黄金期の微積分学

2014 年 8 月 7 日

●午前の部

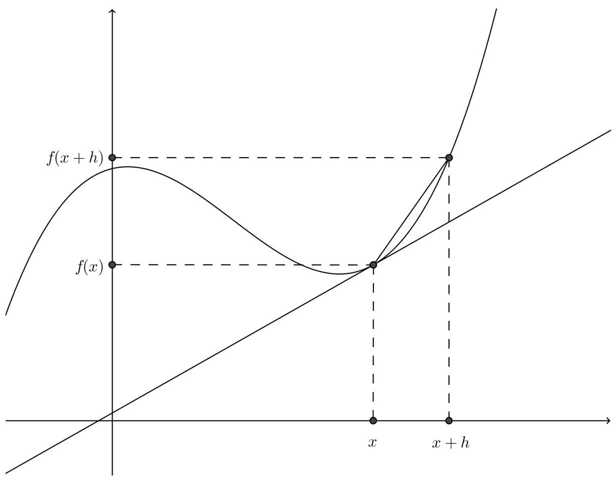
高校では, 極限を勉強した後で微分を学ぶ.

微分係数は平均変化率の極限で定義される.

関数 $f(x)$ について, 区間の平均変化率の極限をとって, $\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ が存在するとき, これを $f(x)$ の 点 $(x, f(x))$ における微分係数といい, $f'(x)$ で表す.

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

h を 0 に近づけると, 点 $(x, f(x))$ における接線と曲線 $y=f(x)$ は近づいていく. その近づく先が極限値である（しかし, 一般には接線と曲線は一致しない）.



例題

$f(x)=x^2-x$ について次のものを求めよ.

(1) $x=1$ から $x=1+h$ まで変化するときの平均変化率

(2) $x=1$ における微分係数

解

(1) $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} = \dfrac{(1+h)^2-(1+h)-0}{h} = \dfrac{h^2+h}{h} = h+1$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+1) = 1$

17 〜 18 世紀には lim の考え方はなかった. これは, ニュートンやライプニッツよりだいぶ後の 19 世紀以降の考え方である. ニュートンの考え方とは違う. ニュートンは, h が十分に小さければ, 接線と曲線 $y=f(x)$ は一致すると考えた. 十分に小さいとは, どのくらいかというと, $h^2=0$ となるくらい小さければよい. ここで, $h^2=0 \Rightarrow h=0$ ではないかと思うかもしれないが, こういう h がいっぱいあるように見える世界でニュートンやオイラー達は微積分をやっていたのである.

高校での微分の定義は $f'(x)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ であり, 一般に $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$ はウソだが, この式で分母を払うと

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)$$

となる. これは $h=0$ 以外の場合には一般に成り立たないが, この式を一般に成り立たせる h が 0 以外にもいっぱいあるような世界を考える.

2 乗すると 0 になる数, その全体を D と表す.

$$D=\{d\in\mathbf{R}\mid d^2=0\}\quad(\neq\{0\})$$

彼等はこういう数が関数 f の点 x における接線の傾きを決定できるくらい十分にあると考えた. つまり

$$f(x+d)-f(x)=ad\ \text{となる実数}\ a\ \text{が唯一定まって傾きが決定できる}\quad(\forall d\in D)$$

ということである. こうして定まる唯 1 個の実数 a を $f'(x)$ と書くことにする.

当時このような考えに納得のいかない者はいて, バークレーなどは, やはり $D=\{0\}$ ではないかと主張している. 対して数学者はおかしくないことは分かっていたが, ノーコメントとした. 反論に取り合うよりも力学の発展, 微積分学の発展の方が大事であって, 悶着を避けそちらに力を注ぐことにしたのであった.

新しい考え方が出てきたときに, それをすんなりと受け入れるのは難しいことではある.

たとえば, 複素数を学習するとき現れる虚数単位 i（ $i^2=-1$ となる新たな数）もそうである. 今やすっかり市民権を得たがはじめ出てきたときは議論があった. i がどこから出てきたかというと, 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ で, $b^2-4ac<0$ の場合もあり得ることから. 虚数単位 i を用いれば負の数の平方根も扱えるようになる.

