合には仮想的に部品を区切る必要がある. しかしながら, このような最適化は本研究の趣旨とは異なるため詳細は扱わない. 式 (55) より, 各 R_{ij} を知っておくことで, 出力が明確な場合に部品上の温度 T が一意的に定まることになる.

次に, 熱回路網への解析結果 R_{as} の適用として, 熱流動解析から得られた結果を用いることとする. 熱流体解析から得られた知見として, $Nu = 0.092(TaPr)^{1/3}$ を得ている. ここで, ヌセルト数 Nu を導入すると, ギャップ領域の熱伝達率を h , 熱伝導率を λ とおけば

$$\begin{aligned} Nu &= \frac{hd}{k}, \\ h &= \frac{\lambda}{d} Nu \end{aligned} \quad (56)$$

と書くことができる。いま、ギャップ領域を通過する熱流は Q_{as} と書けるので、ギャップ領域内部において、ロータ表面とステータ内周面上での温度差を ΔT_{as} とおくと、

$$Q_{as} = hS \Delta T_{as} \quad (57)$$

と表せる。但し、 S はステータ内側の表面積である。式 (56) を式 (57) に代入することで

$$Q_{as} = \frac{\lambda}{d} Nu S \Delta T_{as} \quad (58)$$

が得られる。すなわち、ロータが回転することで生じる Nu の変化に応じた熱流が式 (58) から導出できることが分かる。式 (6) と式 (58) を比較すると、熱抵抗率 R は

$$R = \frac{d}{\lambda Nu S} \quad (59)$$

となり、 R と Nu との関係が得られる。

式 (59) を基にして、実際に Nu から R を求める方法を述べる。 Nu の例として $Re = 1590$ の場合に注目すると、表 59 から $Nu/Pr^{1/3} = 2.2$ であることが分かる。ここでの R は図 71 における Ras と等しいため、 R を Ras に置き換えて Ras を解けばよい。ギャップ領域での温度 Ta は、ロータ表面から $d/2 = 0.0005$ における中間温度として $Ta = (Tr - Ts)/2$ を用いる (図 9 参照)。

空気では $\lambda = 0.0241$ となるので、ロータが静止時の熱抵抗を $Ras_{Re=0}$ とおくと、 $Re = 1590$ での熱抵抗 $Ras_{Re=1590}$ は、 $Pr = 0.7$ より以下のように表せる。

$$\begin{aligned} Ras_{Re=0} &= \frac{d/2}{\lambda S} = \frac{0.0005}{0.0241 \times 0.083} = 0.25[K/W], \\ Ras_{Re=1590} &= \frac{Ras_{Re=0}}{2.2 \times 0.7^{1/3}} = 0.13 \end{aligned} \quad (60)$$

ただし、 S はステータ内周の表面積を表し、 $S = 2\pi r_0 \times L = 2\pi 0.11 \times 0.12 = 0.083$ とおいた。

R_{sf} については、熱抵抗の実測値を用いることにする。ステータの軸長 L と金属の熱伝導率 λ から

$$\begin{aligned} R_{sf} &= \frac{L}{A\lambda_{Stator}} + R_g, \\ A &= \pi(0.115^2 - 0.11^2) = 0.00353[m^2], \\ L &= 0.05[m], \\ \lambda_{Stator} &= 44[W/mK] \end{aligned} \quad (61)$$

となる。但し、 λ_{Stator} はステータの熱伝導であり、 R_g はステータとフレーム間におけるギャップの熱抵抗である。実験内容として、図 72 に示す通り、ステータ上の $z=20, 50, 80, 90\text{mm}$ となる位置、及び、フレームの $z=101, 104, 107\text{mm}$ の位置における温度を測定する。これらの値から、ステータとフレームの丁度境目における温度変化を読み取り、 R_g を得ようというものである。実際に温度測定を行った結果は図 73 の通りである。図 73 により、熱抵抗 R_g を T_i

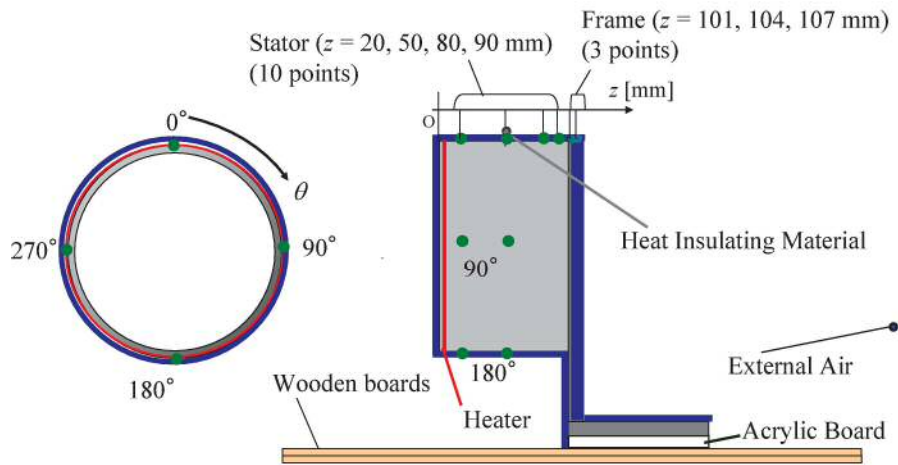


Fig 72: Example test of temperature gradient around stator.

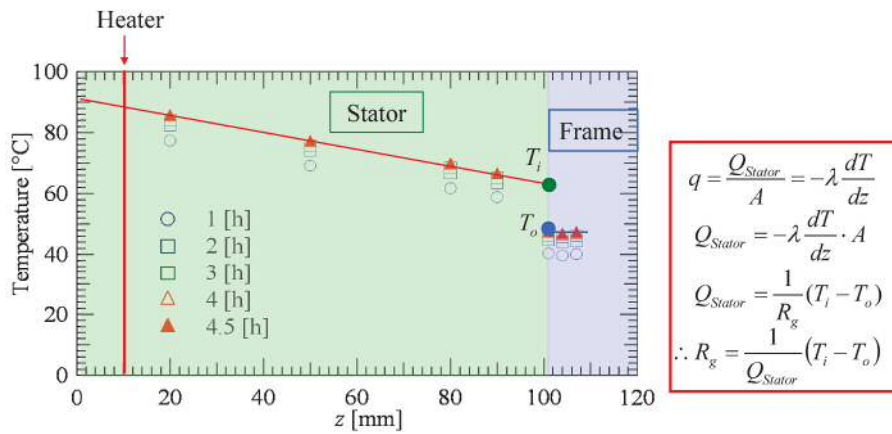


Fig 73: Result of temperature gradient around stator.

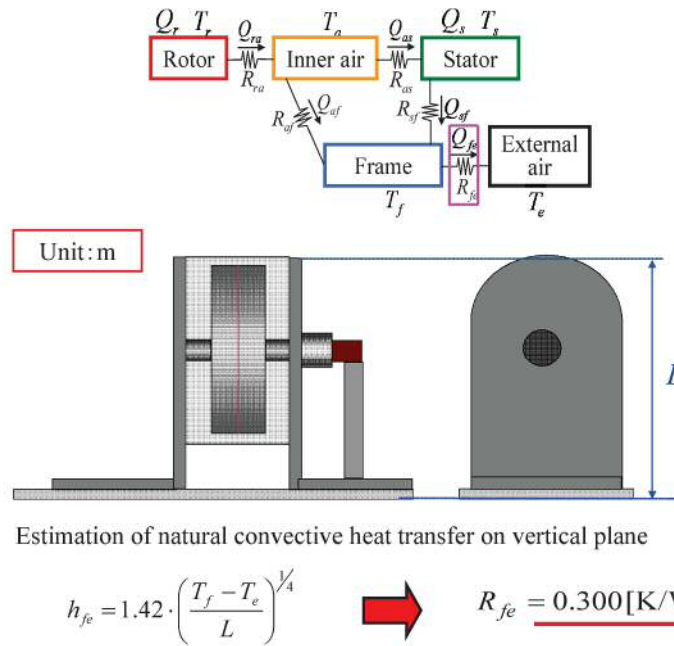


Fig 74: Derivation of R_{fe} .

と T_o から求めると、 $R_g = 0.614$ が得られる。式 (61) に代入することで、結局

$$R_{sf} = 0.322 + 0.614 = 0.936 \quad (62)$$

が得られる。

次に、 R_{ra} と R_{fe} について求める。 R_{ra} は、ギャップ領域の場合と同様の考え方で良いので、 R_{as} と同じとする。 R_{fe} については、図 74 に示すように、垂直平板における自然対流熱伝達の伝熱実験から得られた値を基に導出を行う。

最後に、 R_{af} については、これまでに求めてきた熱抵抗値を基にした結果と、測定で得られた結果を比較して妥当な値を推定する方法をとる。ここでは $Q=130\text{[W]}$ を例として実験を行った。図 75 より、 R_{af} の推定として $R_{af}=0.05$ が妥当であると判断できる。図 75 では、温度を各 R から求めているため、これまでの結果の検証とも言える。図 75 に示した通り、実測の温度を精度良く再現できていることが分かり、熱回路網の構築、及び、温度測定の妥当性が示されたと言える。

5.2.2 熱回路行列から熱抵抗値を導出する方法

ここでは、装置の温度を推定するもう一つの方法として、熱抵抗率 R_{ij} を代数的に求める方法について説明する。実際には、最低限の R_{ij} の情報を基に、実際のモデルでの T を測定することで系全体の R_{ij} を推定することを試みる。但し、熱回路網と実際のモデルが理想的な組み合わせの場合に成り立つ特別な関係であることを仮定した計算と言える。

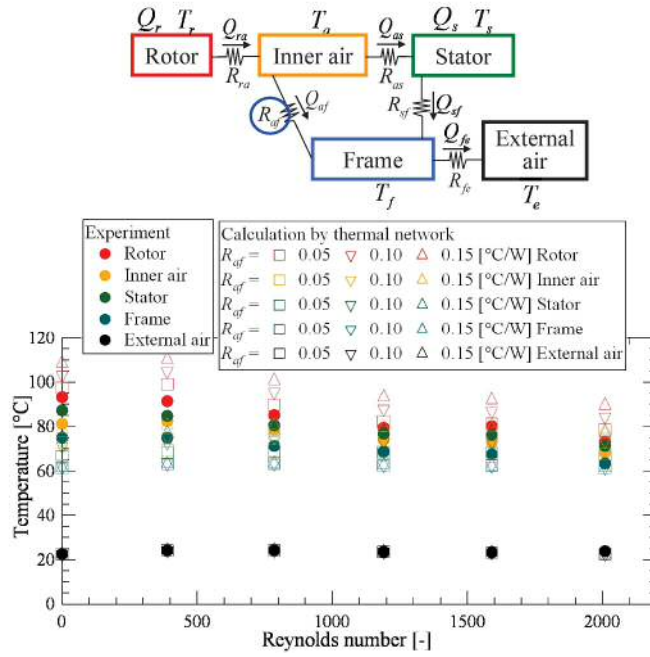


Fig 75: Example of R_{af} by experiment.

