

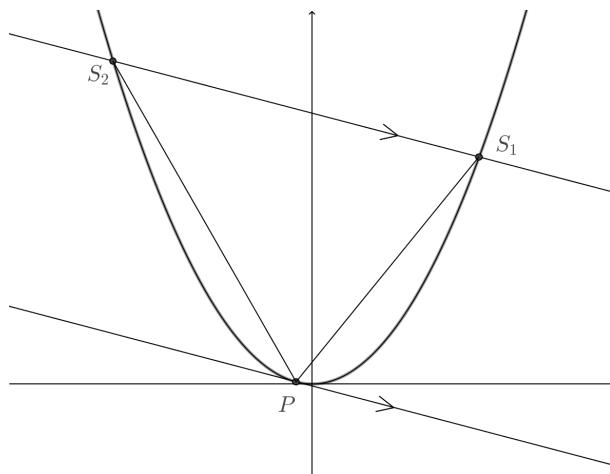
古典古代の解析学者、アルキメデス

2014 年 5 月 8 日

2 次関数 $y = ax^2$ (a は定数, $a > 0$ とする) と 2 点で交わる直線を $y = mx + n$ とする。交点を S_1, S_2 とする。接線の傾きが上記の直線と等しくなる放物線上の点を P とする。アルキメデスの定理とは、切片の面積と内接する三角形の面積を比較したもの。

アルキメデスの定理 —————

$$(\text{三角形 } PS_1S_2 \text{ の面積}) \times \frac{4}{3} = (\text{放物線を直線で切った切片の面積})$$



これを 2 つの方法で証明する。

現代数学の方法（高校数学）

$\triangle PS_1S_2$ の面積を計算しよう。

まず、 S_1, S_2 の座標を求める。

$$ax^2 - mx - n = 0$$

2 次方程式の解の公式より

$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4an}}{2a}$$

y 座標は

$$\begin{aligned} a \times \left(\frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4an}}{2a} \right)^2 &= \frac{m^2 + (m^2 + 4an) \pm 2m\sqrt{m^2 + 4an}}{4a} \\ &= \frac{2m^2 + 4an \pm 2m\sqrt{m^2 + 4an}}{4a} \\ &= \frac{m^2 + 2an \pm m\sqrt{m^2 + 4an}}{2a} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} S_1 &\left(\frac{m + \sqrt{m^2 + 4an}}{2a}, \frac{m^2 + 2an + m\sqrt{m^2 + 4an}}{2a} \right) \\ S_2 &\left(\frac{m - \sqrt{m^2 + 4an}}{2a}, \frac{m^2 + 2an - m\sqrt{m^2 + 4an}}{2a} \right) \end{aligned}$$

$S_1 S_2$ の距離は

$$\begin{aligned} &\left\{ \left(\frac{m + \sqrt{m^2 + 4an}}{2a} - \frac{m - \sqrt{m^2 + 4an}}{2a} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{m^2 + 2an + m\sqrt{m^2 + 4an}}{2a} - \frac{m^2 + 2an - m\sqrt{m^2 + 4an}}{2a} \right)^2 \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \left(\frac{\sqrt{m^2 + 4an}}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\sqrt{m^2 + 4an}}{a} \right)^2 \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \frac{m^2 + 4an + m^2(m^2 + 4an)}{a^2} \right\}^{1/2} \\ &= \frac{\sqrt{(m^2 + 4an)(1 + m^2)}}{a} \end{aligned}$$

点 P の座標を求める.

放物線上の点 (x, ax^2) における接線の傾きは $2ax$ であることを用いて, 傾きが m になる点を求める.

