

## 科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 3 日現在

機関番号：12102

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2012

課題番号：23740019

研究課題名（和文） 非有理的な頂点作用素代数の表現のフュージョン則の研究

研究課題名（英文） Fusion rules for irrational vertex operator algebras

研究代表者

有家 雄介 (ARIKE YUSUKE)

筑波大学・数理物質系・助教

研究者番号：50583770

研究成果の概要（和文）：

シンプレクティックフェルミオン型とよばれる半単純ではない頂点作用素代数の既約表現の間の交絡作用素とよばれるものをつくるベクトル空間の次元を決定した。さらに、この頂点作用素代数のスーパー版に関する考察を行い、既約でない加群の間の対数的交絡作用素と呼ばれるものの空間を決定し、一部の表現のテンソル積を計算した。

研究成果の概要（英文）：

We determine the dimensions of the spaces of intertwining operators among irreducible modules for the vertex operator algebra arising from symplectic fermions. We also determine the dimensions of the spaces of logarithmic intertwining operators among indecomposable modules for the vertex operator superalgebra arising from symplectic fermions. By using this result we calculated tensor products of some indecomposable modules.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
交付決定額	1,600,000	480,000	2,080,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：代数学

キーワード：頂点作用素代数・共形場理論・フュージョン則

## 1. 研究開始当初の背景

頂点作用素代数は共形場理論を数学的に公理化した代数系の一つで、数理物理学のみならず、有限単純群、モジュラー形式、モノイダル圏などの数学的対象と密接なかかわりのあるものである。

本研究で取り扱う交絡作用素は、頂点作用素代数の表現の間に定義される「積」のようなものであり、ムーンシャイン加群の構成に用いられたオービフォールド構成法や表現のテンソル積の理論などの重要な研究で用いられる対象である。共形場理論の立場からは、射影直線上の3点共形ブロックに対応する。頂点作用素代数の表現論において、既約表現

の分類などと並んで交絡作用素の空間の決定は基本的な問題である。

本研究の開始より少し前から表現の圏が半単純とならない頂点作用素代数(非有理的とよばれる)の研究が活発になってきている。代表者は、非有理的な頂点作用素代数において、共形場理論との対応から対数項をもつような交絡作用素を考えることが自然であることを示した。しかし、非有理的な頂点作用素代数の例が多く知られていたわけではなく、対数的な交絡作用素が実際に構成された例はあまり多くなかった。

## 2. 研究の目的

上述の背景をもとに、本研究では非有理性的な頂点作用素代数の表現の間の対数的な交絡作用素を構成し、その空間の次元を求めることを目的とする研究を行った。具体的にはシンプレクティックフェルミオン頂点作用素代数の既約表現の間の交絡作用素の空間の次元の決定し、さらにその表現の間の対数的交絡作用素の構成と、その次元の決定を主な目的とした。

シンプレクティックフェルミオン頂点作用素代数は 2007 年に安部利之氏により数学的に構成され、その既約表現が分類された。さらに安部氏はこの頂点作用素代数の既約ではないが直既約な表現を構成し、この頂点作用素代数が有理性的でないことを示している。この頂点作用素代数は研究開始当初に数学的に構成されていた非有理性的な頂点作用素代数の数が少ない一つであり、直既約加群が構成されているという点でも非常によく調べられている代数であった。しかし、基本的な問題である既約表現の間の交絡作用素の決定が行われていなかった。そこでまず、既約表現の間の交絡作用素を決定することを目標とし、その結果で得られた知見を用いて直既約加群の間の対数的交絡作用素を考察することとした。

## 3. 研究の方法

研究目標を達成するために、以下のステップで研究を行った。

- (1) 既約表現の Frenkel-Zhu 両側加群を計算することで、交絡作用素の空間の次元を上から抑える。
- (2) 上限が 0 とならない既約表現の組の交絡作用素を構成する。

