

氏名(本籍)	安藤和典(埼玉県)			
学位の種類	博士(数学)			
学位記番号	博甲第6328号			
学位授与年月日	平成24年9月30日			
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当			
審査研究科	数理物質科学研究科			
学位論文題目	Inverse Scattering Theory for Discrete Schroedinger Operators on the Hexagonal Lattice and Related Topics (六角格子上の離散シュレーディンガー作用素の逆散乱理論とそれに関連する話題について)			
主査	筑波大学教授	理学博士	磯崎洋	
副査	筑波大学教授	理学博士	笠原勇二	
副査	筑波大学教授	理学博士	田島慎一	
副査	筑波大学教授	博士(数理学)	竹内潔	
副査	筑波大学准教授	博士(理学)	竹山美宏	

論文の内容の要旨

六角格子は蜂の巣状の構造を持った炭素の2次元系であるグラフェンの離散モデルである。この格子上的電子の挙動は固体物理において活発に研究されているが、数学的研究はそれに比して数少なく、今後の進展が望ましい。本論文は六角格子上の有限部分に台をもつポテンシャルの下での電子の逆散乱問題を扱うものである。主要な結果は以下のとおりである。

- (1) この系を記述する離散シュレーディンガー作用素の連続スペクトルの決定。
- (2) レゾルベントに対する極限吸収原理の証明。
- (3) 波動作用素の漸近完全性とS行列のユニタリー性。
- (4) 連続スペクトルを記述する一般固有関数系の構成とS行列の表示。
- (5) すべてのエネルギーに対するS行列からのポテンシャルの再構成。

散乱とは次のような物理現象である。この格子の遠方から電子の波を送る。この波は有限部分のポテンシャルによって反射され、再び無限遠に去る。無限遠における入射波に対して無限遠における反射波を対応させる作用素がS行列である。物理系の情報はすべてこのS行列に含まれているであろう。よって特にS行列を知ることによりポテンシャルを定めることができるであろうと考えられる。これが逆散乱問題である。逆散乱問題を解決することにより、無限遠の観測データから物理系の性質を探る散乱実験の正当性が保証される。

六角格子に対応する離散シュレーディンガー作用素の運動エネルギー部分は格子上で2成分を持つ無限数列に対する行列型差分作用素であり、極限移行によってDirac作用素に収束することが知られている。従ってこの論文は離散化された2次元Dirac作用素を扱ったものとみなすこともできる。六角格子に対して用いた本論文の手法はそのまま三角格子に対しても適用できる。従って本論文は三角格子に対する問題も同時に解決している。本論文の基礎になっているのは最近のIsozaki-Korotyaevによる正方格子上の離散シュレー

ディンガー作用素に対する逆散乱問題の論文であるが、六角格子は正方格子よりもはるかに複雑な構造をもっており、その解明には正方格子の場合に倍化する計算を必要とする。

フーリエ級数によって問題の離散シュレーディンガーは2次元トーラス上の行列型掛け算作用素と合成積作用素の和の形になる。連続スペクトルの摂動に関するワイルの定理によれば、連続スペクトルは行列型掛け算作用素の部分から決定される。そのために、ポテンシャルがない場合の固有関数系をこの行列からすべて求めることから話が始まる。主要結果の(1)はこのようにしてワイルの定理によって示される。(2)は Mourre の交換子定理によって示される。(3)はトレースクラス摂動に対する一般論によって解決される。シュレーディンガー作用素の連続スペクトルに対して固有関数系が存在し、離散固有値に対応する固有関数系と合わせれば任意の波動関数が展開されるはずである。それを示す一般固有関数展開定理が(4)の内容である。さらにS行列は一般固有関数系によって表示される。これが逆問題のための重要なステップである。本論文の最も重要な部分は(5)にある。連続モデルのシュレーディンガー作用素に対する逆問題の最初の解法は高エネルギー極限による Born 近似であったが、離散モデルではエネルギーが有界になるため、高エネルギー極限は使えない。そのため、この論文では解析接続によって複素領域における高エネルギー極限を用いた Born 近似を採用する。そのために一般固有関数の解析接続とその(複素平面における)無限遠での挙動を調べる必要がある。さらに、レゾルベント部分の減少度の評価のために、それらの多重積を評価する必要があるが、この最も技術的に困難な部分は格子上に新たなノルムを導入することによって解決された。ここは本論文の最も独創的な部分であり、今後、異なる格子上の問題を研究する際に、肝要な点として参照されるであろう。

審 査 の 結 果 の 要 旨

与えられたシュレーディンガー作用素のスペクトルに関連した量とその性質を調べる問題を順問題、スペクトルに関連した量から元のシュレーディンガー作用素を定める問題を逆問題という。本論文は順問題、逆問題の双方を考えたものであるが、先行結果のほとんどないところで得られた独創的なものである。順問題だけをとりあげても、摂動項の有る場合に一般固有関数展開定理(スペクトル表示)を得ることは物理的に重要であるにもかかわらず、これまで行われてこなかったものである。六角格子はかなり複雑なものであり、固有関数系を完全に記述するには多くの計算を必要とする。それを用いて得られた(5)の結果は散乱実験からポテンシャルを定める逆問題の端緒を開くものであり、数学的、物理的に極めて意義深い。離散シュレーディンガー作用素の逆問題の研究は困難であり、1次元の場合を除いてほとんど存在しない。本論文では六角格子を扱ったが、他にもカゴメ格子等の重要な例がある。また、磁場の問題、格子欠損の問題等、摂動項のみならず格子構造そのものを問う逆問題も重要である。近年グラフ上のラプラシアン of the spectrum 問題が発展しつつあるが、多くはスペクトルの決定、固有値の計算等にとどまり、完全な逆問題を扱う仕事はまれである。本論文は物理学における基本的な問題に対して連続スペクトル構造の完全な記述と逆問題の解決をもたらしたという点で大きな意義があり、格子上の逆散乱問題研究のプロトタイプを与える重要な論文と考えられる。

平成24年8月30日、数理物質科学研究科学学位論文審査委員会において審査委員の全員出席のもと、著者に論文について説明を求め、関連事項につき質疑応答を行った。その結果、審査委員全員によって、合格と判定された。

上記の論文審査ならびに最終試験の結果に基づき、著者は博士(数学)の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。