$$\begin{aligned} m &= 2ax \\ x &= \frac{m}{2a} \end{aligned}$$

y 座標は

$$a \left(\frac{m}{2a} \right)^2 = \frac{m^2}{4a}$$

したがって

$$P \left(\frac{m}{2a}, \frac{m^2}{4a} \right)$$

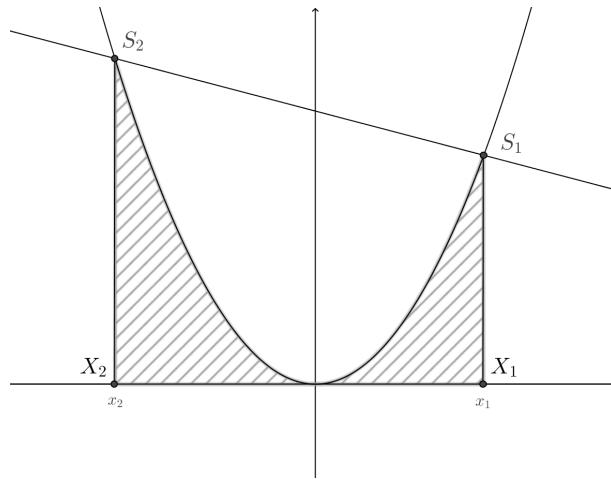
点 P と直線との距離は

$$\frac{\left| \frac{m^2}{2a} - \frac{m^2}{4a} + n \right|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{\left| \frac{m^2}{4a} + n \right|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{m^2 + 4an}{4a\sqrt{m^2 + 1}}$$

よって $\triangle PS_1S_2$ の面積は

$$\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{(m^2 + 4an)(1 + m^2)}}{a} \times \frac{m^2 + 4an}{4a\sqrt{1 + m^2}} = \frac{(m^2 + 4an)^{3/2}}{8a^2}$$

一方、切片の面積を求めるために放物線の下の面積（図の網掛けの部分）を求める。



数IIで多項式関数の微積分を習うのだが、それを使うと

$$\begin{aligned} \left[\frac{ax^3}{3} \right]_{x_2}^{x_1} &= \frac{a}{3} \times \left\{ \left(\frac{m + \sqrt{m^2 + 4an}}{2a} \right)^3 - \left(\frac{m - \sqrt{m^2 + 4an}}{2a} \right)^3 \right\} \\ &= \frac{1}{24a^2} \times \{ (m + \sqrt{m^2 + 4an})^3 - (m - \sqrt{m^2 + 4an})^3 \} \\ &= \frac{6m^2\sqrt{m^2 + 4an} + 2(m^2 + 4an)^{3/2}}{24a^2} \\ &= \frac{\{6m^2 + 2(m^2 + 4an)\}\sqrt{m^2 + 4an}}{24a^2} \\ &= \frac{(m^2 + an)\sqrt{m^2 + 4an}}{3a^2} \end{aligned}$$

台形 $S_1S_2X_2X_1$ の面積は

$$\frac{m^2 + 2an}{a} \times \frac{\sqrt{m^2 + 4an}}{a} \times \frac{1}{2} = \frac{(m^2 + 2an)\sqrt{m^2 + 4an}}{2a^2}$$

台形 $S_1S_2X_2X_1$ の面積から放物線の下の面積を引くと切片の面積が求められる.

$$\begin{aligned} & \frac{(m^2 + 2an)\sqrt{m^2 + 4an}}{2a^2} - \frac{(m^2 + an)\sqrt{m^2 + 4an}}{3a^2} \\ &= \frac{3m^2 + 6an - (2m^2 + 2an)}{6a^2} \sqrt{m^2 + 4an} \\ &= \frac{(m^2 + 4an)^{3/2}}{6a^2} \end{aligned}$$

確かに切片の面積は $\triangle PS_1S_2$ の面積 $\frac{(m^2 + 4an)^{3/2}}{8a^2}$ の $\frac{4}{3}$ 倍となっており, アルキメデスの定理が証明された.

古代の方法（アルキメデス）

座標平面を用いて考えるやり方は 17 世紀にデカルトによってもたらされたもので, アルキメデスの証明は別の方法である. 近代, 図形が式で表されるようになり, 幾何学と代数的な計算が一体となった. このようなやり方は高校数学でもオーソドックスなものである.

ここからはユークリッド幾何のやり方で総合的 (synthetic) に考えていく古代の数学を見ていくこ^う.

