

氏名(本籍)	もり 森	おか 岡	ひさし 悠	(島根県)
学位の種類	博士(理学)			
学位記番号	博甲第6378号			
学位授与年月日	平成25年3月25日			
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当			
審査研究科	数理物質科学研究科			
学位論文題目	<b>On inverse spectral problems for discrete Schrödinger operators on the square lattice and related topics</b> (正方格子上の離散シュレーディンガー作用素のスペクトル逆問題と関連する話題について)			
主査	筑波大学教授	理学博士	磯崎	洋
副査	筑波大学教授	理学博士	笠原	勇二
副査	筑波大学教授	博士(数理科学)	竹内	潔
副査	筑波大学准教授	博士(理学)	木下	保

### 論文の内容の要旨

森岡氏の学位論文のテーマは次の3つである。

- (1) 離散シュレーディンガー作用素に対する境界値逆問題
- (2) 離散シュレーディンガー作用素に対する Rellich 型定理
- (3) 離散シュレーディンガー作用素に対する一つのエネルギーからの逆散乱問題

いずれも正方格子上のポテンシャルを持ったシュレーディンガー作用素のスペクトル理論、逆問題を扱う。これらの問題の原型は連続モデルであるところのユークリッド空間上のシュレーディンガー作用素である。離散モデルは一見、連続モデルよりも易しくみえる。たしかに有界作用素を扱うことになるという意味で、離散モデルは少し取扱いが楽になるのだが、連続モデルに対して適用できた解析的テクニックが使えなくなる点では、はるかに難しいものになる。そのため、離散シュレーディンガー作用素の研究はこれまであまり進んではいなかった。しかし、最近の固体物理学においては離散モデルを導入して数値計算を行う方法が発展しており、この分野の理論的研究が重要になってきている。森岡氏の研究は離散シュレーディンガー作用素の数学的研究に新しい知見をもたらしている。

研究(1)では有界領域での境界値問題を考える。境界上にディリクレデータを与え、解のノイマンデータを計算する。ディリクレデータに対してノイマンデータを与える写像を DN 写像とよぶ。この DN 写像は与えられたシュレーディンガー作用素のすべての情報を含んでいる、と信じられており、実際連続モデルに対しては証明されている。離散モデルに対しては領域の形を簡単なものにすれば同じことが成り立ち、かつポテンシャルを DN 写像から計算するアルゴリズムも知られている。森岡氏は任意の形の領域に対してすべてのエネルギーに対する DN 写像を使えばこのことが可能であることを示した。さらにその事実は連続モデルの場合の Borg-Levinson 型の定理として定式化された。これが(1)の内容である。

研究(2)ではレリッヒ型の定理を扱う。連続モデルの場合にはこれは次のような定理である。ヘルムホルツ方程式の正のエネルギーの解で遠方であるオーダーで減衰するものは無限遠の近傍で0になる。さらに

楕円型方程式に対する一意接続定理を使えば解は考えている領域全体で0になる。これは微分方程式論自身として興味深いのみならず他の多くの問題で鍵となる重要な事実である。実際、このレリッヒの定理からシュレーディンガー作用素の連続スペクトルの中に埋め込まれた固有値が存在しないこと、シュレーディンガー方程式の放射条件を満たす解の一意性、レゾルベントに対する極限吸収原理などの重要な事実が導かれる。連続モデルにおけるレリッヒの定理には多くの研究があるが、離散モデルに対してはこれまで全く研究がなかった。またグラフ上のラプラシアンに対しては一般に一意接続定理が成り立たないことも知られており、この方面の肯定的研究は進んでいなかった。森岡氏は正方格子上の離散ラプラシアンに対してある種の閾値を除いて連続モデルの場合と全く同様のレリッヒ型の定理が成り立つことを示した。これからさらにコンパクトな台のポテンシャルを持ったシュレーディンガー作用素の連続スペクトルの中に埋め込まれた固有値の非存在と放射条件を満たす解の一意性を示した。また外部領域において一意接続性を保証するための円錐条件を導入し、これらの結果を外部境界値問題にも拡張した。これらは初めて得られた結果であり離散シュレーディンガー作用素のスペクトル理論を大きく進展させるものである。証明には実領域における微分方程式論の知識のみならず、多変数解析関数論からの事実と代数幾何におけるヒルベルトの零点定理を用いるが、いろいろな数学の手法が融合され、非常に興味深いものである。

研究(3)では散乱理論における逆問題を扱う。無限遠から入射された量子力学的粒子はポテンシャルによって跳ね返され無限遠に帰る。無限遠の入射粒子に無限遠の散乱粒子を対応させる作用素をハイゼンベルグのS行列と呼ぶ。このS行列は元の物理系のすべての情報を含んでいるであろうと信じられている。とくにS行列からポテンシャルを求める問題を散乱の逆問題と呼んでいる。連続モデルに対しては散乱の逆問題の研究は1950年代以来盛んに研究されてきた。特に1980年代後半に示された一つのエネルギーに対応するS行列からポテンシャルを再構成する手順は大きな成果である。最初3次元以上で示されたこの結果を2次元に拡張するには非常に時間がかかり、20年後の2000年台後半にやっと示された。対応する離散モデルに対しては全く研究がなされていなかったが、森岡氏は全く同様の結果が離散シュレーディンガー方程式に対しても成立することを示した。如実なことは空間次元には全く影響されず、2次元以上において統一的なアイデアで議論が進むことである。さらに証明は構成的であり、S行列からポテンシャルを計算するアルゴリズムも与えられている。証明の中で(2)におけるレリッヒ型の定理が本質的な役割を果たしていることも極めて印象的である。

以上のことから森岡氏の研究は真に学位に値すると結論される。

## 審 査 の 結 果 の 要 旨

与えられたシュレーディンガー作用素のスペクトルに関連した量から元のシュレーディンガー作用素を定める問題を逆問題という。本論文は正方格子上の散乱の逆問題において一つのエネルギーに対するS行列からポテンシャルを再構成できることを初めて証明した独創的なものである。離散シュレーディンガー作用素の逆問題の研究は困難であり、1次元の場合を除いてほとんど存在しない。本論文では正方格子を扱ったが、他にもカゴメ格子等の重要な例がある。また、磁場の問題、格子欠損の問題等、摂動項のみならず格子構造そのものを問う逆問題も重要である。近年グラフ上のラプラシアンのスペクトル問題が発展しつつあるが、多くはスペクトルの決定、固有値の計算等にとどまり、完全な逆問題を扱う仕事はまれである。本論文は物理学における基本的な問題に対して逆問題の解決をもたらしたという点で大きな意義があり、格子上の逆散乱問題研究に大きなインパクトを与える重要な論文と考えられる。

平成25年2月14日、数理物質科学研究科学学位論文審査委員会において審査委員の全員出席のもと、著者に論文について説明を求め、関連事項につき質疑応答を行った。その結果、審査委員全員によって、合格と

判定された。

上記の論文審査ならびに最終試験の結果に基づき、著者は博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。