式 (52) を直接, 行列の形でまとめて書くと, モータモデル (図 6) では

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & R_{as} & -R_{af} & R_{sf} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{ra} \\ Q_{as} \\ Q_{af} \\ Q_{sf} \\ Q_{fe} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_r \\ 0 \\ 0 \\ -Q_s \\ 0 \end{pmatrix} \quad (63)$$

となる. 上式において, 左辺における行列の第 4 行までは (52) を, 左辺における行列の第 5 行が (53) の関係を表す. 更に (6) 式を代入すれば, 熱流 Q_{ij} は

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= \begin{pmatrix} (T_r - T_a)/R_{ra} \\ (T_a - T_s)/R_{af} \\ (T_a - T_e)/R_{as} \\ (T_s - T_f)/R_{sf} \\ (T_f - T_e)/R_{fe} \end{pmatrix} \\ &= M^{-1}\vec{u} \end{aligned} \quad (64)$$

と書くことができる。ただし、

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} Q_{ra} \\ Q_{as} \\ Q_{af} \\ Q_{sf} \\ Q_{fe} \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & R_{as} & -R_{af} & R_{sf} & 0 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} Q_r \\ 0 \\ 0 \\ -Q_s \\ 0 \end{pmatrix} \quad (65)$$

とおいた。

式 (64) における M は正則であり、逆行列を求めると

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{R_{af}}{R_{as}+R_{af}+R_{sf}} & -\frac{R_{af}}{R_{as}+R_{af}+R_{sf}} & \frac{R_{af}}{R_{as}+R_{af}+R_{sf}} & 0 & 0 \\ \frac{R_{as}+R_{sf}}{R_{as}+R_{af}+R_{sf}} & -\frac{R_{as}+R_{sf}}{R_{as}+R_{af}+R_{sf}} & \frac{R_{sf}}{R_{as}+R_{af}+R_{sf}} & 0 & 1 \\ \frac{R_{af}}{R_{as}+R_{af}+R_{sf}} & -\frac{R_{af}}{R_{as}+R_{af}+R_{sf}} & -\frac{R_{as}+R_{af}}{R_{as}+R_{af}+R_{sf}} & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (66)$$

と書ける。したがって式 (64) より

$$\begin{pmatrix} R_{ra} \\ R_{af} \\ R_{as} \\ R_{sf} \\ R_{fe} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (T_r - T_a)/(M^{-1}\vec{u})_1 \\ (T_a - T_f)/(M^{-1}\vec{u})_2 \\ (T_a - T_s)/(M^{-1}\vec{u})_3 \\ (T_s - T_f)/(M^{-1}\vec{u})_4 \\ (T_f - T_e)/(M^{-1}\vec{u})_5 \end{pmatrix} \quad (67)$$

となり全ての R_{ij} が得られることになる。ここで、 M^{-1} を解くに当たって、 R_{as} , R_{af} , R_{sf} の具体的な値を知るためにいずれか一つの値を外挿する必要が出てくる。すなわち、 R_{as} , R_{af} , R_{sf} の間には

$$\begin{aligned} Q_{ra} &= Q_{af} + Q_{as} \\ Q_{as} &= Q_{sf} \end{aligned} \quad (68)$$

より

$$\begin{aligned} \frac{T_r - T_a}{R_{ra}} &= \frac{T_a - T_f}{R_{af}} + \frac{T_a - T_s}{R_{as}} \\ \frac{T_a - T_s}{R_{as}} &= \frac{T_s - T_f}{R_{sf}} \end{aligned} \quad (69)$$

の2つの関係しか得られないためである。このように T を得ることで全経路について R_{ij} を逆算できない理由は、ある部品に対して複数の部品が接続している場合、図 76 に示すように、伝熱経路に並列部分が生じることになり、立てられる方程式に対して未知数が必ず一つ余計に増えてしまうことに起因する。

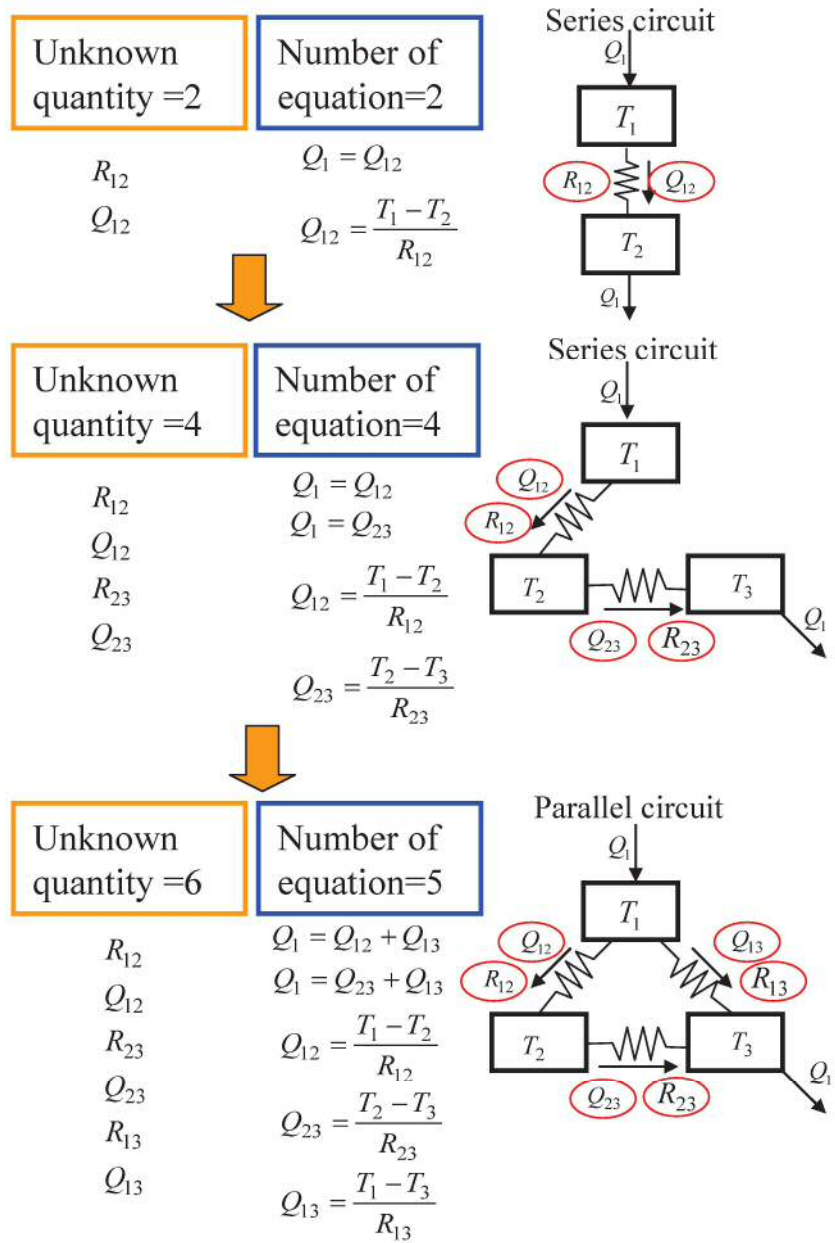


Fig 76: Schematic drawing of heat circuit including parallel node.

図 76 の 1 段目では、直列に接続された経路があり、未知数は R_{12} と Q_{12} の 2 つに対して、立てられる方程式の数も 2 つとなり解が得られることになる。2 段目の回路では、直列に接続された経路が 2 つあるが、こちらも同様にして未知数と方程式の数も等しく解は存在する。ところが、3 段目の回路では、物体 3 に物体 1 と物体 2 の 2 つが接続してあることで、未知数である熱抵抗が一度に 2 つ増えることになるが、方程式の数は 1 つしか増えることはなく解が得られない状態が生じる。そのため、このような並列の伝熱経路を持つ系においては、未知数を補う形であらかじめ該当部分での物理量を計測などで得ておく必要が出てくるのである。

R_{ij} を導出する過程が図 77 のようにまとめられる。

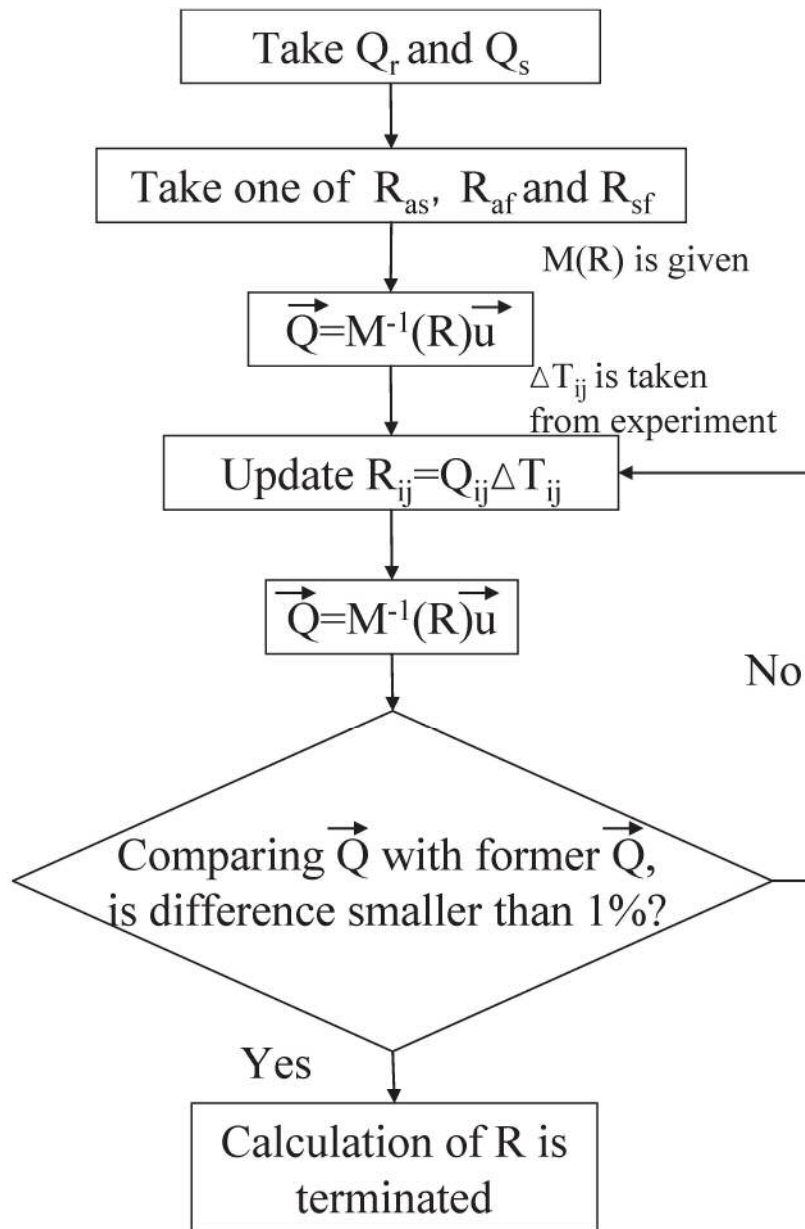


Fig 77: Flow for solving coefficient number R_{ij} .

$Re = 1590$ の場合では、図 69 から実験結果、式 (60) には R_{as} の外挿値を用いて熱回路網を解くことで、以下に示すようなモータモデルの冷却構造が得られる。

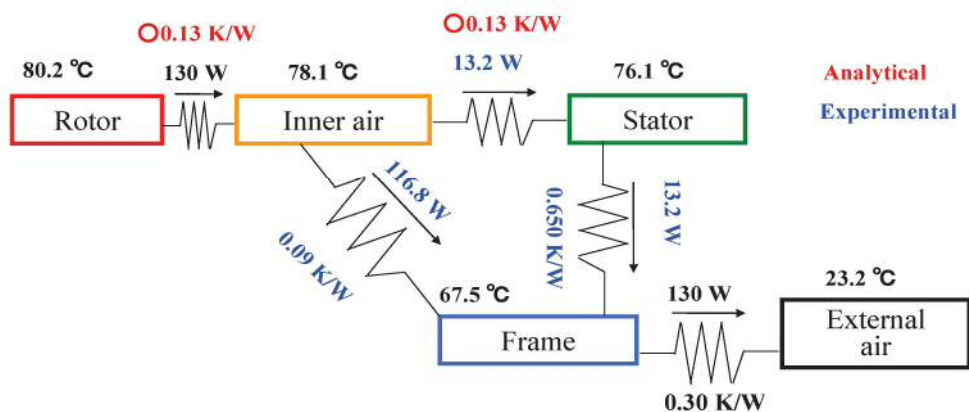


Fig 78: Temperature distribution and heat transfer relation at $Q = 130\text{ W}$, $Re = 1590$

式 (67) は形式的な熱低効率の表記と言える．実際には，直接に式 (67) を求めなくても，一部の伝熱量の関係から熱抵抗率の導出が可能となる．式 (69) に戻って R_{sf} を導出してみると，式 (60) を外挿することで， $T_a = 78.1$ ， $T_s = 76.1$ ， $T_f = 67.5$ を代入して $R_{sf} = 0.56$ を得る．同様にして， $R_{af} = 0.092$ ， $R_{as} = 0.13$ ， $R_{ra} = 0.016$ ， $R_{fe} = 0.34$ を得る．

以上より，ギャップ領域での熱抵抗値を解析した結果を温度計測に基づいた温度差の分布と共にモータ全体での熱回路網に代入することで，最終的に全ノードにおける熱抵抗値を求めたことになる．この結果を基に，式 (55) で得られた結果に熱抵抗値を代入することで外気温と発熱量から各部分の温度が推定可能となる．したがって，あらかじめ各部分の熱抵抗値が分からないような場合でも，本手法によれば，部分的に系を分解しないで各部品間の温度が推定できるようになったと言える．ここで，固体部分を熱伝導率や接触部分の熱抵抗などから推定する方法などを用いれば，モデルを作らないでも一定の温度推定ができると考えられる．

5.3 本章のまとめ

モータ構造において、熱回路網を構築することで効率良く系全体の伝熱構造を調べる方法について議論を行った。ここで、温度を推定するには2つの方法が考えられた。熱抵抗率と発熱の境界条件から温度を推定する方法、及び、熱回路網から、熱抵抗を未知数として最小限の熱抵抗を調べることで全熱抵抗を代数的に得ることで温度を推定するやり方である。いずれの方法も、最終的には温度を求めることに相異はないが、熱抵抗の求め方として実験的に得るか、代数的に得るかの違いがある。勿論、代数的に解ければ手軽ではあるが、それだけ元の測定値に精度が求められることと、部品に関して平均化された値であるためばらつきを考慮すべきと考えられる。したがって、どちらの方法を用いるかは状況により判断することが望ましく、実際に両者を比較してみたところ、オーダーの一致があるため、多角的な見方により精度を検証する上でも有効であると考えられる。