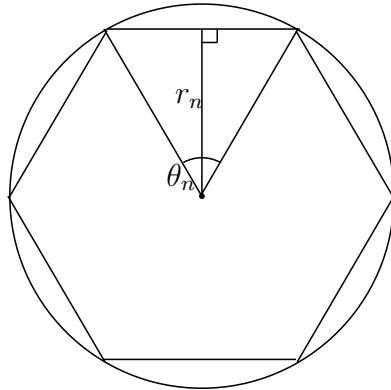
アルキメデスは円周の長さ, 円の面積も考えている.

円の半径を r とする. 円の周の長さ $L(r)$ は r に比例し, 面積 $A(r)$ は r^2 に比例する.

$$\begin{aligned} \text{円周: } L(r) &= k_1 r \\ \text{面積: } A(r) &= k_2 r^2 \end{aligned}$$

$k_1 = 2\pi$ となるように π を決め, k_2 との関係を求めよう.

半径 1 の円を考える. それに内接する正 n 角形を描く. $\theta_n = 2\pi/n$ とする.



円の中心から辺までの距離を r_n とすると, 図のような三角形ひとつの半分の面積は $\frac{1}{2}r_n \sin \frac{\theta_n}{2}$ だから, 正 n 角形の面積は

$$2n \times \frac{1}{2}r_n \sin \frac{\theta_n}{2} = r_n \left(n \sin \frac{\theta_n}{2} \right)$$

となる. $n \rightarrow \infty$ とすると正 n 角形の面積は円の面積に近づいていく. $r_n \rightarrow 1$, $n \sin \frac{\theta_n}{2} \rightarrow \pi$ だから面積は π に近づく.

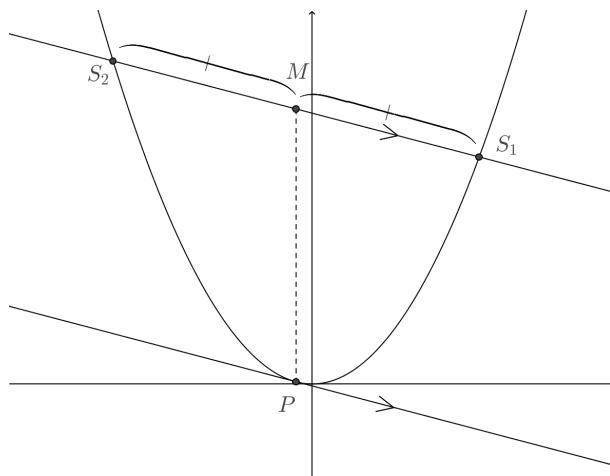
よって半径 1 の円の面積は π .

この円の面積は内接する正多角形よりは大きく, 外接する正多角形よりは小さいことから, アルキメデスは π の値の範囲が $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ であるという結果を得た.

本題の定理に戻り, アルキメデスがどのように考えたか見ていく.

現代数学の方法からわかるように, 点 P の x 座標と S_1S_2 の中点の x 座標は等しい. つまり線分 S_1S_2 の中点から放物線の軸 (この場合は y 軸) に平行に直線を引くと放物線と点 P で交わる.

補題 1. S_1S_2 の中点を M とする. M から放物線の軸に平行に引いた直線が放物線と交わる点は P である.



補題 2. 接線上に A, B をとる. A, B から放物線の軸に平行に引いた直線が放物線と交わる点を A', B' とすると

$$\frac{\overline{PA}^2}{\overline{PB}^2} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}$$

が成り立つ.

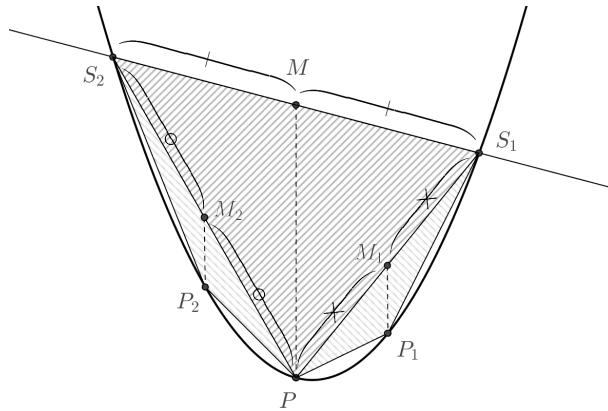
補題 2 を証明するのは宿題にする.

