面積と体積の達人、アルキメデス

2014 年 7 月 10 日

アルキメデスは紀元前 3 世紀の古典古代の人である. 物理の分野ではてこの原理や浮力で有名. 工学では, 船の設計をしたり, 兵器を作ったり活躍した. 色々な顔を持っている科学者である. 今回は数学者として彼がしたことを見ていこう. アルキメデスの定理について話をする.

大事なことのひとつは, アルキメデスの時代に座標の考えはなかったということである. $x^2+y^2=r^2$ は円を表すというように, 近代, 図形が式で表され, 幾何学と代数的な計算が一体となっている. このようなやり方は高校数学でもオーソドックスなものである. しかし, 座標をとって考えるやり方は 17 世紀にデカルトによってもたらされたものなので, アルキメデスの時代には座標をとるという考えがなかった. 古代の数学ではユークリッド幾何のやり方で総合的 (synthetic) に考えていく方法をとる.

大事なことのもうひとつは, アルキメデスは積分のようなことを考えていて, 定積分の創始者と言っていい存在だが, 当時は微分の考えは全くなく, 極限もなかったということである. 高校では極限を習ってから微分の単元があって, $f(x)$ の微分 $f'(x)$ を

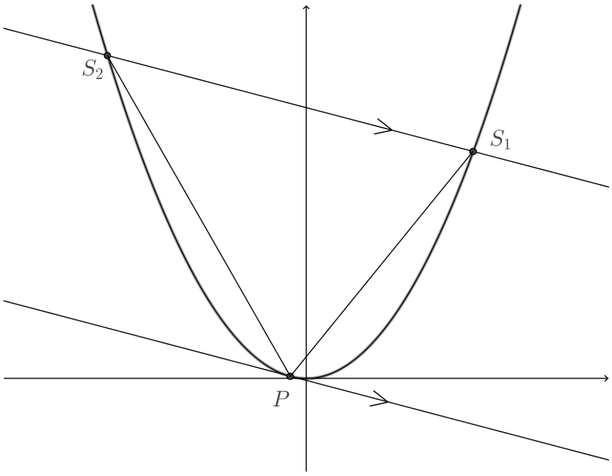
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

と定義した. これらが確立したのはおよそ 19 世紀になってからである.

2 次関数 $y=ax^2$ （ a は定数, $a>0$ とする）と 2 点で交わる直線を $y=mx+n$ とする. 交点を S_1, S_2 とする. 接線の傾きが上記の直線と等しくなる放物線上の点を P とする. アルキメデスの定理とは, 切片の面積と内接する三角形の面積を比較したもの.

アルキメデスの定理

$$(\text{三角形 } PS_1S_2 \text{の面積})\times\frac{4}{3}=(\text{放物線を直線で切った切片の面積})$$



これを 2 つの方法で証明する.

現代数学の方法（高校数学）

$\triangle PS_1S_2$ の面積を計算しよう.
まず, S_1, S_2 の座標を求める.

$$ax^2 - mx - n = 0$$

2 次方程式の解の公式より

$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4an}}{2a}$$

y 座標は

$$\begin{aligned} a \times \left(\frac{m \pm \sqrt{m^2+4an}}{2a}\right)^2 &= \frac{m^2 + (m^2+4an) \pm 2m\sqrt{m^2+4an}}{4a} \\ &= \frac{2m^2 + 4an \pm 2m\sqrt{m^2+4an}}{4a} \\ &= \frac{m^2 + 2an \pm m\sqrt{m^2+4an}}{2a} \end{aligned}$$

したがって

$$S_1\left(\frac{m + \sqrt{m^2+4an}}{2a}, \frac{m^2+2an+m\sqrt{m^2+4an}}{2a}\right)$$

$$S_2\left(\frac{m - \sqrt{m^2+4an}}{2a}, \frac{m^2+2an-m\sqrt{m^2+4an}}{2a}\right)$$

S_1S_2 の距離は

$$
\begin{aligned}
&\left\{\Big(\frac{m+\sqrt{m^2+4an}}{2a}-\frac{m-\sqrt{m^2+4an}}{2a}\Big)^2\right.\\
&\qquad\left.+\Big(\frac{m^2+2an+m\sqrt{m^2+4an}}{2a}-\frac{m^2+2an-m\sqrt{m^2+4an}}{2a}\Big)^2\right\}^{1/2}\\
&=\left\{\Big(\frac{\sqrt{m^2+4an}}{a}\Big)^2+\Big(\frac{m\sqrt{m^2+4an}}{a}\Big)^2\right\}^{1/2}\\
&=\left\{\frac{m^2+4an+m^2(m^2+4an)}{a^2}\right\}^{1/2}\\
&=\frac{\sqrt{(m^2+4an)(1+m^2)}}{a}
\end{aligned}
$$

点 P の座標を求める.