熱伝達率が精度良く解ける部分としては、ギャップ領域が挙げられる。この際、流れ場と Nu との相関について調べることができ、熱伝達に寄与する移流と熱伝導の関係も明らかとなった。その結果、壁面近傍では熱伝導が支配的なのに対して、壁面から離れるに従ってテイラー渦の生成が熱伝達に強く影響していることが確認された。熱伝達については $Ta > Ta_c$ において Nu が増大しており、 $Nu = 0.092(TaPr)^{1/3}$ に漸近することが分かった。 Nu 、及び、 P_r の合わせ込みにより流体の相違によらない扱いが可能である。ギャップ領域の幅は約 1 mm と狭いため実験で Nu を得ることは困難であるが、ギャップ領域の幅が更に大きな系において橘らが得た Nu と良く一致していたことは特筆すべきである。このようにして得られた Nu を基に熱抵抗 R を算出して熱回路網に適用することで、実験では困難であったギャップ領域の熱伝達率が導出された。これから、熱回路網を構築する際に、必要に応じて熱抵抗の解析値を用いることで実験を精度良く再現できることが確認できた。

6 結言

EV モータの除熱構造を得るため、はじめにギャップ領域とロータ端部での流動構造について調べた。流動の可視化を行うために、EV モータ構造を模擬した二重円筒モデルを作成して、同心二重円筒内の流動特性を明らかにした。可視化には、キャリオスコープ粒子を用いたロータ円筒面およびステータ端面の流動可視化、ギャップとロータ端部での境界で移動する粒子の可視化を行い、実験と同等の条件の流れ場を数値解析で再現したところ以下の知見を得た。ギャップ領域では、キャリオスコープ粒子の観測により $Re=500$ 程度において約 20 個の筋模様が観測され、このとき数値解析によれば約 40 個の渦が生じており、過去の知見などからこのような渦はテイラー渦であると考えられる。更に Re を上げていくと筋模様は複雑な揺動を伴いながら増大することが分かった。また、 $Re > Re_c$ において、ギャップ領域の両サイド S_z が出入り条件の場合には slip 条件の場合に比較して発生するテイラー渦は約半分となり、境界条件が流れ場に強い影響を与えることが分かった。更に、隙間およびロータ端面とステータ端面間領域における境界部分を通過するような粒子が観測されており、 Re が増加するにつれ、境界部分を通過する回数は増加することが分かった。

流れ場の詳細な情報を得るため数値解析を行ったところ解析による特別な手段として、テイラー渦の発生具合を渦度の分布構造から調べることを有効であることが示された。一方、ロータ端部では縞状の筋が実験で観測されており、数値解析によってこのような模様は渦であることが分かった。また、このような渦の間隔は Re の上昇に伴って細くなることが観測されているが、NS 方程式を Lagrange 形式によって調べることによりエクマン流れの一種であることが分かり、渦の幅はロータ回転数に反比例することが確認された。

伝熱解析において、あらかじめ熱抵抗率を求めておいて、境界条件から温度を推定する方法と、熱回路行列を利用して必要最低限の熱抵抗率から他の熱抵抗値を推定する方法を学んだ。どちらの方法を選択するかは必要な精度等で判断すれば良く、高い精度が必要な場合、もしくは温度勾配等の実験が十分可能な場合は前者を用いれば良い。後者の方法では、部品毎の実験が困難な場合に熱回路行列を構成しておき、系全体における必要な温度分布を得られれば、一部の熱低効率から効率的に系全体の熱抵抗率が得られることが分かった。実際に実験の困難なケースもあるため、最小限度の解析だけで全体の伝熱特性を得られることは特筆すべきである。更に、流体の寄与として熱流動解析から得られたギャップ領域の熱抵抗率 Ras の結果を熱回路網に用いることで、モータにおける流動と熱抵抗の関係を得られることが分かった。この結果を元に、出力等の境界条件を熱回路網に設定して各部の温度を推定することが可能となると同時に、熱伝達に寄与する詳細な流動構造が得られる。したがって、モータにおける本質的な除熱構造のしくみについて理解する手段を得られたと言える。

実験が困難なギャップ領域の熱抵抗については、解析値を用いることで、実験に代わる検証が可能となったと言える。すなわち、ギャップ領域の熱抵抗を解析することで、熱流は $Nu = 0.092(TaPr)^{1/3}$ に従ってギャップ内を通過することが分かり、過去の熱伝達の実験と良く一致することから、ギャップ領域の詳細な物理量については流動解析に頼ることが可能となった。ここで、流動解析の結果によると、テイラー渦に起因する複雑な流動場が生じている点と、熱は移流に乗って移動することから、このような熱流動の現象はテイラー渦に起因するものである

ことが推測できる。したがって、実機への伝熱解析の応用として、モータの回転数や出力等の境界条件から決まる温度と、ギャップ領域等の局所的な状況との対応が付けられることになる。以上により、本研究の結果を用いることで、これまで困難であった実機での伝熱設計に対して、有効な解析手段及び、温度推定方法を得られたと結論できる。

Appendix

A 熱伝導方程式の一般形

流体は非圧縮性の仮定が成り立つとして，図 79 に示すように，流体中に発熱量 $Q[\text{W}]$ の熱源があるとする．ここで，流体中の任意の位置における熱伝導に起因する熱流束密度 $\vec{q}_A[\text{W}/\text{m}^2]$

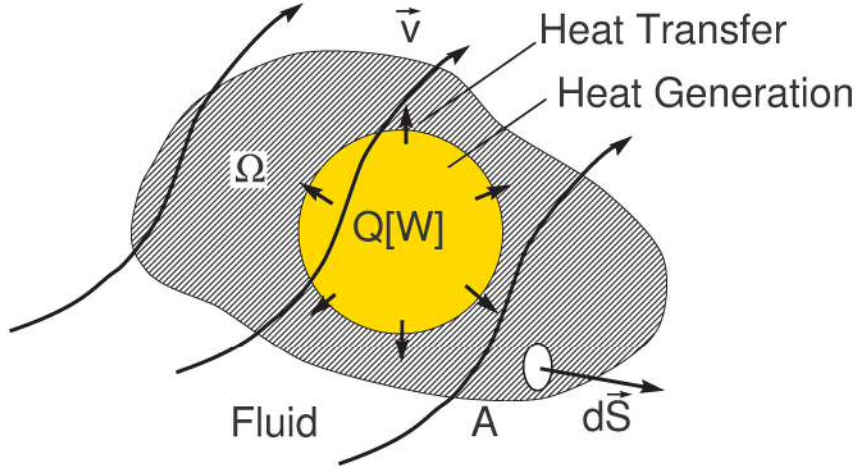


Fig 79: Region within fluid including heat generator which yield heat transfer.

は，温度勾配に比例すると仮定して

$$\vec{q}_A = -\lambda \vec{\nabla} T \quad (\text{A.1})$$

と書ける．但し，右辺に負号が付いているのは，熱エネルギーは高温側から低温側に移動する経験則（エントロピー増大の法則）に基づく．また， λ は熱伝導率 $[\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})]$ であり， $\vec{\nabla}$ はベクトル微分 $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ を表す．式 (A.1) は熱伝導に関するフーリエの法則と言われる．

次に，式 (A.1) を用いて本研究で重要な伝熱の基礎方程式について導く．密度 ρ の流体中で発熱量 Q の熱源を含む任意の領域 Ω について考える． Ω の表面を A とおき， A 上で有限な流れ場 \vec{v} が存在するとき，領域 Ω における内部エネルギーの変化は， A を横切る熱流束密度 $\rho C_p \vec{v} T + \vec{q}_A[\text{W}/\text{m}^2]$ と Q の和で表されるため

$$\begin{aligned} \rho C_p \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} d^3x T &= - \int_A d\vec{S} \cdot (\rho C_p \vec{v} T + \vec{q}_A) + Q \\ &= - \int_A d\vec{S} \cdot (\rho C_p \vec{v} T - \lambda \vec{\nabla} T) + \int_{\Omega} d^3x q \\ &= - \int_{\Omega} d^3x (\rho C_p \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T - \lambda \vec{\nabla}^2 T) + \int_{\Omega} d^3x q \\ 0 &= \int_{\Omega} d^3x \left(-\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \rho C_p \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T + \lambda \vec{\nabla}^2 T + q \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

を得る。但し、右辺の表面積分における負号は $d\vec{S}$ が領域の外側を向くようにとっているためであり、 q は発熱密度 [W/m^3] で $\int_{\Omega} d^3x q = Q$ と書ける。また、 C_p は定圧比熱 [$\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$] を表しており、右辺第3行の変形ではガウスの積分定理、及び、非圧縮性流体における連続の式 (A.18) を用いた。式 (A.2) は流体中の任意の領域について成り立つから、結局

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\rho C_p \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T + \lambda \nabla^2 T + q \quad (\text{A.3})$$

と表せる。

B Navier-Stokes 方程式

この章の目的は、流体の従う運動方程式を導出することである。そのために、流体の運動を記述する方法をあらかじめ知っておく必要がある。流体の運動を記述するには、以下で示すような Lagrange の方法と Euler の方法の2種類が考えられる。

B.1 Lagrange の方法

Lagrange の方法とは、個々の流体粒子を追うことで流れ場を表す方法である。たとえば、時刻 $t = 0$ に位置 \vec{x}_0 にいた流体粒子が時刻 t のときにいる位置 \vec{x}_t は

$$\vec{x}_t = \vec{x}(\vec{x}_0, t) \quad (\text{A.4})$$

で与えられる。但し、 $\vec{x}(\vec{x}_0, t)$ は流体粒子の従う運動方程式を $t = 0$ に位置 \vec{x}_0 にいるという初期条件で解いた解である。

Lagrange の見方では、流体の運動を初期位置 \vec{x}_0 でラベル付けされた流体粒子を通して記述する。そのような粒子から物理量（速度や密度など） F を観測したとき、 F は

$$F = F_L(\vec{x}_0, t) \quad (\text{A.5})$$

と表される (図 80)。但し、 F_L は \vec{x}_0 と t を引数として物理量 F を与える関数である。

流体粒子に注目した時間微分を Lagrange 微分と呼び、 D/Dt で表す。 \vec{x}_0 と t は独立変数なので、 F_L の Lagrange 微分は

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} F_L(\vec{x}_0, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \{F_L(\vec{x}_0, t + \Delta t) - F_L(\vec{x}_0, t)\} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} F_L(\vec{x}_0, t) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

と書ける。

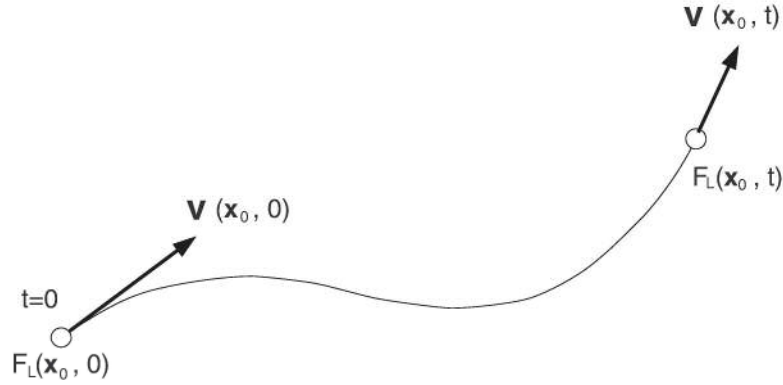


Fig 80: 流体粒子の軌跡を表す曲線と，流体粒子から見た物理量 $F = F_L(\vec{x}_0, t)$. 但し，速度 $\vec{v} = \partial\vec{x}/\partial t$ は F の特別な場合である．流れが定常のとき，曲線は後で示す流線と一致する．全ての流体粒子について F_L を求めれば流れ場が完全に分かる．

B.1.1 Euler の方法

流体の運動を，時間的に一定な場所（格子点など）で得た F によって記述する方法を Euler の方法と呼ぶ．このときの F は，

$$F = F_E(\vec{x}, t) \quad (\text{A.7})$$

と表される．但し， F_E は \vec{x} と t を引数として物理量 F を与える関数である．

Lagrange の方法より， $t = 0$ で \vec{x}_0 にいた流体粒子は t 秒後に位置 $\vec{x}(\vec{x}_0, t)$ に移るので，その場所での F は

$$F = F_E(\vec{x}(\vec{x}_0, t), t) \quad (\text{A.8})$$

と書ける．したがって，Euler の見方では Lagrange 微分は

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} F_E(\vec{x}(\vec{x}_0, t), t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \{F_E(\vec{x}(\vec{x}_0, t + \Delta t), t + \Delta t) - F_E(\vec{x}(\vec{x}_0, t), t)\} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \Delta t \vec{v} \cdot \vec{\nabla} F_E(\vec{x}(\vec{x}_0, t), t) - \Delta t \frac{\partial}{\partial t} F_E(\vec{x}(\vec{x}_0, t), t) \right\} \\ &= \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} + \frac{\partial}{\partial t} \right) F_E(\vec{x}(\vec{x}_0, t), t) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