PS_1 の中点 M_1 から放物線の軸に平行に引いた直線が放物線と交わる点を P_1 とする. 同様に PS_2 の中点 M_2 から放物線の軸に平行に引いた直線が放物線と交わる点を P_2 とする.

定理. 面積に関して等式

$$\frac{1}{4} \triangle S_1S_2P = \triangle PP_1S_1 + \triangle PP_2S_2$$

が成り立つ.



この定理を認めれば、アルキメデスの定理を証明できる。 $\triangle PP_1S_1$ と $\triangle PP_2S_2$ について同じ操作をする。新しくできる三角形にも同じ操作を繰り返して足せば、放物線の切片の面積に近づいていく。 $\triangle S_1S_2P$ の面積を T と表すことになると、放物線の切片の面積は、

$$\begin{aligned} & T + \frac{1}{4}T + \left(\frac{1}{4}\right)^2 T + \left(\frac{1}{4}\right)^3 T + \dots \\ &= T \left\{ 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots \right\} \end{aligned}$$

である。

無限和の部分を計算したい。無限和の部分を K とおく。そこから K を $\frac{1}{4}$ 倍したものと引くと

$$\begin{array}{rcl} K & = & 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots \\ -) \quad \frac{1}{4}K & = & \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots \\ \hline \left(1 - \frac{1}{4}\right)K & = & 1 \\ K & = & \frac{4}{3} \end{array}$$

と求められる。

よって、放物線の切片の面積は $\frac{4}{3}T$ となり、アルキメデスの定理が成り立つ。

定理の証明に入る。

定理の証明。

M_1P_1 を延長して接線と交わる点を Q_1 , S_1 から放物線の軸に平行に引いた直線が接線と交わる点を Q'_1 とする。 PP_1 を延長して $S_1Q'_1$ と交わる点を P'_1 とする。

$\overline{PQ_1} : \overline{PQ'_1} = 1 : 2$ だから補題 2 より $\overline{P_1Q_1} : \overline{S_1Q'_1} = 1 : 4$ である。また, $\overline{M_1Q_1} : \overline{S_1Q'_1} = 1 : 2$ だから $\overline{S_1Q'_1} = l$ とすれば $\overline{M_1P_1} = \frac{1}{4}l$ である。

$S_1Q'_1$ と点 P の距離を h とすると

$$\triangle S_1PP_1 = \triangle M_1P_1P + \triangle M_1P_1S_1 = \frac{1}{8}lh$$

一方で四角形 $M P Q_1' S_1$ は平行四辺形だから

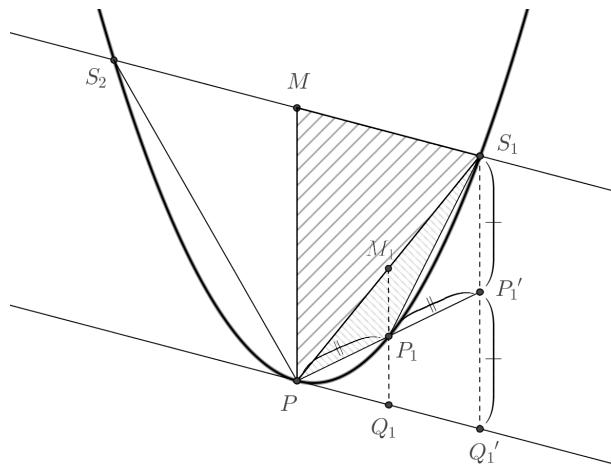
$$\triangle MPS_1 = \triangle PQ_1'S_1 = \frac{1}{2}lh$$

まったく同様に $\triangle MPS_2 : \triangle PP_2S_2 = 4 : 1$ となるので

$$\frac{1}{4}\triangle S_1S_2P = \triangle PP_1S_1 + \triangle PP_2S_2$$

が成り立つ.

□



アルキメデスの時代には今のような極限の考えがなかったので実際はもう少し慎重に証明されているが、現代風に焼き直すとこのような具合である。