放物線上の点 (x, ax^2) における接線の傾きは $2ax$ であることを用いて, 傾きが m になる点を求める.

$$
\begin{aligned}
m &= 2ax\\
x &= \frac{m}{2a}
\end{aligned}
$$

y 座標は

$$
a\Big(\frac{m}{2a}\Big)^2=\frac{m^2}{4a}
$$

したがって

$$
P\left(\frac{m}{2a},\ \frac{m^2}{4a}\right)
$$

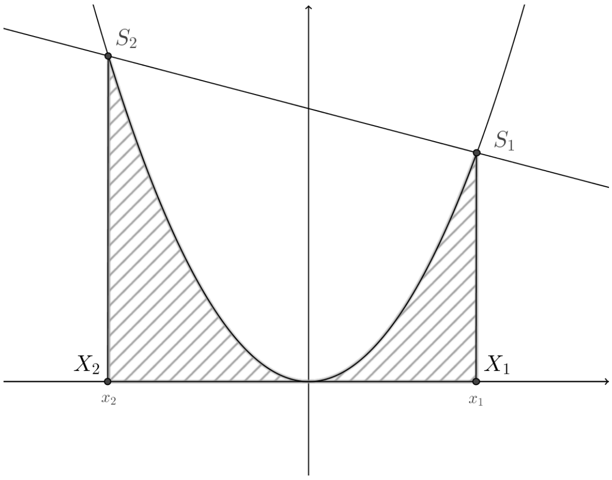
点 P と直線との距離は

$$
\frac{|\frac{m^2}{2a}-\frac{m^2}{4a}+n|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|\frac{m^2}{4a}+n|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{m^2+4an}{4a\sqrt{m^2+1}}
$$

よって $\triangle PS_1S_2$ の面積は

$$
\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{(m^2+4an)(1+m^2)}}{a}\times\frac{m^2+4an}{4a\sqrt{1+m^2}}=\frac{(m^2+4an)^{3/2}}{8a^2}
$$

一方, 切片の面積を求めたいが, そのために放物線の下の面積（図の網掛けの部分）を求める.



数 II で多項式関数の微積分を習うのだが, それを使うと

$$\begin{aligned}
\int_{x_2}^{x_1} ax^2\,dx &= \left[\frac{ax^3}{3}\right]_{x_2}^{x_1} \\
&= \frac{a}{3}\times\left\{\left(\frac{m+\sqrt{m^2+4an}}{2a}\right)^3-\left(\frac{m-\sqrt{m^2+4an}}{2a}\right)^3\right\} \\
&= \frac{1}{24a^2}\times\{(m+\sqrt{m^2+4an})^3-(m-\sqrt{m^2+4an})^3\} \\
&= \frac{6m^2\sqrt{m^2+4an}+2(m^2+4an)^{3/2}}{24a^2} \\
&= \frac{\{6m^2+2(m^2+4an)\}\sqrt{m^2+4an}}{24a^2} \\
&= \frac{(m^2+an)\sqrt{m^2+4an}}{3a^2}
\end{aligned}$$

台形 $S_1S_2X_2X_1$ の面積は

$$\frac{m^2+2an}{a}\times\frac{\sqrt{m^2+4an}}{a}\times\frac{1}{2}=\frac{(m^2+2an)\sqrt{m^2+4an}}{2a^2}$$

台形 $S_1S_2X_2X_1$ の面積から放物線の下の面積を引くと切片の面積が求められる.

$$\begin{aligned}
&\frac{(m^2+2an)\sqrt{m^2+4an}}{2a^2}-\frac{(m^2+an)\sqrt{m^2+4an}}{3a^2} \\
=\ &\frac{3m^2+6an-(2m^2+2an)}{6a^2}\sqrt{m^2+4an} \\
=\ &\frac{(m^2+4an)^{3/2}}{6a^2}
\end{aligned}$$

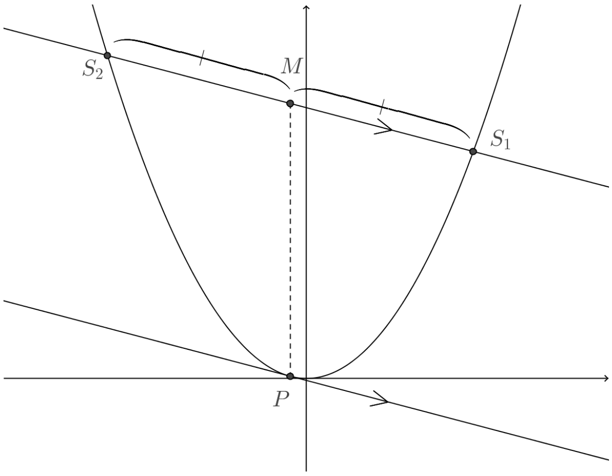
確かに切片の面積は $\triangle PS_1S_2$ の面積 $\dfrac{(m^2+4an)^{3/2}}{8a^2}$ の $\dfrac{4}{3}$ 倍となっており, アルキメデスの定理が証明された.

