

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月22日現在

機関番号： 12102  
 研究種目： 挑戦的萌芽研究  
 研究期間： 2010 ～ 2012  
 課題番号： 22654002  
 研究課題名（和文） 格子頂点作用素代数のオービフォルドの研究

研究課題名（英文） Research of Orbifold Theory on Vertex Operator Algebra

## 研究代表者

宮本 雅彦 (MIYAMOTO MASAHIKO)

筑波大学・数理学系・教授

研究者番号： 30125356

## 研究成果の概要（和文）：

共形場理論の重要な問題の一つが有限型理論を構成することである。頂点作用素代数とは全く別の対象から生まれたものであるが、共形場理論の代数版と考えられている。有限型を構成すると予想されている方法に自己同型を使ったオービフォルド理論があるが、非常に難しい。今回は、良く扱われる格子頂点作用素代数に対して、自己同型が位数3の場合には、有限性が成り立ち、新しい有限型の頂点作用素代数が構成できることを示した。

## 研究成果の概要（英文）：

One of important problem on Conformal Field Theory is to construct one of finite type. A vertex operator algebra comes from a different subject, but it is now understood as an algebraic version of Conformal Field Theory. One of the candidates to construct one of finite type is an orbifold theory using a finite automorphism group, but it is not easy. In this research, we succeed to construct a new holomorphic vertex operator algebra using lattice vertex operator algebras and an automorphisms of order 3.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,400,000	0	1,400,000
2012年度	600,000	180,000	780,000
2013年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,700,000	390,000	3,090,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：頂点作用素代数、軌道理論、格子頂点作用素代数、自己同型

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 頂点作用素代数は、局所可換という無限個の関係式を満たさなければならぬために、新しい頂点作用素代数を構成するのは非常に難しく、そのため、知られている例がそれほど多くない。また、実在のモデルに合う頂点作用素代数を構成しようとしても簡単ではない。良いモデルを構成する方法の一つとして、軌道理論が有力な候補と考えられているが、その表現や融合積を調べることが一般には難しい。

(2) 最近の代表研究者が頂点作用素代数のC 2余有限性という性質に注目し、モジュラー不変性、フュージョン積の存在など、その有用性を色々な面で証明してきた。特に、表現がかなり決定できることが分かった。

(3) 非常に興味深いランク 24 のホロモルフィック頂点作用素代数の 71 個の候補者リストが与えられているが、40 個程度しか構成できておらず、ここ 30 年近く何の進展もなかった。

## 2. 研究の目的

(1) 上記の背景により、表現が有限型であるような頂点作用素代数に対して、位数 3 の自己同型による軌道モデル（固定部分代数）も上記のC 2有限性を持っているのではないかと予想し、その証明を見つけることを目標とした。

(2) もし、上記の予想が正しければ、軌道モデルの表現が分かるので、それを利用して、新しい 24 次元ホロモルフィック頂点作用素代数を構成することを目標とする。

## 3. 研究の方法

(1) 頂点作用素代数の問題で、24 次元ホロモルフィック頂点作用素代数がもっとも興味ある対象であり、有名なムーンシャイン頂点作用素代数もこの仲間である。知られていたものはすべて格子頂点作用素代数かまたは位数 2 の自己同型による軌道理論である。それゆえ、本研究では格子頂点作用素代数に注目し、位数 3 の自己同型による固定部分の構造を調べる。

(2) 頂点作用素代数に作用している自己同型が位数 3（すなわち 3 回作用させると自明になる）の場合には、格子を含む内積空間における基底を適切にとることにより、ランクが 2 または 1 の簡単な格子で自己同型で不変なものの直和を内部に含むことがわかり、簡単な場合に議論に帰着させ、そこで、ベクトル空間が生成するフリーボゾン部分の構造を綿密に調べる。この段階では、フリーボゾン部分がC 1有限性を持っているかどうかを確認することである。