以上によりシンプレクティックフェルミオン頂点作用素代数の既約表現の間の交絡作用素の空間を決定する。

また、対数的交絡作用素については、当初の予定では、高次 Frenkel-Zhu 両側加群を用いて研究する予定であったが、シンプレクティックフェルミオン頂点作用素代数がある頂点作用素超代数の偶部分であることに着目して、まずその頂点作用素超代数の交絡作用素を調べる方法に切り替えた、すなわち、

- (3) 対応する頂点作用素超代数の直既約表現の間の交絡作用素を構成する。超代数の表現を頂点作用素代数の加群に制限することにより、対数的交絡作用素を構成する。

以下各ステップに関する説明を行う。

- (1) 頂点作用素代数の表現の交絡作用素に関する研究として、Frenkel-Zhu により、頂点作用素代数の Zhu 代数の両側加群として、Frenkel-Zhu 両側加群が導入されている。この両側加群は、頂点作用素代数の表現をある部分空間で割ったものがある。Frenkel-Zhu は Frenkel-Zhu 両側加群を用いて、交絡作用素の空間の次元の上限を見つける方法を提案した。この方法を使う上では、Frenkel-Zhu 両側加群の加群としての生成元を求めることが本質的である。
- (2) 頂点作用素代数の表現の構造を与える作用を用いれば、頂点作用素代数自体を表現として含むような組の交絡作用素はつねに一つは存在する。また、シンプレクティックフェルミオン頂点作用素代数は、偶次元のベクトル空間に付随して得られるものであるが、高い次元のベクトル空間から得られる代数およびその表現は、次元が 2 のベクトル空間から得られる代数のテンソル積で得られる代数とその表現となっている。この事実を用いることで、もっとも簡単な 2 次元のベクトル空間から得られる代数の場合に、交絡作用素を決定し、それらのテンソル積で得られる代数としての構造を用いれば、交絡作用素に関する、Abe-Dong-Li の結果を用いることで、すべての交絡作用素の空間の次元が得られる。

また、対数的交絡作用素の場合は以下のよう

- (3) 対応する頂点作用素超代数の直既約表現ではその特異ベクトルの空間が最低ウェイトの空間と一致している。これは外積代数と同型である。そこで、外積代数から加群の間の作用素を構成し、そこから表現全体の作用素へ誘導する、という手順で交絡作用素を構成する。また、頂点作用素代数へ制限する上で、超代数の自然な位数 2 の自己同型に付随する振じれ加群を考察することが必要になる。振じれ加群に対しても交絡作用素の概念が定義されており、通常の表現の場合の類似を考える。これらの結果の偶部分への制限を考える。また超代数に関しても、2 次元のベクトル空間から得られる超代数を初めに考察し、そのテンソル積でえられる代数とその表現を用いることにより、目的を達成する。

#### 4. 研究成果

- (1) シンプレクティックフェルミオン頂点作用素代数の既約表現の間の交絡作用素の空間の次元について.

まず, 初年度は研究方法の(1)および(2)を解決するための研究を行った.(1)では, 基になるベクトル空間の次元が2の代数およびその表現に関して, 次数に関する帰納な方法により, すべての既約加群においてその最低次数の空間により Frenkel-Zhu 両側加群が生成されることを示した. この結果を用いて, 次元の上限を計算すると, 上限は0もしくは1であり, (2)で挙げたような組以外はすべて0になることを証明した. この結果をわかりやすく表示するため, フュージョン代数と呼ばれる既約表現に対応する基底をもつ自由加群に, 積の基底への分解を交絡作用素の空間の次元を用いて定義される結合代数が整数感情の  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  の群環と同型になることを示した.

この結果は, 安部利之氏との共著論文として, Journal of Algebra に発表された.