古代の方法（アルキメデス）

放物線の定義から全てアルキメデスのやり方に遡るのは大変なので, 少し現代風に焼き直して見ていく.

現代数学の方法からわかるように, 点 P の x 座標と S_1S_2 の中点の x 座標は等しい. つまり線分 S_1S_2 の中点から放物線の軸（この場合は y 軸）に平行に直線を引くと放物線と点 P で交わる.

補題 1. S_1S_2 の中点を M とする. M から放物線の軸に平行に引いた直線が放物線と交わる点は P である.



補題 2. 接線上に A, B をとる. A, B から放物線の軸に平行に引いた直線が放物線と交わる点を A', B' とすると

$$\frac{\overline{PA}^2}{\overline{PB}^2} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}$$

が成り立つ.

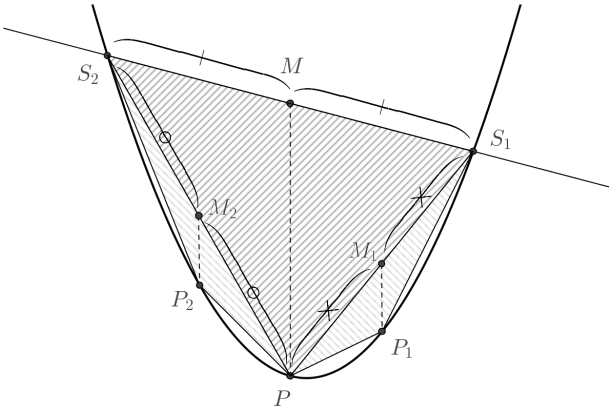
補題 2 を証明するのは宿題にする.

PS_1 の中点 M_1 から放物線の軸に平行に引いた直線が放物線と交わる点を P_1 とする. 同様に PS_2 の中点 M_2 から放物線の軸に平行に引いた直線が放物線と交わる点を P_2 とする.

定理. 面積に関して等式

$$\frac{1}{4}\triangle S_1S_2P = \triangle PP_1S_1 + \triangle PP_2S_2$$

が成り立つ.



この定理を認めれば, アルキメデスの定理を証明できる. $\triangle PP_1S_1$ と $\triangle PP_2S_2$ について同じ操作をする. 新しくできる三角形にも同じ操作を繰り返して足せば, 放物線の切片の面積に近づいていく. $\triangle S_1S_2P$ の面積を $\mathbf{T}$ と表すことにすると, 放物線の切片の面積は,

$$\begin{aligned} & \mathbf{T} + \frac{1}{4}\mathbf{T} + \left(\frac{1}{4}\right)^2\mathbf{T} + \left(\frac{1}{4}\right)^3\mathbf{T} + \cdots \\ = \; & \mathbf{T}\Big\{1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots\Big\} \\ = \; & \mathbf{T}\,\frac{1}{1-1/4} \\ = \; & \frac{4}{3}\mathbf{T} \end{aligned}$$

である. よって, アルキメデスの定理が成り立つ.

では認めた定理の証明に入る.

定理の証明.

M_1P_1 を延長して接線と交わる点を Q_1, S_1 から放物線の軸に平行に引いた直線が接線と交わる点を ${Q_1}'$ とする. PP_1 を延長して $S_1{Q_1}'$ と交わる点を ${P_1}'$ とする.

$\overline{PQ_1} : \overline{P{Q_1}'} = 1 : 2$ だから補題 2 より $\overline{P_1Q_1} : \overline{S_1{Q_1}'} = 1 : 4$ である. また, $\overline{M_1Q_1} : \overline{S_1{Q_1}'} = 1 : 2$ だから $\overline{S_1{Q_1}'} = l$ とすれば $\overline{M_1P_1} = \frac{1}{4}l$ である.

