

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 6月 7日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22510138

研究課題名（和文）多目的バスケットオプションの動的ヘッジと分散型ポートフォリオマネジメントへの応用

研究課題名（英文）Dynamic hedging of multi-objective basket options and its application to portfolio diversification and management

研究代表者

山田 雄二（YAMADA YUJI）

筑波大学・ビジネスサイエンス系・准教授

研究者番号：50344859

研究成果の概要（和文）：

バスケットオプションとは、オプションの支払い条件が複数の資産価格に依存する派生証券である。本研究では、バスケットオプションに対する効率的ヘッジ手法の構築と実務応用を目的に研究を実施し、以下の成果を示した。(1) バスケットオプションを個別資産オプションで最適近似するアルゴリズムを示し、最適解の理論的性質を明らかにした。(2) 最適ヘッジ手法を計算機上で実装した上で、既存研究である Super-Hedging 手法との比較・検討を行った。(3) バスケットオプションヘッジの考え方を、倒産評価モデルに適用し、複数事業を保有する企業の個別エクイティ価値を求める手法を提案した。

研究成果の概要（英文）：

A basket option is a class of derivatives whose underlying is a weighted sum of different assets or portfolio. In this research, we provide an efficient hedging technique for basket options, where we have shown the following items. (1) We have developed an algorithm to optimally approximate the payoff of basket options using individual options and clarified the theoretical properties. (2) We have demonstrated the efficiency of our proposed optimal hedging technique and compared the optimal hedging strategy with a super-hedging strategy using computer simulations. (3) We have applied our methodology for a basket type Merton's model, where a company with default risk consists of multiple assets.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2012年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：金融工学

科研費の分科・細目：社会・安全システム科学/社会システム工学・安全システム

キーワード：ファイナンス，バスケットオプション，最適ヘッジ，加法モデル，Merton モデル，シミュレーション，リスク管理

## 1. 研究開始当初の背景

原資産が複数の場合を許すバスケットオ

プションは、通常の派生証券理論の多次元への一般化と考えることができる。そのため、バスケットオプションのヘッジ問題を考え

る上では、まず、計算の効率化が鍵となる。ところが、バスケットオプションヘッジは、一般に、高次の確率変数に依存するペイオフの期待値計算やその数値微分を必要とするため、ヘッジ入力を効率的に計算することが難しく、問題の重要性にも関わらず、研究開始時点で有効な計算手法は提案されてこなかった。

一方、申請者は、ノンパラメトリック回帰の一つとして知られる一般化加法モデル(Hastie and Tibshirani 1990)を適用することにより、データ解析的に天候デリバティブを設計する手法を提案し、そのヘッジ効果を検証していた。また、結果を理論的に展開・拡張し、より一般的に、非流動的資産のデリバティブを流動的資産で効率的にヘッジするための手法を提案した。そこでは、直行射影定理を用いることにより、“加法モデル”とよぶ、非流動的資産デリバティブのペイオフとの期待二乗誤差を最小にする流動的資産の関数の和を求め、動的ヘッジを計算する手法を構築していた。申請者が提案した加法モデルを用いた手法は、このように、直接取引することができない(非流動的な)資産のデリバティブを流動的資産の関数の和で近似することが基本的な考え方である。この直接取引することができない資産を多次元のバスケットオプションに、流動的な資産を、バスケットオプションを構成する個別資産におきかえることで、加法モデルをバスケットオプションヘッジに対して拡張することができないかと考えたのが、本研究の着想に至った経緯であった。また、通常、バスケットオプションヘッジは、多変量の期待値計算およびその数値微分問題に帰着され、計算コストが変数の数に対して指数関数的に増加する。一方、提案手法を拡張することで、バスケットオプションのヘッジ問題を個別関数の期待値の計算に帰着することが可能となり、飛躍的な計算効率化が期待された。また、多資産の関数を個別資産の関数で近似するという発想は、事業ポートフォリオや複数資産を保有する企業の倒産リスク推定、および個別エクイティ価値推定にも応用可能であるものと考えられ、本研究を実施するに至った。

## 2. 研究の目的

バスケットオプションとは、オプションの支払い条件が複数の資産価格に依存する派生証券であり、原資産は株式のみならず、金利や債券など、様々な資産クラスを含むように構成することが可能である。このようなバスケットオプションは、企業や機関投資家などの多様な目的に沿った原資産に対して、オプションの条件を設定することで自由に構

成可能であるが、その一方で、複数の資産に依存する派生証券価格をどのように設定し、ヘッジを行えばよいかという問題が生じる。本研究では、様々な目的に適合するように設計されたバスケットオプションに対し、効率的に価格付け・ヘッジを行う手法を構築することを目的とする。また、バスケットオプションヘッジの考え方を、倒産確率評価モデルとして知られる Merton モデルに適用し、複数事業を保有する企業の個別エクイティ価値を求める手法を提案することで、バスケットオプションの実務応用の裾野を広げる。

## 3. 研究の方法

本研究は、1) バスケットオプションヘッジのための基礎計算アルゴリズムの構築、2) バスケットオプションの考え方を実務に応用するための理論構築、3) バスケットオプション設計のシミュレーションと実用化の3つのフェーズによって構成される。まず、第1フェーズでは、加法モデルの考え方をバスケットオプションに拡張し、効率的なオプションヘッジアルゴリズムの構築を行う。次に第2フェーズでは、複数資産クラスのポートフォリオヘッジを加法モデルによって個別資産クラスのヘッジ問題に帰着するという、ポートフォリオヘッジ問題や複数事業を保有する企業の個別エクイティ価値を求める手法の理論構築を行う。最後に、第3フェーズにおいては、目的別にバスケットオプションを設計しヘッジを行うための計算効率化やシミュレーションを実施する。