となる．但し， $\vec{v} = \partial\vec{x}/\partial t$ である．

Lagrange の方法と Euler の方法では F の見方が異なるが，参照点が同じであればそれぞれの F が等しく

$$F_L(\vec{x}_0, t) = F_E(\vec{x}(\vec{x}_0, t), t) \quad (\text{A.10})$$

と表される．

B.1.2 Lagrangeの方法とEulerの方法の直感的なイメージ

つくば市（茨城県）の市民の行動の記録をとることを考える．記録のとり方は2通り考えられる．1つは、全てのつくば市民に、自分と、その周りの市民の行動を記録させる方法である．これを、 $t=0$ で一斉に始めて時刻 t で終わらせる場合、 t 秒間のつくば市民の行動が全て記録できることになる(図81)．流体粒子をつくば市民にたとえると、この方法は流体力学では流体粒子の運動をLagrangeの方法で記述することに対応する．

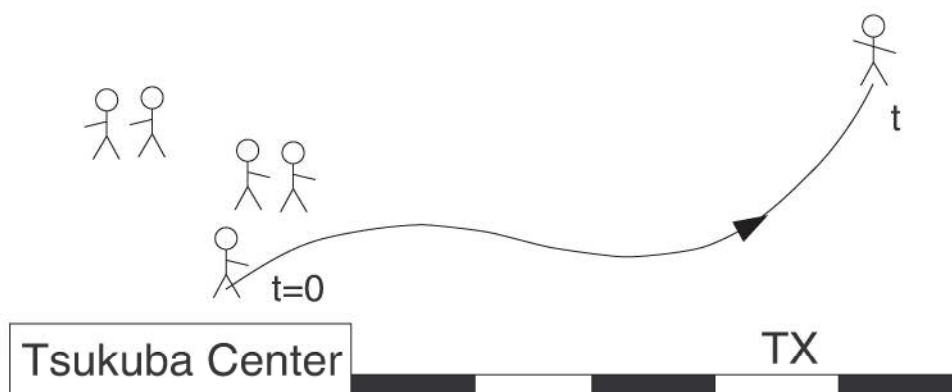


Fig 81: $t=0$ で位置 \mathbf{x}_0 にいるつくば市民は、時刻 t で $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ に移動する．その間に、自分と近くのつくば市民の行動を記録させる．このような行為を全ての市民について行わせれば、 t 秒間のつくば市民の行動を余すところなく把握できる．

もう1つの方法は、つくば市の至る所に監視員を配置し、彼らの周辺にいるつくば市民の行動を記録させるやり方である．ここで、監視員以外のつくば市民は、いずれかの監視員に常に見られており、監視員の存在が市民の行動を左右しないものとする(図82)．このような調査を、前と同様に $t=0$ から時刻 t まで一斉に行ったとすると、 t 秒間のつくば市民の全ての行動の記録が得られることになる．流体力学ではこのような記述の方法はEulerの方法に対応する．

これら2つの方法を同時に実行すると、記録の取り方が異なるにも関わらず、それぞれの方法で取った t 秒間のつくば市民の行動のデータは互いに一致する．これは式(A.10)に対応している．

B.2 質量の保存則

流体中に、流れと共に動く領域 $\Omega(t)$ を考える(図83)．流体粒子の質量を m 、 $\Omega(t)$ 内の流体粒子の数を $N_{\Omega(t)}$ とすると、 $\Omega(t)$ 内の流体粒子の総質量は

$$M_{\Omega(t)} = mN_{\Omega(t)} \tag{A.11}$$

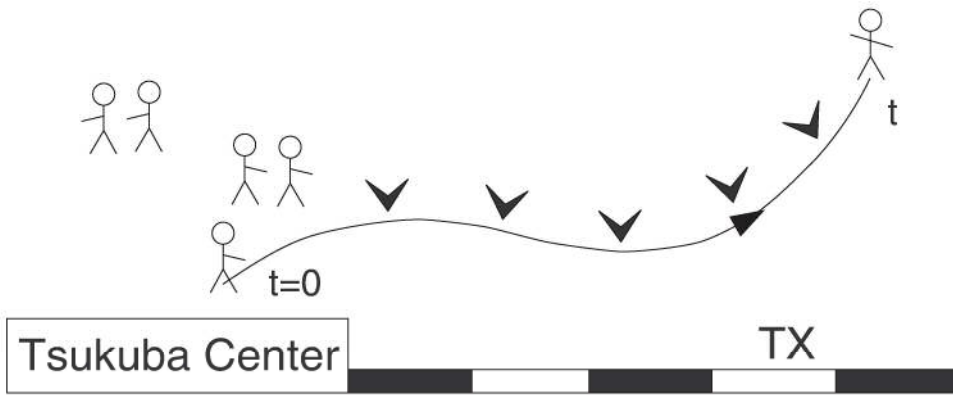


Fig 82: つくば市民の行動を監視員 (チェックの部分) に記録させる例.

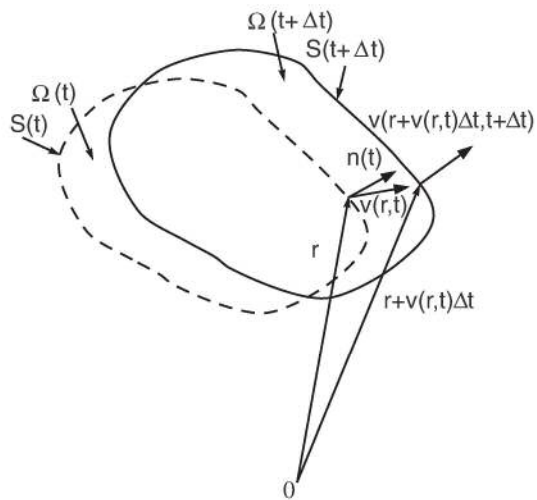


Fig 83: 流体中の、流れと共に変化する領域 $\Omega(t)$. $S(t)$ はその境界を表す.

で与えられる。 $\Omega(t)$ は時間と共に流れに乗って変形するが、内部の粒子数は不変である。したがって

$$\frac{d}{dt}M_{\Omega(t)} = \frac{d}{dt}(mN_{\Omega(t)}) = 0 \quad (\text{A.12})$$

が成り立つ*2。

$M_{\Omega(t)}$ は、流体の質量密度 $\rho(\vec{r}, t)$ を用いて

$$M_{\Omega(t)} = \int_{\Omega(t)} d^3r \rho(\vec{r}, t) \quad (\text{A.13})$$

と表されるので、式(A.12)は

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} d^3r \rho(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{A.14})$$

となる。式(A.14)の左辺は

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} d^3r \rho(\vec{r}, t) = \int_{\Omega(t)} d^3r \left(\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)) \right) \quad (\text{A.15})$$

と変形できるので (Appendix B.4), 式(A.14)は

$$\int_{\Omega(t)} d^3r \left(\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)) \right) = 0 \quad (\text{A.16})$$

と変形される。式(A.16)は任意の領域 $\Omega(t)$ について成り立たなければならないので、被積分関数が0、すなわち

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)) = 0 \quad (\text{A.17})$$

を得る。但し、 $\vec{v}(\vec{r}, t)$ は、時刻 t における位置 \vec{r} の速度場を表す。式(A.17)は連続の式と呼ばれる。流体が非圧縮性の場合は $\rho(\vec{r}, t)$ が一定なので、式(A.17)の $\rho(\vec{r}, t)$ に関する微分項が消え

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{A.18})$$

と書ける。

B.2.1 運動量の保存則

ニュートンの法則によれば、単位時間当たりの運動量の変化量は、その物体に働く力と与えられる。領域 $\Omega(t)$ 内にある流体が持つ運動量の α 成分 $P_{\Omega(t), \alpha}$ は、 ρ を用いて

$$P_{\Omega(t), \alpha}(t) = \int_{\Omega(t)} d^3r \rho(\vec{r}, t) v_{\alpha}(\vec{r}, t) \quad (\text{A.19})$$

*2たとえば、川面に浮かべたロープの輪とその中に浮かぶ木の葉を想像すればよい。このとき、ロープと木の葉は流れと共に動いている。輪の内部の木の葉は、輪の外部に出ることはないので、その数は時間的に一定である。

と表せる．領域 $\Omega(t)$ に作用する力を $F_\alpha(t)$ とすると，この領域内の流体が満たすニュートンの運動方程式は

$$\frac{d}{dt}P_{\Omega(t),\alpha}(t) = F_\alpha(t) \quad (\text{A.20})$$

で与えられる．

$F_\alpha(t)$ は，領域 $\Omega(t)$ の表面 $S(t)$ を介して作用する表面力と，領域内に直接作用する体積力の和

$$F_\alpha(t) = \int_{S(t)} d^2r n_\beta \tau_{\alpha\beta} + \int_{\Omega(t)} d^3r \rho f_\alpha \quad (\text{A.21})$$

で与えられる．但し， \vec{n} は $S(t)$ における長さ 1 の法線ベクトル， $\tau_{\alpha\beta}$ は応力テンソル， f_α は流体の単位質量あたりに働く力を表す．また，同じ添え字が続く場合は成分について和をとるものとし，アインシュタインの規約と呼ばれる．また，簡略化のため引数 (\vec{r}, t) を省略しており，特に混乱のない限り以下でも同様とする．一様等方性ニュートン流体の場合， $\tau_{\alpha\beta}$ は，

$$\tau_{\alpha\beta} = -p\delta_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.22})$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \mu \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right) + \zeta \frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma} \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{A.23})$$

で与えられる (Appendix B.6)．但し， p は静圧， μ は粘性率， ζ は第 2 粘性率である．

式 (A.19)，式 (A.21) を式 (A.20) に代入すると

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} d^3r \rho v_\alpha = \int_{S(t)} d^2r n_\beta \tau_{\alpha\beta} + \int_{\Omega(t)} d^3r \rho f_\alpha \quad (\text{A.24})$$

が得られる．ここで，式 (A.24) の左辺は

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} d^3r \rho v_\alpha = \int_{\Omega(t)} d^3r \left\{ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_\beta}(v_\beta v_\alpha \rho) \right\} \quad (\text{A.25})$$

と変形できる (Appendix B.5) ので，式 (A.24) は

$$\int_{\Omega(t)} d^3r \left\{ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_\beta}(\rho v_\beta v_\alpha) - \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \rho f_\alpha \right\} = 0 \quad (\text{A.26})$$

となる．但し，ガウスの定理を用い

$$\int_{S(t)} d^2r n_\beta \tau_{\alpha\beta} = \int_{\Omega(t)} d^3r \frac{\partial}{\partial x_\beta} \tau_{\alpha\beta} \quad (\text{A.27})$$

の変形を行った．式 (A.26) は任意の領域 $\Omega(t)$ について成り立たなければならないので，被積分関数が 0，すなわち

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_\beta}(\rho v_\beta v_\alpha) - \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \rho f_\alpha = 0 \quad (\text{A.28})$$

を得る。流体が非圧縮性の場合，連続の式 (A.18) を考慮すると式 (A.28) は

$$\rho \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + \rho v_\beta \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \rho f_\alpha \quad (\text{A.29})$$

と変形できる。これに式 (A.22)，式 (A.23) を代入すると

$$\rho \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + \rho v_\beta \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} = -\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \mu \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x_\beta^2} + \rho f_\alpha \quad (\text{A.30})$$

となる。式 (A.30) は Navier-Stokes 方程式 (NS 方程式) と呼ばれる。粘性がない場合、すなわち $\mu = \zeta = 0$ のとき式 (A.30) は

$$\rho \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + \rho v_\beta \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} = -\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \rho f_\alpha \quad (\text{A.31})$$

となる。式 (A.31) は Euler 方程式と呼ばれる。

式 (A.30) の添え字表記をベクトル表記に変更すると

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \rho \vec{f} \quad (\text{A.32})$$

と書ける。

B.3 円柱座標系の NS 方程式

式 (A.32) を円柱座標で書くことを考える。円柱座標系では座標変数を (r, θ, z) で表すが，直交座標系 (x, y, z) との対応は，図 84 に示すように

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta = y/x \\ z = z \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

と表せる。したがって，直交座標系と円柱座標系での微分係数の対応は，式 (A.33) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

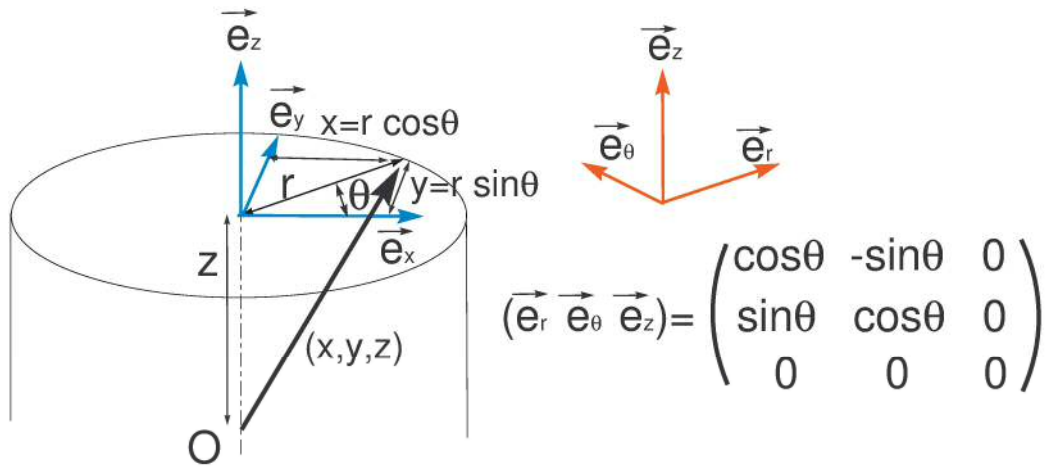


Fig 84: The relation between orthogonal coordinate and cylindrical coordinate.