$S_1{Q_1}'$ と 点 P の距離を h とすると

$$\triangle S_1PP_1 = \triangle M_1P_1P + \triangle M_1P_1S_1 = \frac{1}{8}lh$$

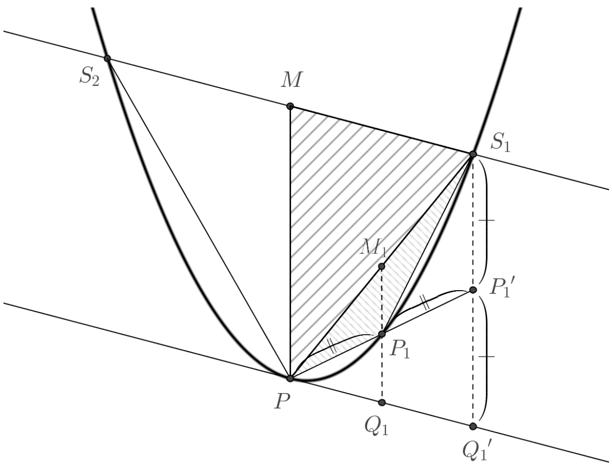
一方で四角形 $MP{Q_1}'S_1$ は平行四辺形だから

$$\triangle MPS_1 = \triangle P{Q_1}'S_1 = \frac{1}{2}lh$$

まったく同様に $\triangle MPS_2 : \triangle PP_2S_2 = 4 : 1$ となるので

$$\frac{1}{4}\triangle S_1S_2P = \triangle PP_1S_1 + \triangle PP_2S_2$$

が成り立つ. $\square$



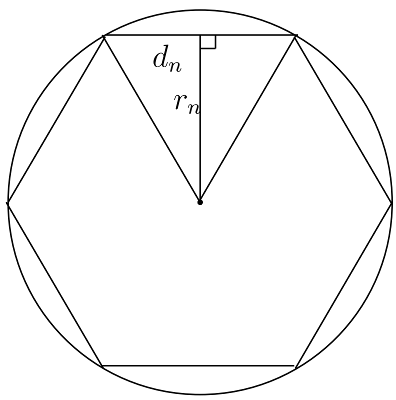
アルキメデスは円周の長さ, 円の面積も考えている. 三角形なら原則的に面積を求められるということに基づく.

円の半径を r とする. 円の周の長さ $L(r)$ は r に比例し, 面積 $A(r)$ は r^2 に比例する.

$$\begin{aligned} \text{円周：}\quad L(r) &= k_1 r \\ \text{面積：}\quad A(r) &= k_2 r^2 \end{aligned}$$

$k_1 = 2\pi$ となるように π を決め, k_2 との関係を求めよう.

半径 1 の円を考える. それに内接する正 n 角形を描く.



正 n 角形の一辺の長さを d_n, 円の中心から辺までの距離を r_n とすると, 図のような三角形ひとつ分の面積は $\dfrac{1}{2}d_n r_n$ だから, 正 n 角形の面積は $n \cdot \dfrac{1}{2}d_n r_n$ となる.

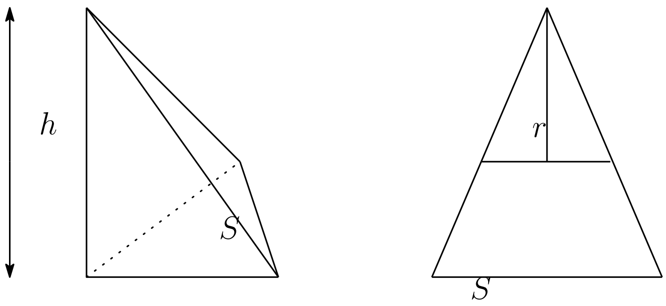
$n \to \infty$ とすると正 n 角形の面積は円の面積に近づいていく. $r_n \to 1,\ n \cdot d_n \to 2\pi$ だから面積は π に近づく.

よって半径 1 の円の面積は π .

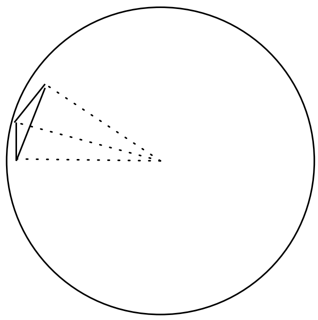
この円の面積は内接する正多角形よりは大きく, 外接する正多角形よりは小さいことから, アルキメデスは π の値の範囲が $3\dfrac{10}{71} < \pi < 3\dfrac{1}{7}$ であるという結果を得た.

アルキメデスは球の体積についても考えている. 今度は基本となるのは三角錐である.

底面積 S, 高さ h の三角錐の体積は $\dfrac{1}{3}hS$, 積分して求めるなら $\displaystyle\int_0^h \left(\frac{r}{h}\right)^2 S\,dr$ である.



図のように球を三角錐に分ける. 球の表面積 $S = 4\pi r^2$ は別のやり方で出しておく.



三角錐を細かくすると, その高さは球の半径 r に近づき, よって球の体積は

$$\frac{1}{3} r S = \frac{4}{3} \pi r^3$$

となる. アルキメデスの墓石には球の表面積と体積の関係が記されている.