(3) 格子の内積空間に埋め込むことによって構成される、内積空間のフリーボゾン部分がC 1余有限性を持つことが確認出来たときには、格子によるルート部分同士の頂点作用素同士の積の計算を始める。特に、内積が  $-1/2$  のルート同士に着目し、C 2のカーネル部分を生み出す元を多様に構成することを目指す。

## 4. 研究成果

(1) 上記の軌道理論における有限性を証明するという目標を達成し、よく使われている格子頂点作用素代数に対しては、作用している自己同型の位数が 3 の場合に、C 2余有限性が遺伝することを証明した。このC 2余有限とは、表現論の立場からみて、既約加群の種類が有限であり、すべての弱加群も既約加群による組成列を持つという意味で、有限型と同値である。

(2) 上記の結果をC 2余有限性を持つ頂点作用素代数に利用することにより、その自己同型による固定空間の表現がわかり、またこれまで知られていたフェアリンデ形式やツイスト加群などの一般理論が応用できるので、新しい頂点作用素代数が構成できる手法を得た。実際、この方法により、初めて奇数位数による軌道理論による新しいホロモルフィック頂点作用素代数の構成に成功した。

(3) 頂点作用素代数とその加群に対して、上記で述べたC 2余有限条件と同じように定義される、C 1余有限条件と呼ばれる有限性がある。しかし、一部の論文を除いて、それに注目した論文はほとんどなかった。今回は、頂点作用素代数の表現論や軌道構成において最も重要なフュージョン積において、このC 1有限性が本質的であり、これがあれば、多くの良い性質が導き出せることを示した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3件)

(1) Masahiko Miyamoto,

A  $Z_3$ -orbifold theory of lattice vertex operator algebra and  $Z_3$ -orbifold construction, Symmetries, Integrable Systems and Representation, 査読有, Vol 364, 2012, 88-89

(2) Masahiko Miyamoto,

Non-vanishing elements in finite groups, Journal of Algebra, 査読有, Vol 364, 2012, 88-89

(3) Masahiko Miyamoto, Koichiro Harada,

A note on a conjecture of K. Harada and strongly  $p$ -embedded Frobenius subgroups, Journal of Group Theory, 査読有, Vol 13, 2010, 469-475

[学会発表] (計 7件)

(1) Masahiko Miyamoto,

$Z_2$ -orbifold theory of vertex operator algebra, Group theory, VOA and Algebraic combinatorics, 2013/3/25, 台東大学 (台湾国立中央研究院と台南大学主催) (中華民国)

(2) Masahiko Miyamoto,

$Z_3$ -orbifold construction of vertex operator algebras, Conference on vertex operator algebras, finite groups and related topics, 2011/12/21, Academia Sinica 台湾国立中央研究院 (中華民国)

(3) Masahiko Miyamoto,

$Z_3$ -orbifold construction of vertex operator algebras, Symmetries, integrable systems and representations, 2011/12/13, リオン第4大学 (フランス)

(4) Masahiko Miyamoto,

$C_2$ -cofiniteness of permutation orbifold models and orbifold models of lattice VOAs, Conformal field theories and tensor categories, 2011/6/14, Beijing International Center (中華人民共和国)

(5) Masahiko Miyamoto,

$Z_3$ -orbifold construction,  
Conformal Field Theory,  
Automorphic Forms and Related  
Topics

2011/9/19

University of Heidelberg (ドイツ)

(6) Masahiko Miyamoto,

巡回置換軌道理論と格子頂点作用素  
代数の軌道理論との関係

第23回有限群論草津セミナー

2011/7/31

草津セミナーハウス

(7) Masahiko Miyamoto,

Orbifold theory of vertex  
operator algebras,  
Research into Vertex Operator  
Algebras, Finite Groups and  
Combinatorics,

2010/12/13

RIMS 京都大学数理解析研究所

〔図書〕 (計 1 件)

(1) 宮本雅彦、

サイエンス社、  
数学の道しるべ、

2011 84-93

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

宮本 雅彦 (MIYAMOTO MASAHIKO)

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号： 30125356

(2) 研究分担者

笈 知之 (KAKEI TOMOYUKI)

岡山大学・理学部・教授

研究者番号： 70231248