となる．一方，円柱座標系では基底ベクトルが $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \rightarrow (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ と変換される為，ベクトルの物理量 \vec{f} は座標変換により

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_r \cos\theta - f_\theta \sin\theta \\ f_r \sin\theta + f_\theta \cos\theta \\ f_z \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{A.35}$$

と書ける。更に、基底ベクトル $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ は微分可能で、以下のように変形することに注意されたい。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \end{pmatrix} &= \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \end{pmatrix}, \\
\frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \end{pmatrix} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \vec{e}_\theta & -\vec{e}_r & 0 \end{pmatrix}, \\
\frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \end{pmatrix} &= \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A.36}$$

すなわち、基底ベクトルは θ 成分で微分することで向きが変わる。

移流項の微分演算子 $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})$ を計算するには、式 (A.35) における \vec{f} を \vec{v} に置き換えて

$$\begin{aligned}
&\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \\
&= (v_x, v_y, v_z) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \\
&= (v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta, v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta, v_z) \begin{pmatrix} \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \\
&= (v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta) \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + (v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta) \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + v_z \frac{\partial}{\partial z} \\
&= v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned} \tag{A.37}$$

を得る．これから， $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ は

$$\begin{aligned}
(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} &= \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left[\begin{pmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} \right] \\
&= \left[\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \begin{pmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \end{pmatrix} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} \\
&= \left[\left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \end{pmatrix} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{v_\theta}{r} \vec{e}_\theta & -\frac{v_\theta}{r} \vec{e}_r & \vec{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_r \\ \left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_\theta \\ \left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{v_\theta}{r} & 0 \\ \frac{v_\theta}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_r \\ \left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_\theta \\ \left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{v_\theta^2}{r} + \left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_r \\ \frac{v_\theta v_r}{r} + \left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_\theta \\ \left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_z \end{pmatrix} \tag{A.38}
\end{aligned}$$

と表せる．式 (A.38) は，基底を一旦，円柱座標から直交座標に直してから，基底を含めた変形を行い，再度，円柱座標としての成分表示に直している．このような複雑な手続きが必要となるのは，元々の NS 方程式が直交座標で定義されたものであり，円柱座標の基底のままでは異なる成分間のやり取りについて，正しい計算ができない為である．

一方，ラプラシアン $\vec{\nabla}^2$ は

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}^2 &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \\
&= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{A.39}
\end{aligned}$$

と表される． $\vec{\nabla}^2 v$ も式 (A.38) と同様にして

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}^2 \vec{v} &= \vec{\nabla}^2 \left[\begin{pmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} \right] \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left[\begin{pmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[\begin{pmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_r \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_\theta \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_z \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r^2} \left(-\vec{e}_r + 2\vec{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \vec{e}_\theta - 2\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \vec{0} \right) \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} v_r \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} v_\theta \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} v_z \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_r \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_\theta \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{r^2} & -2\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 2\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\nabla}^2 v_r \\ \vec{\nabla}^2 v_\theta \\ \vec{\nabla}^2 v_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{v_r}{r^2} - 2\frac{1}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \vec{\nabla}^2 v_r \\ -\frac{v_\theta}{r^2} + 2\frac{1}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \vec{\nabla}^2 v_\theta \\ \vec{\nabla}^2 v_z \end{pmatrix} \tag{A.40}
\end{aligned}$$

と書ける．但し，式 (A.40) の第3行目では θ 成分の微分だけ基底ベクトルを変換させるため，項を分けて記述した．式 (A.38) 及び式 (A.40) を式 (A.32) に代入して，円柱座標の基底成分に注目することで，直ちに

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\vec{\nabla}^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{v_\theta^2}{r}, \\
\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\vec{\nabla}^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) - \frac{v_\theta v_r}{r}, \\
\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \vec{\nabla}^2 v_z \tag{A.41}
\end{aligned}$$

が得られる．式 (A.41) は円柱座標系での NS 方程式である．

B.4 $\Omega(t)$ 内の質量の時間微分 (式 (A.15) 参照)

式 (A.15) の左辺は

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} d^3r \rho(\vec{r}, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{\Omega(t+\Delta t)} d^3r \rho(\vec{r}, t + \Delta t) - \int_{\Omega(t)} d^3r \rho(\vec{r}, t) \right\} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{\Omega(t)} d^3r \rho(\vec{r}, t + \Delta t) - \int_{\Omega(t)} d^3r \rho(\vec{r}, t) \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_{\Omega(t+\Delta t)} - \int_{\Omega(t)} \right) d^3r \rho(\vec{r}, t + \Delta t) \right\} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{\Omega(t)} d^3r \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} \Delta t + \left(\int_{\Omega(t+\Delta t)} - \int_{\Omega(t)} \right) d^3r \rho(\vec{r}, t) \right\} \\
&= \int_{\Omega(t)} d^3r \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{\Omega(t+\Delta t)} - \int_{\Omega(t)} \right) d^3r \rho(\vec{r}, t) \quad (\text{A.42})
\end{aligned}$$

と変形できる。但し、 Δt の 2 次以上の項は無視した。体積積分を面積分に直し、領域の境界 S について積分を行うと

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega(t+\Delta t)} - \int_{\Omega(t)} \right) d^3r \rho(\vec{r}, t) &= \int_{S(t)} d^2r n_\beta \rho(\vec{r}, t) v_\beta(\vec{r}, t) \Delta t \\
&= \int_{\Omega(t)} d^3r \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\rho(\vec{r}, t) v_\beta(\vec{r}, t)) \Delta t. \quad (\text{A.43})
\end{aligned}$$

但し、 \vec{n} は境界における単位長さの法線ベクトル、 \vec{v} は流速である。式 (A.42)、式 (A.43) より

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} d^3r \rho(\vec{r}, t) = \int_{\Omega(t)} d^3r \left\{ \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\rho(\vec{r}, t) v_\beta(\vec{r}, t)) \right\} \quad (\text{A.44})$$

が得られる。

B.5 $\Omega(t)$ 内の運動量の時間微分 (式 (A.24) 参照)

式 (A.24) 式は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} d^3r \rho(\vec{r}, t) v_\alpha(\vec{r}, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{\Omega(t+\Delta t)} d^3r \rho(\vec{r}, t + \Delta t) v_\alpha(\vec{r}, t + \Delta t) - \int_{\Omega(t)} d^3r \rho(\vec{r}, t) v_\alpha(\vec{r}, t) \right\} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{\Omega(t)} d^3r \rho(\vec{r}, t + \Delta t) v_\alpha(\vec{r}, t + \Delta t) \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_{\Omega(t+\Delta t)} - \int_{\Omega(t)} \right) d^3r \rho(\vec{r}, t + \Delta t) v_\alpha(\vec{r}, t + \Delta t) - \int_{\Omega(t)} d^3r \rho(\vec{r}, t) v_\alpha(\vec{r}, t) \right\} \\
&= \int_{S(t)} d^2r n_\beta v_\beta(\vec{r}, t) \rho(\vec{r}, t) v_\alpha(\vec{r}, t) + \int_{\Omega(t)} d^3r \frac{\partial}{\partial t} (\rho(\vec{r}, t) v_\alpha(\vec{r}, t)) \\
&= \int_{\Omega(t)} d^3r \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\beta} (v_\beta(\vec{r}, t) \rho(\vec{r}, t) v_\alpha(\vec{r}, t)) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho(\vec{r}, t) v_\alpha(\vec{r}, t)) \right\} \quad (\text{A.45})
\end{aligned}$$

B.6 応力テンソル

流体に働く力を考える．物理現象に現れる重力，遠心力などの力は，その大きさが物質の体積又は質量に比例しているため，これを体積力という．体積力が流体に働く場合，体積要素 d^3r に働く力は

$$\vec{f}\rho d^3r \quad (\text{A.46})$$

と書くことができる．ここで， \vec{f} は流体の単位質量あたりに働く力を表す．したがって，体積 Ω 全体に働く体積力を \vec{F}_B で表せば

$$\vec{F}_B = \int_{\Omega} d^3r \vec{f}\rho \quad (\text{A.47})$$

が成り立つ．

体積 Ω の流体には，体積力の他に，面 S を通して働く力がある．この力は大きさが面の面積に比例するので面積力という．面要素 dS に働く面積力は

$$\vec{p}(\vec{n})dS \quad (\text{A.48})$$

と書くことができる．ここで， $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ は面要素 dS の外側の流体が内側の流体に対して単位面積あたりに作用する力を表し，これを応力という．一般に \vec{p} は，面要素の位置だけでなく，その法線方向にも依存するので，それを \vec{n} で示している．このとき，面 dS 全体を通じて，外から内に向かって働く面積力の合力 \vec{F}_S は

$$\vec{F}_S = \int \vec{p}(\vec{n})dS \quad (\text{A.49})$$

で与えられる．

応力 $\vec{p}(\vec{n})$ は，法線ベクトル \vec{n} の矢先が向いている側の流体が反対側の流体に及ぼす力であるから， \vec{n} が逆向きになれば，作用反作用の法則によって \vec{p} の向きも逆になり

$$\vec{p}(-\vec{n}) = -\vec{p}(\vec{n}) \quad (\text{A.50})$$

が成り立つ．応力 \vec{p} の方向は，法線 \vec{n} の方向によって変わるが，一般に \vec{n} の方向とは一致しない．したがって，応力は，一般に法線方向の成分である法線応力とそれに垂直な成分である接線応力とからなる．

圧力 $\vec{p}(\vec{n})$ が法線 \vec{n} に対してどのように依存するか調べる．今，流体中の一点を頂点として3つの直角座標軸に平行な稜を持つ微小な四面体を考える (図 85)．四面体の斜面の面積を S ，外向き法線を \vec{n} とし， x_{β} 座標軸 ($\beta = 1, 2, 3$) 方向の単位ベクトルを \vec{e}_{β} ，それに垂直な側面の面積を S_{β} で表すと，

$$S_{\beta} = (\vec{n} \cdot \vec{e}_{\beta})S \quad (\text{A.51})$$

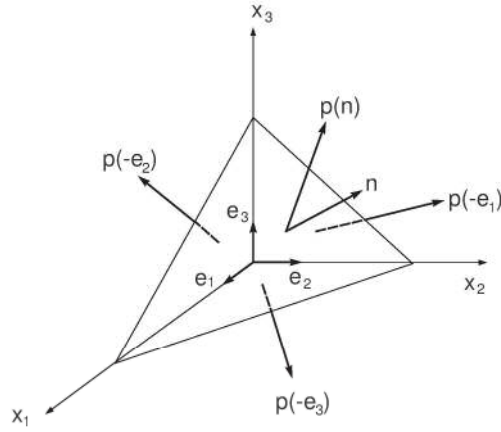


Fig 85: 流体中の微小要素に働く力

の関係がある．このとき，四面体に働く応力の合力は，式 (A.51) を用いて

$$\begin{aligned}\vec{F}_s &= \vec{p}(\vec{n})S + \vec{p}(-\vec{e}_\beta)S_\beta \\ &= \{\vec{p}(\vec{n}) + \vec{p}(-\vec{e}_\beta)(\vec{n} \cdot \vec{e}_\beta)\} S\end{aligned}\quad (\text{A.52})$$

で表される．四面体内の流体には \vec{F}_s の他に体積力が働く．四面体を限りなく縮小すると， \vec{F}_s が長さの 2 乗に比例して小さくなるのに対し，体積力は長さの 3 乗に比例して小さくなる．したがって四面体に働く力の釣り合いから \vec{F}_s は単独で 0 にならなくてはならず，

$$\begin{aligned}\vec{p}(\vec{n}) + \vec{p}(-\vec{e}_\beta)(\vec{n} \cdot \vec{e}_\beta) &= 0 \\ \vec{p}(\vec{n}) &= \vec{p}(\vec{e}_\beta)(\vec{n} \cdot \vec{e}_\beta)\end{aligned}\quad (\text{A.53})$$