今回は特に微分に焦点をあて, 高校数学のやり方とニュートンらの時代のやり方を体感していくことになる.

最初は高校で学習する基本的な導関数の性質から.

導関数の性質

(1) $\{kf(x)\}' = kf'(x)$

(2) $\{f(x)+g(x)\}' = f'(x)+g'(x)$

(3) $\{kf(x)+lg(x)\}' = kf'(x)+lg'(x)$

証明

$u=f(x)$, $v=g(x)$ とする.
x の増分 Δx, それに対する u, v の増分 Δu, Δv とする.

(1) $y=ku$.

$$y' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k(u+\Delta u)-ku}{\Delta x} = \frac{k\Delta u}{\Delta x} = k\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} = ku'$$

(2)

$$y' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(u+\Delta u)+(v+\Delta v)-(u+v)}{\Delta x} = \frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x} = u'+v'$$

(3) (1) と (2) より.

導関数の性質

(4) $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(5) $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

証明

(4) $u=f(x)$, $v=g(x)$ とする.

$$\begin{aligned}\Delta y &= (u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv \\ &= uv+u\Delta v+\Delta uv+\Delta u\Delta v-uv \\ &= \Delta u(v+\Delta v)+u\Delta v\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta u}{\Delta x}(v+\Delta v)+u\frac{\Delta v}{\Delta x} \\ &= u'v+uv'\end{aligned}$$

(5) $y = \dfrac{u}{v}$ とする.

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \left(\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}\right)\frac{1}{\Delta x} \\
&= \frac{1}{(v+\Delta v)v}(uv + \Delta uv - uv - u\Delta v)\frac{1}{\Delta x} \\
&= \frac{1}{(v+\Delta v)v}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}v - u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) \\
&= \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (\Delta x \longrightarrow 0)
\end{aligned}$$

公式

n が自然数のとき

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

証明

数学的帰納法を使う.

$n=1$ のとき左辺は, $(x)'=1$, 右辺は, $1\cdot x^0 = 1$ だから成り立つ.

$n=k$ のとき成り立つと仮定し, $n=k+1$ のとき成り立つことを示す.

$$\begin{aligned}
(x^{k+1})' &= (x^k \cdot x)' \\
&= (x^k)'\cdot x + x^k \cdot x' \\
&= kx^{k-1}\cdot x + x^k \\
&= (k+1)x^k \\
&= (k+1)x^{(k+1)-1}
\end{aligned}$$

よって, $n=k+1$ のときも成り立つ.

数学的帰納法より公式は成り立つ.

ニュートンらは違う方法でこの導関数の性質を証明した.

$$\begin{aligned}
f(x+d) &= f(x) + f'(x)d \\
g(x+d) &= g(x) + g'(x)d
\end{aligned}$$

となって, 微分したものは d の係数に現れることに注意.

導関数の性質 (2) は

$$\begin{aligned}
(f+g)(x+d) &= f(x+d) + g(x+d) \\
&= f(x) + f'(x)d + g(x) + g'(x)d \\
&= f(x) + g(x) + \{f'(x) + g'(x)\}d
\end{aligned}$$

と証明される.

導関数の性質 (4) は高校ではよく次のようにも証明されている.

$$\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$=\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$=g(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$\longrightarrow \quad g(x)f'(x) \quad + \quad f(x)g'(x) \qquad (h\to 0)$$

分子に同じものを足して引いてもかまわないということを使っているが, 何を足して引くかは思いつく必要がある.

この公式はライプニッツが発見者なので, ライプニッツの公式ともいう. ただし, 今と微分の定義が違うので, ライプニッツは

$$\begin{aligned} f(x+d)g(x+d) &= (f(x)+f'(x)d)(g(x)+g'(x)d) \\ &= f(x)g(x)+d\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}+f'(x)g'(x)d^2 \end{aligned}$$

と証明した（最後の項で $d^2=0$ ）.

