

氏名(本籍地)	石井 基裕 (群馬県)
学位の種類	博士(理学)
学位記番号	博甲第 6786 号
学位授与年月日	平成26年 3月25日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
審査研究科	数理物質科学研究科
学位論文題目	

Semi-infinite Lakshmibai-Seshadri path model for level-zero extremal weight modules over quantum affine algebras (量子アフィン展開環上のレベル・ゼロ extremal ウェイト加群に対する半無限 Lakshmibai-Seshadri パス模型)

主査	筑波大学教授	理学博士	宮本 雅彦
副査	筑波大学教授	理学博士	森田 純
副査	筑波大学教授	学術博士	秋山 茂樹
副査	筑波大学准教授	博士(理学)	佐垣 大輔

## 論 文 の 要 旨

量子アフィン展開環上のレベル・ゼロ extremal ウェイト加群は、Chari と Pressley によって導入された量子 Weyl 加群 (または、大域 Weyl 加群) と同型であり、(Lagrangian) 籐多様体を用いて、中島啓により導入された普遍的標準加群と同型でもある。さらに、ループ群の幾何学や半無限旗多様体と密接に関係しており、商加群として、量子アフィン代数上の有限次元既約表現であって、結晶基底を持つものが得られるというように、代数学、幾何学、数理物理学といった様々な視点から研究されている極めて重要な加群である。しかし、その構造はとても複雑であり、未だ十分に研究されているとはいえない。一方で、レベル・ゼロ extremal ウェイト加群が結晶基底を持つことは (柏原正樹により) 証明されているので、この結晶基底をより組合せ論的なものを用いて実現することができれば、レベル・ゼロ extremal ウェイト加群の構造を組合せ論的に研究することができるようになる。実際、内藤聡と佐垣大輔は Littelmann によって (組合せ論的に) 導入された Lakshmibai-Seshadri (LS) パスを用いて、特別なレベル・ゼロ extremal ウェイト加群の結晶基底の実現を与えている。しかし、その後、彼らは、一般のレベル・ゼロ extremal ウェイト加群については、LS パスでは結晶基底の実現を与えることができないことを証明している。

石井氏は、内藤聡と佐垣大輔との共同研究において、量子アフィン展開環が "ねじれない (untwisted)" アフィン・リー代数に付随したものの場合に、新たに「半無限 LS パス」と呼ばれるものを導入し、それを用いることでレベル・ゼロ extremal ウェイト加群の結晶基底を組合せ論的に実現することに成功した。(この結果は上述の結果の一般化にもなっている。) 石井氏の博士論文は、この共同研究で得られた結果をまとめたものである。半無限 LS パスを定義する際には、「半無限 Bruhat 順序」

と呼ばれるアフィン Weyl 群上の半順序が用いられる。この半無限 Bruhat 順序は、定義自体は組み合わせ論的なものではあるが、半無限旗多様体の幾何学に由来するものや、半単純代数群のモジュラー表現論の研究において Lusztig によって導入された generic Bruhat 順序と同値である。アフィン Grassmann 多様体の同変ホモロジー(環)と旗多様体の同変量子コホモロジー環との構造の比較に関する研究において Peterson によって導入された stable Bruhat 順序とも同値であるといった非常に深い幾何学的背景がある。そのため、近い将来、半無限 LS パスの幾何学的な側面が研究され、今回の結果が幾何学的に応用されることが期待される。

さて、石井氏の博士論文において中心的な役割を果たす半無限 LS パスは、半無限 Bruhat 順序の Hasse 図における有向道 (directed path) を用いて定義される。すなわち、半無限 LS パスとは、アフィン Weyl 群の元の有限列と閉区間  $[0,1]$  の有限個の有理数点による分割との組であって、次の2条件を満たすもののことである。

- i) アフィン Weyl 群の元の有限列において、 $u+1$  番目の元から  $u$  番目の元への (半無限 Bruhat 順序の Hasse 図における) 有向道が存在する。
- ii) "chain condition" を満たす。これは、extremal ウェイトやアフィン Weyl 群、および、上の有理数点を用いて記述される組み合わせ論的な条件である。

当博士論文では、半無限 LS パス全体の集合上に「ルート作用素」を定め、それによって、半無限 LS パス全体の集合がクリスタルになることを証明している。そして、主定理は、「この半無限 LS パス全体のなすクリスタルが、レベル・ゼロ extremal ウェイト加群の結晶基底と (クリスタルとして) 同型になる」というものである。

主定理の証明について簡単に説明しよう。まず、レベル・ゼロ extremal ウェイト加群の結晶基底を  $X$ 、半無限 LS パス全体のなすクリスタルを  $Y$  とする。これらのクリスタル・グラフの連結成分の中には、それぞれ代表的もの  $C, D$  が存在する。まずは、 $C$  と  $D$  がクリスタルとして同型であることを証明する。 $X$  や  $Y$  の他の連結成分は (ウェイトがずれているだけで) それぞれ  $C$  と  $D$  とほぼ同型である。したがって、後は  $X$  や  $Y$  のクリスタル・グラフに連結成分がどれだけあるかを調べればよい。実際、 $X, Y$  共、クリスタル・グラフの連結成分の集合は extremal ウェイトによって定まる多重分割 (multi-partition) の集合によってパラメライズされることがわかる。以上を合わせることで主定理が得られる。

## 審 査 の 要 旨

[批評]

当博士論文で得られた結果は、レベル・ゼロ extremal ウェイト加群を組み合わせ論的に研究する手段を新たに与えるものであり、大変意義があるものと考えられる。また、論文の要旨で述べたように、半無限 LS パスを定義する際に用いられた半無限 Bruhat 順序は、半無限旗多様体などの深い幾何学に由

来するものであるため、近い将来、半無限 LS パスの幾何学的な側面が研究され、今回の結果が幾何学的に応用されることが期待できる。以上のことより、当博士論文は博士号を授与するに十分ふさわしいと判断した。

〔最終試験結果〕

平成 26 年 2 月 14 日、数理物質科学研究科学学位論文審査委員会において審査委員の全員出席のもと、著者に論文について説明を求め、関連事項につき質疑応答を行った。その結果、審査委員全員によって、合格と判定された。

〔結論〕

上記の論文審査ならびに最終試験の結果に基づき、著者は博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。