が成り立つ．この関係式は，応力 $\vec{p}(\vec{n})$ の各成分について

$$p_\alpha(\vec{n}) = \tau_{\alpha\beta} n_\beta \quad \tau_{\alpha\beta} = p_\alpha(\vec{e}_\beta)\quad (\text{A.54})$$

とも書ける．この 2 階のテンソル $\tau_{\alpha\beta}$ を応力テンソルという．

変形速度テンソルを \vec{v} の空間微分として以下のように定義する．

$$\dot{D}_{\alpha\beta} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}.\quad (\text{A.55})$$

$\dot{D}_{\alpha\beta}$ を対称部分 $\dot{E}_{\alpha\beta}$ と非対称部分 $\dot{F}_{\alpha\beta}$ とに分けて考える．

$$\begin{aligned}\dot{D}_{\alpha\beta} &= \dot{E}_{\alpha\beta} + \dot{F}_{\alpha\beta} \\ \dot{E}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right)\end{aligned}\quad (\text{A.56})$$

$$\dot{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right). \quad (\text{A.57})$$

もし、応力が流体運動のもたらす変形によって引き起こされるものとするれば、それは流体の変形の速さに関係するはずである。したがって、流体に働く応力の運動による変形の速さへの依存性として、応力と変形速度テンソルとの線形関係を考えるのが自然であろう。このような流体はニュートン流体と呼ばれる。以下、特に断らない限りニュートン流体を扱うことにする。応力テンソルは変形速度テンソル \dot{D} の一次関数として

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta}(\dot{D}) &= G_{\alpha\beta} + G_{\alpha\beta\gamma\delta} \dot{D}_{\gamma\delta} \\ &= G_{\alpha\beta} + G_{\alpha\beta\gamma\delta} \dot{E}_{\gamma\delta} + G_{\alpha\beta\gamma\delta} \dot{F}_{\gamma\delta} \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

のように表される。静止した流体では応力は面に垂直な法線応力のみ働くので

$$p_\alpha(\vec{n})|_{\vec{v}=0} = p(\vec{n})n_\alpha \quad (\text{A.59})$$

の形に表される。したがって

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta}(0) &= p_\alpha(\vec{e}_\beta)|_{\vec{v}=0} \\ &= p(\vec{e}_\beta)(\vec{e}_\beta)_\alpha \\ &= p(\vec{e}_\beta)\delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

一方、式 (A.54) より

$$\begin{aligned} p_\alpha(\vec{n})|_{\vec{v}=0} &= p(\vec{e}_\beta)\delta_{\alpha\beta}n_\beta \\ &= p(\vec{e}_\alpha)n_\alpha \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

と書ける。更に式 (A.59)=式 (A.61) より、

$$\begin{aligned} p(\vec{e}_\alpha)n_\alpha &= p(\vec{n})n_\alpha \\ p(\vec{e}_\alpha) &= p(\vec{n}) \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

となるので、法線応力の大きさは面の方向によらないことが分かる。そこで、この一定値を $-p$ とおく。ここで、式 (A.58) より $\tau_{\alpha\beta}(0) = G_{\alpha\beta}$ となるから、

$$G_{\alpha\beta} = -p\delta_{\alpha\beta} \quad (\text{A.63})$$

が導かれる。

流体が一様な角速度 \vec{L} で回転している場合には内部摩擦は生じないので、このときの応力テンソルは静止状態の応力テンソルと同じにならなければいけない。角速度 \vec{L} で回転しているとき、速度は

$$\vec{v} = \vec{L} \times \vec{r} \quad (\text{A.64})$$

と書けるので、これを式 (A.56) の $\dot{E}_{\gamma\delta}$ に代入すると、

$$\begin{aligned}
\dot{E}_{\gamma\delta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\delta} (\epsilon_{\gamma\alpha\beta} L_\alpha x_\beta) + \frac{\partial}{\partial x_\gamma} (\epsilon_{\delta\alpha\beta} L_\alpha x_\beta) \right\} \\
&= \frac{1}{2} (\epsilon_{\gamma\alpha\delta} L_\alpha + \epsilon_{\delta\alpha\gamma} L_\alpha) \\
&= \frac{1}{2} (\epsilon_{\gamma\alpha\delta} L_\alpha - \epsilon_{\gamma\alpha\delta} L_\alpha) = 0
\end{aligned} \tag{A.65}$$

となる。同様に、式 (A.57) の $\dot{F}_{\gamma\delta}$ に代入すると

$$\dot{F}_{\gamma\delta} = \epsilon_{\gamma\alpha\delta} L_\alpha \neq 0 \tag{A.66}$$

と書ける。このとき、

$$\dot{D}_{\alpha\beta} = \epsilon_{\gamma\alpha\delta} L_\alpha \neq 0 \tag{A.67}$$

と書ける。ところが、静止状態では $\dot{D} = 0$ なので、 \dot{D} は対称テンソル $\dot{E}_{\gamma\delta}$ だけを含むようにしなければならない。したがって、

$$\tau_{\alpha\beta}(\dot{E}) = -p\delta_{\alpha\beta} + G_{\alpha\beta\gamma\delta} \dot{E}_{\gamma\delta} \tag{A.68}$$

を得る。

ところで、流体は等方的と仮定すると $G_{\alpha\beta\gamma\delta}$ は等方テンソルであり、

$$G_{\alpha\beta\gamma\delta} = \zeta\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \mu\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \mu'\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} \tag{A.69}$$

と書ける [7]。但し、 ζ 、 μ 、 μ' は定数である。更に、応力テンソルは対称テンソルと考えると [7]

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha} \tag{A.70}$$

であり、式 (A.68) より $G_{\alpha\beta\gamma\delta}$ は (α, β) について対称でなければならない。これより $\mu = \mu'$ を得る。したがって式 (A.69) は

$$G_{\alpha\beta\gamma\delta} = \zeta\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \mu(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) \tag{A.71}$$

と表せる。以上より、ニュートン流体の応力テンソルは

$$\begin{aligned}
\tau_{\alpha\beta}(\dot{E}) &= -p\delta_{\alpha\beta} + \{\zeta\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \mu(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})\} \dot{E}_{\gamma\delta} \\
&= -p\delta_{\alpha\beta} + \zeta\dot{E}_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\dot{E}_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{A.72}$$

と表される。ここで、 ζ 、 μ は流体の変形に対する抵抗、即ち粘性を表す定数であり、 μ を粘性率、 ζ を第2粘性率という。式(A.72)の両辺の対角和をとると

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha\alpha}(\dot{E}) &= -p\delta_{\alpha\alpha} + \zeta\dot{E}_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\alpha} + 2\mu\dot{E}_{\alpha\alpha} \\ &= -3p + 3\zeta\dot{E}_{\gamma\gamma} + 2\mu\dot{E}_{\alpha\alpha} \\ &= -3\left\{p - \left(\zeta + \frac{2}{3}\mu\right)\dot{E}_{\gamma\gamma}\right\}\end{aligned}\tag{A.73}$$

となる。式(A.72)を変形すると

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha\beta}(\dot{E}) &= -\left(p - \zeta\dot{E}_{\gamma\gamma}\right)\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\dot{E}_{\alpha\beta} \\ &= -p\delta_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta}\end{aligned}\tag{A.74}$$

が得られる。但し、

$$\sigma_{\alpha\beta} = \mu\left(\frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial v_{\beta}}{\partial x_{\alpha}}\right) + \zeta\frac{\partial v_{\gamma}}{\partial x_{\gamma}}\delta_{\alpha\beta}\tag{A.75}$$

である。

C 数値解析の方法について

C.1 空間の離散化の方法

計算手法は市川らの論文[20]に基づき，格子点間に位置する物体境界を差分スキームに取り込む方法を用いた．概要は以下の通りである．簡単のため一次元で考える．隣接する格子との間隔を Δx とおく．ここで，注目する格子のラベルを i として物体と隣接している場合を考える．格子点 i に対して固体が左側にある時，格子点 i から固体までの距離を $e(> 0)$ とおき，反対に格子点 i に対して固体が右側にある時，格子点 i から固体までの距離を $d(> 0)$ とおく．格子の関係を示すと図 86 のようになる．このとき格子点 i における対流項を，Von Neumann の

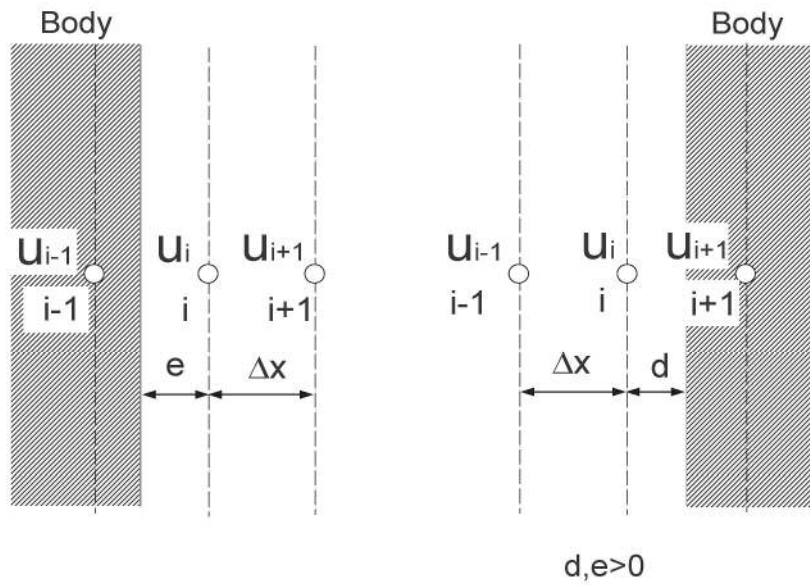


Fig 86: An image of lattice around cell "i". Boundary of right side and left side are drawn.

安定性解析に基づき中心補正項用の2階微分を用いると安定であることが分かっている．

$$\begin{aligned}
 u_i \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i &\cong u_i \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{c,i} - u_i \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{c,i} \cdot \frac{d-e}{2} - \alpha \cdot |u_i| \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{c,i} \cdot \left(\frac{d+e}{2} \right) \cdot \frac{3}{4} + \\
 &\quad (\text{flag_5pt_ok}) \cdot \left(u_i \cdot \frac{-u_{i+2} + 2u_{i+1} - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{12\Delta x} + \alpha \cdot |u_i| \cdot \frac{u_{i+2} - u_{i+1} - u_{i-1} + u_{i-2}}{4\Delta x} \right)
 \end{aligned}
 \tag{A.76}$$

但し、添え字の c_i は中心補正項を表し、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{c_i} &= \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{d+e}, \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{c_i} &= 4 \cdot \frac{u_{i+1} - 2u_{i-1} + u_{i-1}}{(d+e)^2} \\ &\quad (\text{flag_right_boundary}) \cdot \left[4 \cdot \frac{(d-e)}{(d+e)^2 \cdot d} \cdot (u_{i+1} - u_i)\right] - \\ &\quad (\text{flag_left_boundary}) \cdot \left[4 \cdot \frac{(d-e)}{(d+e)^2 \cdot d} \cdot (u_i - u_{i-1})\right] \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

となる。ここで、添え字“(flag_5pt_ok)”は格子点 i の周りの4点が物体と重ならない場合に1を、そうでない場合に0とおくフラグである。また、“(flag_right_boundary)”と“(flag_left_boundary)”はそれぞれ、格子点 i の右側が物体と交わらない場合に1、そうでない場合に0を返すフラグ、及び、格子点 i の左側が物体と交わらない場合に1、そうでない場合に0を返すフラグを表す。式 (A.76) のようにすることのメリットとして、物体内部の仮想の点に、物体境界上での粘着条件を充たすような速度場を与える必要がないことがある。すなわち式 (A.76) の右辺第2項の2階微分が、壁面から格子までの距離に関する補正の役割を担っているため、仮想の点に有限な値を入れる必要がなくなる。同様にして拡散項は以下のように表される。

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = 2 \cdot \frac{-e \cdot u_{i+1} + (d+e) \cdot u_i - d \cdot u_{i-1}}{-d \cdot e \cdot (d+e)} \quad (\text{A.78})$$

以上を用いて、フラクショナル・ステップ法でNS方程式を解くと次のようになる。中間速度 u^* を導入して、 n ステップ目の u を u^n とおくと

$$\frac{u_i^* - u_i^n}{\Delta t} + u_i^n \left(\frac{\partial u^n}{\partial x}\right)_i = \nu \left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2}\right)_i \quad (\text{A.79})$$

すなわち

$$u_i^* = u_i^n + \Delta t \left\{ -u_i^n \left(\frac{\partial u^n}{\partial x}\right)_i + \nu \left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2}\right)_i \right\} \quad (\text{A.80})$$