ライプニッツは単に展開しただけで, 思いつくべきものは何もない.

公式 $(x^n)'=nx^{n-1}$ も d を使って証明しておこう.

$$\begin{aligned} (x+d)^n &= \underbrace{(x+d)(x+d)\cdots(x+d)}_{n\text{ 個}} \\ &= x^n+nx^{n-1}d+\cdots\cdots \end{aligned}$$

ここで, $\cdots\cdots$ の部分は $d^2, d^3, \cdots$ が出てくるので実際 0 である. d の係数を見て $(x^n)'=nx^{n-1}$ である.

問題

次の関数の導関数を求めよ.

(1) $y=x^4+2x^3-3x$

(2) $y=(2x-1)(x^2-x+3)$

(3) $y=\dfrac{2x-3}{x^2+1}$

(4) $y=\dfrac{2x^3+x-1}{x^2}$

次に合成関数 $y=f(g(x))$ の微分を見ていく.

たとえば $f(x)=x^3$, $g(x)=x^2+x$ ならば合成関数は $y=(x^2+x)^3$ になる.

合成関数の微分

$\{f(g(x))\}' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

証明

$y = f(u)$, $u = g(x)$ とする.

$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$, $\Delta u = g(x + \Delta x) - f(x)$

$\Delta x \longrightarrow 0$ のとき $\Delta u \longrightarrow 0$, $\Delta y \longrightarrow 0$

y の x での微分は

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \left(\lim_{\Delta u\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\left(\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) \\
&= f'(g(x)) \cdot g'(x)
\end{aligned}$$

一方, ニュートンらはどうやったか見てみる.

$d \in D$, $\alpha \in \mathbf{R} \Longrightarrow \alpha d \in D$ は成り立つ (実数倍は再び D に属す). 実際 2 乗すれば, $(\alpha d)^2 = \alpha^2 d^2 = 0$.

しかし和に関して, $d_1, d_2 \in D \Longrightarrow d_1 + d_2 \in D$ は不成立. なぜなら $d_1 + d_2$ を 2 乗しても 0 にはならないからである. $(d_1 + d_2)^2 = {d_1}^2 + {d_2}^2 + 2d_1 d_2$ で ${d_1}^2 = 0$, ${d_2}^2 = 0$ だが, $d_1 d_2$ は 0 とは限らない.

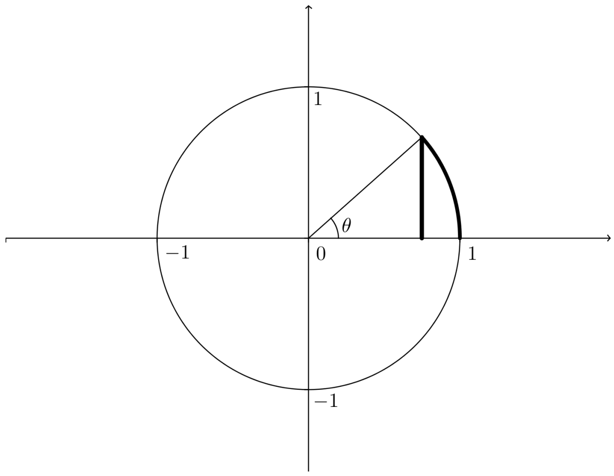
17 世紀, 18 世紀の数学者による合成関数の微分の証明は以下のようになる.

$$\begin{aligned}
f(g(x+d)) &= f(g(x) + g'(x)d) \\
&= f(g(x)) + f'(g(x))d' \qquad (g'(x) \in \mathbf{R} \text{ より}, g'(x)d = d' \in D \text{ と見て微分}) \\
&= f(g(x)) + f'(g(x))g'(x)d
\end{aligned}$$

d の係数を見て, $\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$ が示された.