- (2) シンプレクティックフェルミオン頂点作用素超代数の表現の間の対数的交絡作用素とその偶部分の対数的交絡作用素

超代数を考察するに当たり, 表現のテンソル積の理論などと見比べると, これまで知られていた超代数の表現の圏および交絡作用素の概念がシンプレクティックフェルミオンの場合には不都合が多く生まれることを観察した. さまざまな具体例では頂点作用素超代数はある作用素に関する固有値が半整数の固有空間分解をもち, 奇部分は  $1/2 + \text{整数}$  の固有値を持っている. これにより, 表現の圏における  $\mathbb{Z}_2$  による次数付けをあまり考えに入れる必要がなかった. しかし, シンプレクティックフェルミオンにおいては奇部分も整数で次数付されており, 表現の圏において,  $\mathbb{Z}_2$  による次数のつけ方には自由度があるため, あらかじめ指定しなければならない. これに伴って, 交絡作用素においても, パリティによる補正を考える必要がある. これらの一般論を展開し, Abe-Dong-Li の代数のテンソル積と交絡作用素の関係の超代数版を考え, 超代数のテンソル積と, それぞれの因子の表現の交絡作用素の空間のテンソル積が同型であることを証明した. これらの結果を振じれ加群に対しても拡張した.

以上の内容は, 安部利之氏との共同研究と

して原稿を準備中である.

つづいて, シンプレクティックフェルミオン頂点作用素超代数に関する考察をおこなった. まず, この代数の表現および自然な自己同型に付随する振じれ加群の圏を考察し, それぞれの射影的对象を決定した. このとき, 振じれ加群の圏は既約なものが2つ(集合としては同じだが  $\mathbb{Z}_2$  次数付が異なるもの)半単純圏となることを示した.

次に, 2次元ベクトル空間の外積代数から表現や振じれ加群の間の線形写像を係数に持つ半交絡作用素と呼ばれるものを導入し, 半交絡作用素の空間と, 対数的交絡作用素の空間の間の同型写像を構成した. さらに, 表現の圏および振じれ加群の圏の射影的对象たちの組の間の半交絡作用素を構成し, 上の同型写像を用いることで, 対数的交絡作用素を構成した. これにより, 2次元ベクトル空間に付随するシンプレクティックフェルミオン頂点作用素超代数の射影的な表現や振じれ加群に対する交絡作用素がすべて決定され, 準備した一般論を用いると偶数次元のベクトル空間に付随する超代数すべてに関して, 対数的交絡作用素の空間の次元が得られたことになる.

さらに, 宮本雅彦氏による頂点作用素代数の表現のテンソル積の対数的交絡作用素を用いて定義する理論の類似を超代数においても導入した. これと対数的交絡作用素の計算結果を用いることで, 直既約な射影的对象のテンソル積の直既約分解を計算し, 射影的なもの同士テンソル積が射影的となることを確認した.

この内容も, 安部利之氏との共著として原稿を準備中である.

本研究の目標であった, シンプレクティックフェルミオン型の頂点作用素代数の対数的交絡作用素の構成は研究期間中には果たせなかった. 現在, 今回得られた知見をもとに, より一般的な視点に立った, 頂点作用素超代数の表現論および偶部分から得られる頂点作用素代数の表現論の関係(ある条件下での圏同値および交絡作用素の対応)についての考察を進めている.

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

1. Toshiyuki Abe, Yusuke Arike, Intertwining operators and fusion rules for vertex operator algebras arising from symplectic fermions, Journal of Algebra 373, 2013, 39-64. DOI:10.1016/j.jalgebra.2012.09.02, 査読有.

[学会発表] (計 3 件)

1. Yusuke Arike, Pseudo-trace functions on twisted modules, Taitung workshop on group theory, VOA, and algebraic combinatorics, 2013 年 3 月 28 日, National Taitung University (台湾).
2. 有家雄介, Logarithmic intertwining operators for the symplectic fermionic vertex operator superalgebras, ホップ代数と量子群—応用の可能性, 2012 年 9 月 2 日, 京都大学数理解析研究所.
3. Yusuke Arike, Fusion products for the symplectic fermionic vertex operator superalgebras, Conference on Vertex Operator Algebras and Related Topics, 2012 年 8 月 26 日, Shanghai Jiao Tong University (中華人民共和国).

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

有家 雄介 (ARIKE YUSUKE)  
筑波大学・数理物質系・助教  
研究者番号: 50583770