と表せる。

C.2 圧力項について

圧力 p はこの仮の速度 \vec{u}^* を用いて、以下のポアソン方程式

$$\vec{\nabla}^2 p = \rho \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^*}{\Delta t} \quad (\text{A.81})$$

を解いて得られるが、壁面での境界条件

$$\vec{\nabla} p \cdot \vec{n}_w = 0 \quad (\text{A.82})$$

を用いながら解く。但し、 \vec{n}_w は壁面の法線ベクトルを表し、他の格子との整合性を得るため、最小2乗法を用いて \vec{n}_w を求める。次の時間ステップでの速度 \vec{u}^{n+1} は圧力 p 及び中間速度 \vec{u}^* から

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^* - \Delta t \vec{\nabla} p \quad (\text{A.83})$$

として導出する。このように物体境界を差分に取り込む方法により、スタaggerド格子などと比較して、格子点上において圧力値と速度場の関係が同時に得られることなどの利点を得られる。

C.3 計算の妥当性の評価

粘性項については、式 (38) がニュートン流体を仮定していることを用いて理論値を求めて、解析結果と比較することで行った。ニュートン流体の仮定から、ギャップ領域では $Re \ll 1000$ のとき v_θ が r の線形関数で、摩擦力を F とするとき

$$F = \mu \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \quad (\text{A.84})$$

が成り立つ。ここで境界条件として $v_\theta(r = d/2) = 0$, $v_\theta(r = -d/2) = r_i \omega$ より $F = \mu r_i \omega / d$ と書くことができるため、式 (A.84) を積分することで

$$\begin{aligned} v_\theta &= \frac{r_i \cdot r - F d/2}{d} \\ &= r_i \omega \left(\frac{r}{d} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.85})$$

が得られる。図 87 に、図 30 に示される系でのギャップ領域が層流とみなせる $Re = 100$ におけるシミュレーション結果と理論値の比較を行った。図 87 について、横軸の r はギャップ領域での径方向中央を原点とおき、縦軸に v_θ を示してある。理論値と解析結果の誤差は最大で 1% 程度に収まることを確認している。

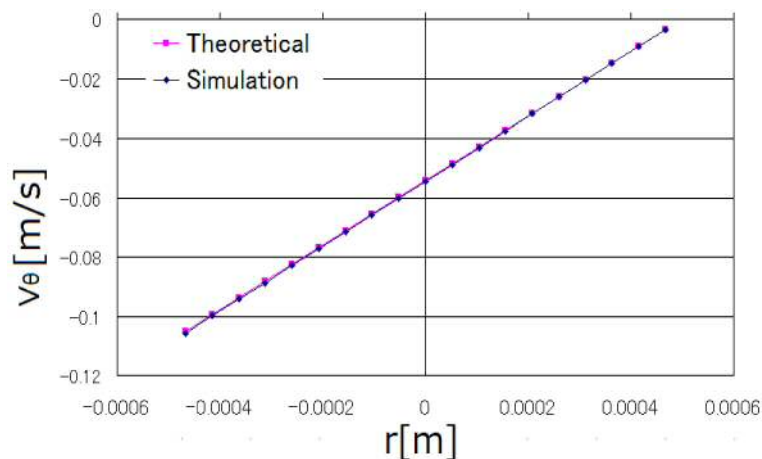


Fig 87: Comparing simulation data with theoretical data at $Re = 100$.

一方、移流項については便宜上、式 (38) を直交座標系

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (\text{A.86})$$

に置き換えて評価を行った。式 (38) はロータ端部の解析において使用する。移流項の良く知られた評価方法として、物体周りの抵抗係数 C_D 値を得る方法がある。図 88 に示すように、 C_D 値は物体の流れ場と垂直な面に対する投影面積を A 、物体にかかる力を F として、

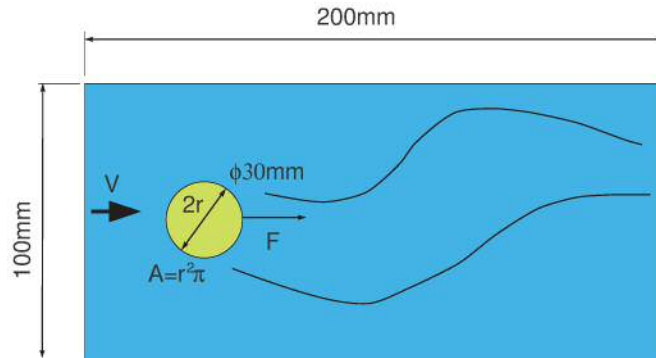


Fig 88: Flow passing sphere.

$$C_D = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 A} \quad (\text{A.87})$$

と書ける。但し、 v_∞ は無限遠における速度場である。ここでは、 x,y,z 方向に $0.1\text{m} \times 0.1\text{m} \times 0.2\text{m}$ の広がりを持つ計算領域において、直径 0.03m の球があると仮定して、各 Re に対応する速度場を与えた場合の解析を行った。また、メッシュの数は $40 \times 40 \times 80$ とおき、球の直径の幅ではメッシュ数が 12 個ある条件とした。但し、 Re の評価として

$$Re = \frac{2rv_\infty}{\nu} \quad (\text{A.88})$$

のように計算を行った。また、球にかかる力 F はベクトル表記で $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ と書くと、応力テンソル $\tau_{\alpha\beta}$ (式 (A.54) 参照) を用いて

$$F_\alpha = \int_S dS_\beta \tau_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = \{1, 2, 3\}) \quad (\text{A.89})$$

と書ける。但し、 S は球の表面を表し、 $d\vec{S}$ は S 上の面積要素における、大きさが面積要素と等しい法線ベクトルである。

非定常的な解析結果の圧力場と速度場を可視化したスナップショットを以下に示す。但し、圧

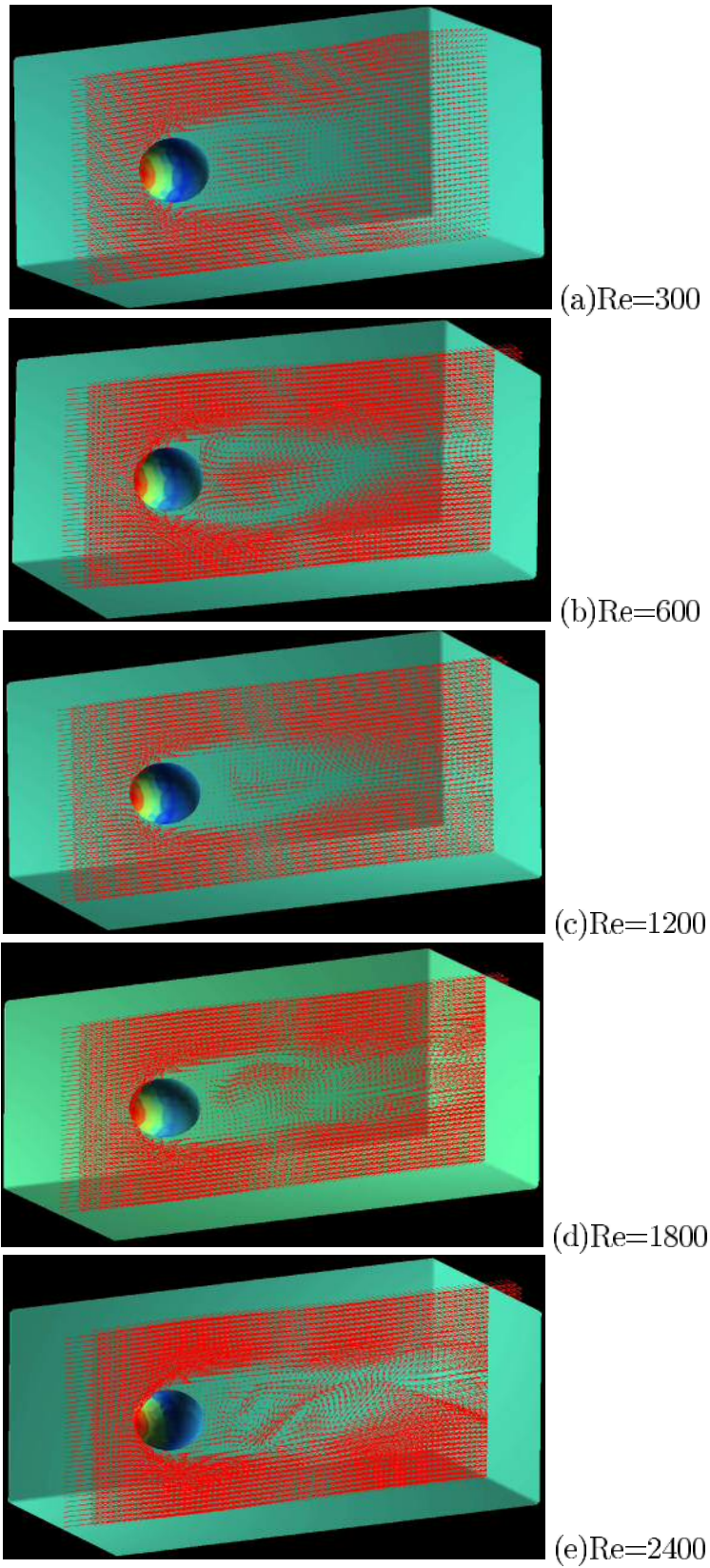


Fig 89: Result of flow passing sphere.

力場は壁面において、小さい方から青→黄色→赤と変わるように表されている。また、速度場は赤色の矢印で球を横切る面上で速度に比例した大きさを示した。図 89 より、 Re が小さい間は球の後方を取り巻くように渦が生じているが、 Re が大きくなるにしたがって規則性が消失し、乱流状態に遷移していく様子が確認できる。

図 90 は球周りの流れ場解析の C_D 値の結果である。実験値が 0.47 に対して、本解析では平均で 0.5 となっており妥当と考えられる。

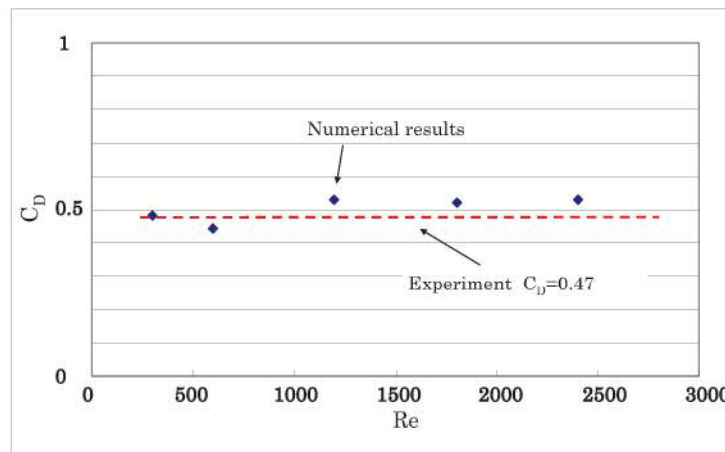


Fig 90: Estimation between C_D value versus Re by calculating flow passing sphere.

したがって、本解析では壁面にかかる圧力場と速度場の非定常的な計算を精度良く行えることが分かる。以上より、本研究で用いる数値解析は粘性項と移流項のいずれにおいても妥当な計算が行われており、実用に耐え得る精度を備えていると言える。

Table 3: Difference between real motor and motor model.