●午後の部

ラジアン（弧度法）についての話から始める．度数法では, 1 周 360 度と取り決めていた．しかし, 360 に特別な意味はなく, 文化的な理由によったと思われる．弧度法で角度を表すにあたって, 単位円を考える．角度 θ に弧の長さは比例するから, 角度を測るには, 弧の長さを測ればよいということになる．そこで, 角の大きさを単位円の弧の長さで表すことにすると, ラジアンとなる．円を 1 周回ると 2π (ラジアン) である．



ところで, 慣性の法則（ニュートンの第一法則）は, 力が加わらなければ物体は等速度運動するというものである．無限小 d を用いた微分は, 物理的に言うと, 無限小における慣性の法則, 力が加わろうと加わらまいと経過時間が十分短ければ等速度運動するということである．

さて, $\sin\theta$ は角度 θ のとき単位円の交点から垂線を下ろして, それの長さである．角度が十分に小さい $d \in D$ のときは, 上記の無限小における慣性の法則から, 垂線も円弧も $(1,0)$ での接線も一致するから, $\sin d = d$, $\cos d = 1$ である．（$\sin^2 d + \cos^2 d = 1$ もちゃんと成り立つ．）

$\sin$ の微分は,

$$\begin{aligned} \sin(\theta + d) &= \sin\theta\cos d + \cos\theta\sin d \\ &= \sin\theta + d\cos\theta \end{aligned}$$

だから, $(\sin\theta)' = \cos\theta$ となる．

$\cos$ の微分は,

$$\begin{aligned} \cos(\theta + d) &= \cos\theta\cos d - \sin\theta\sin d \\ &= \cos\theta - d\sin\theta \end{aligned}$$

だから, $(\cos\theta)' = -\sin\theta$ となる．

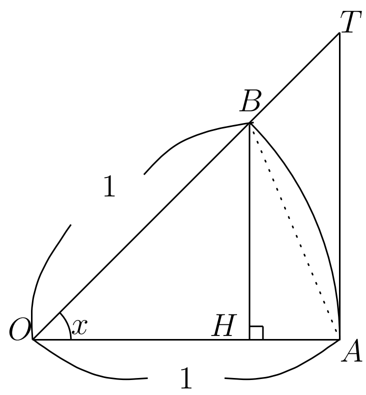
高校では, 三角関数の極限値の性質 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ を用いて導出するのだが, その証明は高校数学でも名高い難所のひとつである．

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ をどうやって証明するのか見てみよう．

証明

(1) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

点 O を中心とする半径 1 の円において，中心角 x の扇形 OAB を考える．点 B から OA に下ろした垂線を BH，点 A における円 O の接線が OB の延長と交わる点を T とする．



面積について

$$\triangle OAB < \text{扇形}\, OAB < \triangle OAT$$

$BH=\sin x$, $AT=\tan x$ であるから

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin x < \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x &< \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x\\
\sin x < x &< \tan x\\
1 < \frac{x}{\sin x} &< \frac{1}{\cos x}\\
1 > \frac{\sin x}{x} &> \cos x
\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{x\to +0}\cos x=1$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=1$

(2) $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ のとき

$x=-t$ とする．$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ である．

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x} &= \lim_{t\to +0}\frac{\sin(-t)}{-t}\\
&= \lim_{t\to +0}\frac{-\sin t}{-t}\\
&= 1
\end{aligned}$$

(1), (2) から $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

この性質を用いて, 次に $(\sin x)'=\cos x$ を示す.

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}+\frac{\sin h\cos x}{h}\right\}\end{aligned}$$

前の分数については

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}\times\frac{\cos h+1}{\cos h+1} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos^2 h-1)}{h(\cos h+1)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(-\sin^2 h)}{h(\cos h+1)}\\ &= \lim_{h\to 0}\sin x\frac{-\sin h}{\cos h+1}\frac{\sin h}{h}\\ &= 0\end{aligned}$$

一方後ろの分数については

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\cos x = \cos x$$

よって

$$(\sin x)'=\cos x$$

続いて, $(\cos x)'$ は次のように求められる.

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \left(\sin(x+\frac{\pi}{2})\right)'\\ &= \cos(x+\frac{\pi}{2})\\ &= -\sin x\end{aligned}$$

次に指数関数について考える.

高校では, 極限を学んだ後, それまでの底である 10 に替えて, $e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ を用いることになる. 高校では極限を勉強した後に微分となるが, この変な e の定義式は極限の単元ではなく, 微分の単元に出てくるので, これを一体どう受け止めていいか途方にくれ, 真面目な生徒ほど, 折角理解したと思っていた極限を実は何も理解していなかったの

だと思い悩むことになる．まあ高校の教科書ではだいぶ砂糖をまぶせた書き方がしてあるが, それは混乱を助長するだけで, そもそもこんな定義式は高校生には見せるべきではない（18 歳未満厳禁！）．

はじめに, 底はなんでもいいが, 10 として, $f(x) = 10^x$ を考える．$f'(0) = a$ とおく．微分の式から

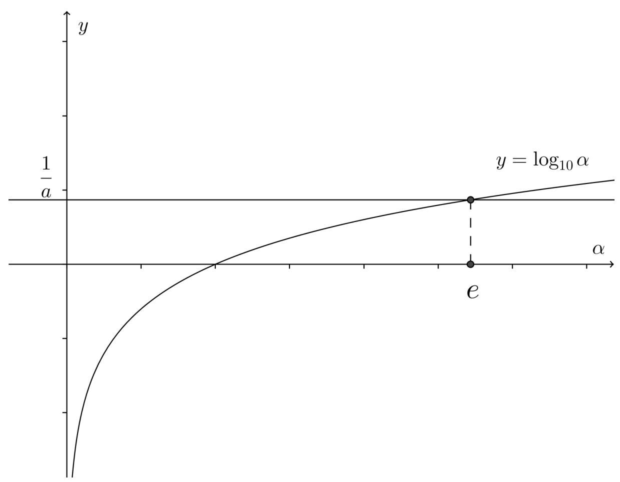
$$\begin{aligned} f(d) &= f(0) + f'(0)d \\ 10^d &= 1 + ad \end{aligned}$$

e を正の実数として, $e = 10^{\log_{10} e}$ なのでこれを使うと

$$\begin{aligned} e^d &= (10^{\log_{10} e})^d \\ &= 10^{(\log_{10} e)\cdot d} \\ &= 10^{d'} \qquad (\log_{10} e) \cdot d = d' \text{とおいた} \\ &= 1 + ad' \\ &= 1 + (\log_{10} e)ad \end{aligned}$$

e は何でもよかったので $a \log_{10} e = 1$ となるよう e を決めましょうというだけの話なのである．

もう少しきちんと言うと, α の関数 $y = \log_{10} \alpha$ は図のように $-\infty$ から $+\infty$ への単調増加関数だから, $y = 1/a$ との交点の α 座標が唯 1 つ定まり, それを e とする．



つまり 0 で微分したときに微分係数が 1 となるように e をとりましょうというだけの話なのである．

そうすると指数法則を用いて,

$$\begin{aligned} e^{x+d} &= e^x e^d \\ &= e^x(1 + d) \\ &= e^x + e^x d \end{aligned}$$

したがって, $(e^x)' = e^x$ である．

対数関数の微分 $(\log_a x)'$ を求める.

$$
\begin{aligned}
(\log_a x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \\
&= \frac{1}{x} \lim_{h \to \infty} \log_a\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h \qquad \left(\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{h}\text{とした}\right) \\
&= \frac{1}{x} \log_a e \\
&= \frac{1}{x \log_e a}
\end{aligned}
$$

特に, $a = e$ とすれば $(\log_e x)' = \dfrac{1}{x}$ を得る.

指数関数の微分 $(a^x)'$ を求める.
$y = a^x$ とおく. $\log_e y = \log_e a^x = x \log_e a$
x に関して微分して

$$
\begin{aligned}
\frac{y'}{y} &= \log_e a \\
y' &= a^x \log_e a
\end{aligned}
$$

特に, $a = e$ とすれば $(e^x)' = e^x$ を得る.