タイプ \ 部品	ロータ	ステータ	フレーム
モータモデル	S45C 炭素鋼	S45C 炭素鋼	S45C 炭素鋼
モータ実機	電磁鋼板 マグネット マグネットと電磁鋼板間の接着剤	電磁鋼板 エナメル線 絶縁ボビン	アルミ鋳造

D モータについて

D.1 モータの種類

回転式モーターの構造的な違いにより、実用上では以下のような分類ができる。

1. IPM(=Interior Permanent Magnet) モーター

動力を伝えるローターに永久磁石が埋め込まれているタイプであり、EV、及びHEVにおいて実績がある。メインのフレームに固定されたステーターが、ローターに追従した回転磁界を作ることによって動力としてのトルクを生成する。モータが消費する電力のうち、およそ90～95%以上が機械的な動力に変換可能であり、燃焼型のエンジンに比較してエネルギー効率が高い点と、小型化の進歩が普及の要因といえる。

2. SPM(=Surface Permanent Magnet) モーター

IPMモーターと比較して、部品の構成など基本的な造りは同じだが、永久磁石がローターの表面に接着され、露出した状態になっている点が異なっている。構造上、ステータと永久磁石間の距離を小さくとれるため、効率はIPMよりも更になるが、ある一定以上の高回転数時に永久磁石が遠心力によって引き剥がされる恐れがあり、高速回転が必要な用途には向かない。

D.2 モータモデルと実機との相違

モータモデルは、実際のモータの必要最小限の構成要素で成り立っているため、これまでの結果が直ちに実際のモータ実機に適用できるものではない。実機ではモデルにはなかったコイルや、製品によってはフレームにウォータージャケットなどを装着している場合もある。しかしながら、基本的な伝熱特性の考え方はこれまでの説明と同じであり、ギャップ間の流れ場は図59で補完する以外は、実際に熱伝達率等を測定する必要がある。本研究で用いたモータモデルと、実機との主な違いは次のような項目が挙げられる。

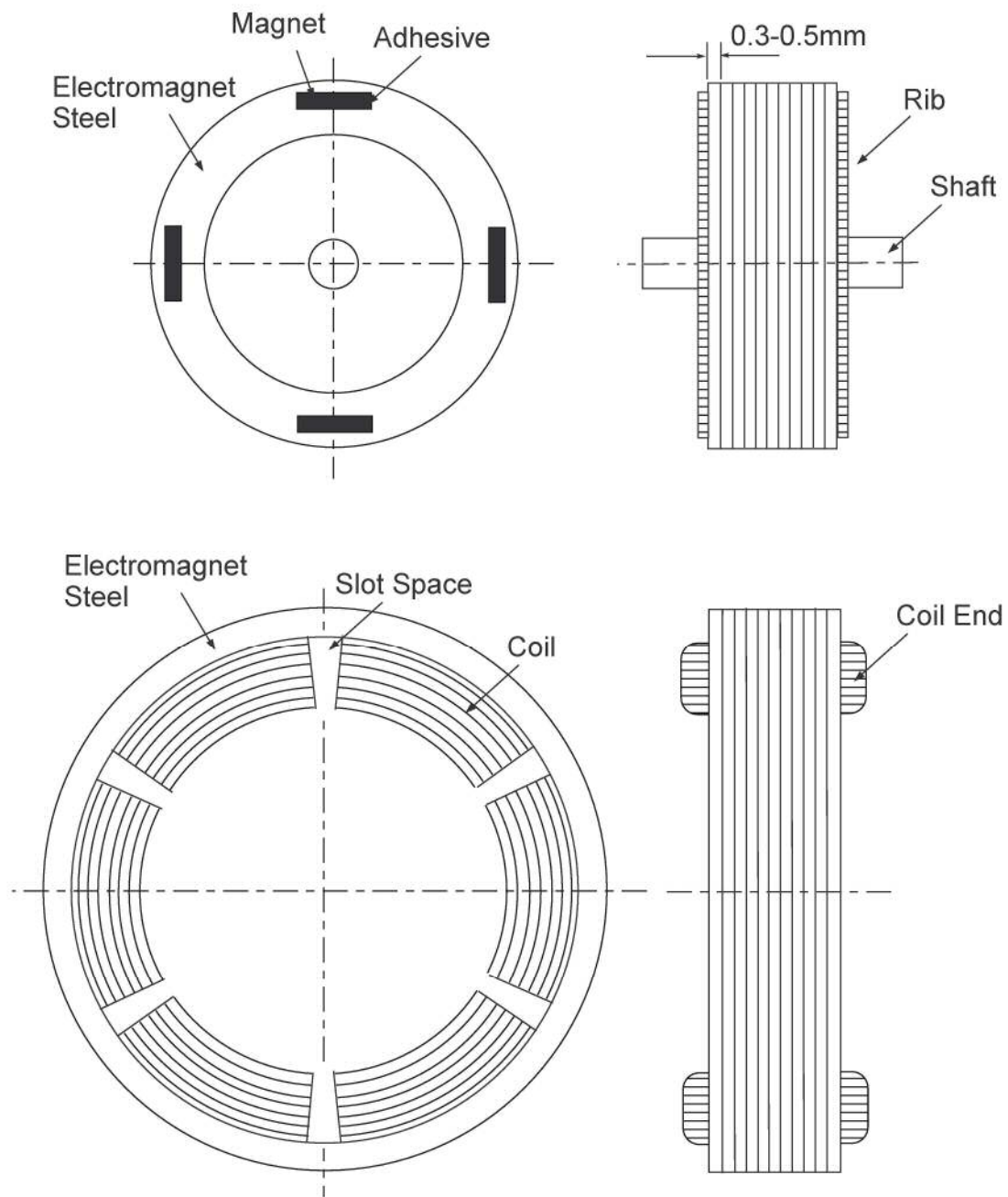


Fig 91: Drawing of real motor

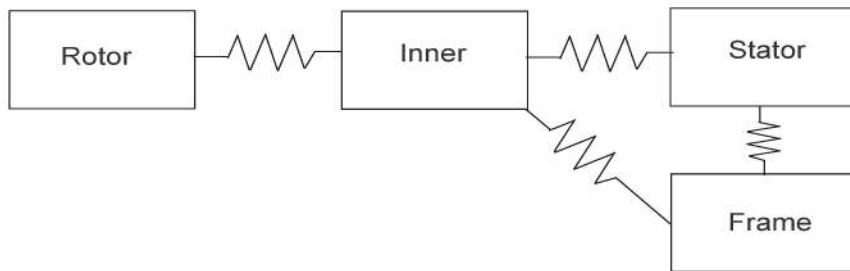
D.3 ロータについて

図91より、ロータに関してはマグネット、積層鋼板、マグネット固定のための接着剤等が相違点と言える。マグネットは主成分が鉄であり、

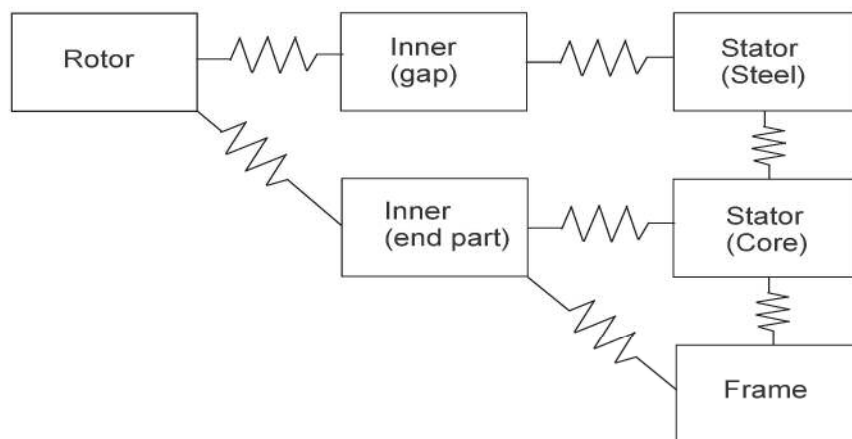
モータモデルと熱特性に関して大きな違いはない。積層鋼板に関しては、一枚一枚が渦電流を低減するために厚さ0.3～0.05の珪素を含む鉄板が用いられており、表面に樹脂によるコーティングが施されている点が異なっている。積層構造とコーティングがあることで、ロータの軸方向の伝熱特性はモータモデルの場合に比べて相違が出てくるが、軸方向での温度勾配を見ることでロータ端部への放熱特性を調べることが可能である。

D.4 ステータについて

ステータには電磁鋼板の他に、磁場を生じさせるコイルが巻かれてあり、中間には絶縁のためのボビンや絶縁紙などが含まれることがある。これらについて逐一熱抵抗を調べていくことは特に流動を含まないことなどから流動場に比較して困難ではなく、熱電対を部品間に挿入するなどして熱抵抗を計測できる。但し、コイルの中間部分に熱電対を挿入することは限られたスペースで行うためプローブの小型化などの配慮が必要となる。また、フレームとの嵌め合い部分における伝熱特性については、焼き嵌め時においても有効接触断面積は100%には至らないため測定や推定など熱伝導以外の特性に注意する必要がある。以上をまとめて、モータモデルとモータ実機の熱回路の比較を行うと以下のようなになる。



(a) Motor Model



(b) Closed to Real Motor

Fig 92: Schematic drawing of heat transition for motor.

謝辞

本研究を行うにあたり、ご指導ご鞭撻を賜りました、筑波大学システム情報研究科構造エネルギー工学専攻の阿部豊教授、金子暁子講師に心より感謝の意を表します。また、本研究における流動実験を行って頂いた、本研究室の卒業生である諸見里嘉章さん、及び、伝熱実験を行って頂いた博士前期課程2年 駒ヶ嶺将孝さんに心より感謝致します。加えて、これら諸氏の方々には、自分がつくばから遠方に滞在していることなどにより多大な苦勞をおかけしてしまったにも関わらず、終始丁寧な御対応と最大限のサポートを頂いたと感じており、心より敬意を表します。更に、業務の一環として本研究活動を許可して頂いた、株式会社 明電舎の上長の方々において、特に、共同研究締結に向けた斡旋の援助を頂いた研究所の長嶋孝幸センター長、江尻光良技師、松橋大器課長をはじめ多くの皆様に感謝の意を表します。最後に、これまでの研究活動を支えて頂いた家族に、心より感謝を致します。皆様、本当にありがとうございました。

参考文献

- [1] Michael H. Westbrook, : "The Electric Car", *Inspec/See*, ISBN-10: 0852960131 ,ISBN-13: 978-0852960134
- [2] 百目鬼 英雄 : "電動モータドライブの基礎と応用", 技術評論社 ISBN 978-4-7741-4390-3
- [3] 経済産業省 "三相誘導電動機の現状について": 総合資源エネルギー調査会, 省エネルギー基準部会第1回三相誘導電動機判断基準小委員会 資料4
- [4] 高橋 研二ほか : "誘導電動機の接触熱抵抗と冷却性能,"日本伝熱シンポジウム講演論文集, Vol.35(1998) ,pp.39-40.
- [5] 鬼丸 貞久, 松井 啓仁, 田口 知成, "ハイブリッド電気自動車 (HEV) の ATF を用いたモータ冷却構造の熱解析" *Denso technical review* **13(1)** (2008-05) , pp.19-25.
- [6] S.R. de Groot and P. Mazur, "Non-equilibrium Thermodynamics", *Dover*, New York, 1984
- [7] L.D. Landau , E.M. Lifshitz "Fluid Mechanics" , *A Course of Theoretical Physics*, Vol.6, Pergamon Press 1959
- [8] Buckingham, E. "On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations", *Phys. Rev.* **4**(1914), pp.345-376
- [9] Taylor.G.I, "Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders", *Phil. Trans.R.Soc.London*, A.**223**(1923), pp.289-343.
- [10] Bilson,M. and Bremhost.K, "Direct numerical simulation of turbulent Taylor-Couette flow", *J.Fluid Mech*, **579**(2007), pp.227-270.
- [11] D.A.Staton, A.Cavagnino, "Convection Heat Transfer and Flow Calculations Suitable for Electric Machines Thermal Models", *IEEE trans*, Vol**55**, No10, 2008
- [12] 諸見里, 平野, 他, "内円筒回転時における二重円筒管内流動の可視化計測", 第 39 回可視化情報シンポジウム論文集, **A108**.
- [13] N. Abcha, et al., "Qualitative relation between reflected light intensity by Kalliroscope flakes and velocity field in the Couette-Taylor flow system", *Exp Fluids*, **45** (2008), pp.85-94.
- [14] Liguang Wang, Michael G.Olsen, T.Dennis Vigil, "Reappearance of azimuthal waves in turbulent Taylor-Couette flow at large aspect ratio" , *Chemical Engineering Science*, **60** (2005), pp.5555-5568.
- [15] Murai, Y., Oiwa H., Takeda ,Y., " Frictional drag reduction in bubbly Couette-Taylor flow " , *Physics of fluids*, Vol. 20, 034101 (2008), pp. 1-12.
- [16] 森永 聖人, 高田 大祐, 田坂 裕司, 武田 靖, " 変調回転におけるテイラー・クエット流れ " ながれ 24 (2005), pp.185-194.
- [17] Steven, T., Wereley, A.A., Richard, M.L., " Particle-fluid velocities and fouling in rotating filtration of a suspension " , *Journal of Membrane Science*, Vol. **209** (2002), pp. 469-484.

- [18] Takeda, Y., Fischer, W.E., Sakakibara, J., Ohmura, K., “ Experimental observation of the quasiperiodic modes in a rotating Couette system ” , *Physical Review, E.* **47-6**(1993), pp. 4130-4134.
- [19] J. A. Cole, ”Taylor vortex instability and annulus length effects” , *Nature*, **252**(1974), pp.688-689.
- [20] 市川 治, 藤井 孝藏, ”直交格子を使用した 3次元の任意形状物体まわりの流体シミュレーション”, 第 14 回数値流体力学講演論文集, 2000
- [21] F.Tachibana,S.Fukui, ”Convective Heat Transfer of the Rotational and Axial Flow between Two Concentric Cylinders”, *Japan Society of Mechanical Engineers*,Vol.**7**, No.26, 1964
- [22] 橋 藤雄 ,長島 義悟 ,12 (11) , pp.450 - 451 , 1960-11-01 , 東京大学生産技術研究所 , *Institute of Industrial Science. University of Tokyo* , 東京大学生産技術研究所 伝熱工学 , 三井造船 KK , *Institute of Industrial Science. University of Tokyo*