## 4. 研究成果

### 4. 1. 初年度の取り組みと成果

初年度は、当該研究テーマに関して基礎となる理論的枠組みについて検討し、以下の課題に取り組んだ。①複数資産に支払が依存するオプションを個別資産のオプションで最適近似するアルゴリズムを示し、最適化問題や最適解の理論的性質について明らかにした。②理論的枠組を拡張するため、原資産の挙動が一般的な Levy 過程で与えられる場合について、ヨーロピアンオプションの効率的価格付けやバリアオプションの価格付けに関して検討した。さらに、原資産の候補として不動産価格や原油価格の実証的性質について検討し、バリュエーションの評価を行った。

①については、まず、一般的な資産価格表現に対して直行射影条件を適用することで最適性の条件を導き、加法モデルにおける最適関数が満たす条件を求めた。また、資産価格が多次元幾何ブラウン運動として与えら

れる場合について、プットコールパリティを用いた最適関数の性質、感度解析やヘッジポートフォリオ構築における偏微分計算の効率性、および、複数資産のオプション価格を近似する個別資産オプション価格の理論的性質を明らかにした。

②については、原資産がより一般的な Levy 過程で与えられる場合へ拡張するための基礎として、まず、オプションの効率的価格付け手法について検討した。具体的には、ホトトピー解析を用いて、バリアオプション価格を近似計算する手法を構築し、数値例によってその有効性について検証した。また、実証的ではあるが、不動産価格について、用途特化が価格形成に与える影響について考察し、原資産の候補とする場合の不動産価格が保有する性質について検討した。さらに、原油輸入価格の参照値である JCC 価格を原資産とするスワップ価格を、流動性の高い先物価格でヘッジする手法について検討し、多変量 GARCH モデルを適用した際のヘッジ効果を検証した。

#### 4. 2. 第二年度の取り組みと成果

第二年度は、当該研究テーマに関する基礎的枠組みを拡張するとともに、以下の課題に取り組んだ。①複数の株式価格を原資産とするバスケットオプションに対する最適ヘッジアルゴリズムの理論的性質についてさらに検討し、シミュレーション環境を構築した。②理論的枠組を発展させることを視野に、一般的なポートフォリオ最適化問題、原資産株式におけるリスクプレミアムの特徴、および、不動産価格のバリュエーションについて検討を行った。

①については、直行射影条件を適用することで、バスケットオプションのペイオフを近似する個別オプション最適ペイオフ関数の必要十分条件を導出し、最適ペイオフ関数の計算およびシミュレーションを行う環境を構築した。さらに、最適ペイオフ関数の理論的性質を議論した上で、既存ヘッジ手法との比較を行った。比較の結果、提案手法が既存手法に対して平均的に高いヘッジ効果を与えることが示された。また、プットオプションとコールオプションのヘッジ精度が等しいことを理論的に示した上で、シミュレーションによって実際に成立すること確認した。

②については、複数資産価格が共和分性をもつ場合に対し、最適ポートフォリオを構築する手法について検討した。具体的には、原資産に対するペアのスプレッド過程が多変量自己回帰モデルに従う場合に対し、条件付き平均・分散最適化問題を定式化し、複数資産スプレッドのポートフォリオ最適化問題を効率的に解く手法を提案した。提案手法は、

モデル予測制御に適用可能であり、今後、提案アルゴリズムを実装し、有効性を示すことによる結果の普及が期待される。さらに、原資産株式におけるリスクプレミアムに対する高次モーメントの影響を推計するため、Idiosyncratic 共変動という新たな概念を提案し、日本市場における Idiosyncratic 共変動の影響について検討した。

#### 4. 3. 第三年度の取り組みと成果

第三年度は、最終年度として結果の発表・普及活動を積極的に行うとともに、当該研究テーマに関する理論的枠組みの整理・拡張を行い、以下の課題を実施した。①提案手法であるバスケットオプションの最適ヘッジ手法を計算機上で実装した上で、既存研究である Super-Hedging 手法との比較・検討を行った。②昨年度実施した個別株式のリスクプレミアム推定問題について、既存研究である Fama-French 3 ファクターモデルとの関係を示した。③株式ペアのポートフォリオ最適化にモデル予測制御の考え方を適用し、有効性を検討した。④原資産がジャンプをもつ場合の多次元オプションに対して改良型高速ガウス変換を適用し、効率的にオプション価格を計算する手法を示した。

①については、個別オプションのポートフォリオ価値が満期時点におけるバスケットオプション価値を上回るように設計する Super-Hedging 手法との比較を行った。比較の結果、ヘッジ誤差の標準偏差やヘッジ精度を与える重相関係数に関して、提案手法の優位性が示された。②については、共和分性をもつ資産のポートフォリオ最適化手法にモデル予測制御の考え方を適用し、実データを用いたアウトオブサンプルシミュレーションにより、実際にパフォーマンスが向上することを示した。③については、昨年度提案した Idiosyncratic 共変動と呼ぶ指標を用いた期待超過収益率の分析において、FF3 ファクターモデルにおけるファクターローディング (FL) を加えた分析を実施したところ、I-共変動と FF3 ファクターモデルの FL が説明力で補完し合うことが観測された。④については、提案手法を従来手法として知られる高速フーリエ変換と比較したところ、原資産価格がジャンプ拡散過程で表現されるヨーロピアンオプションにおいて、高速フーリエ変換の結果を効率性の意味で上回るものとなった。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 13 件)

- [1] T. Sakuma and Y. Yamada, “Application of the Improved Fast Gauss Transform to Option Pricing under Jump-diffusion Processes,” *Journal of Computational Finance*, in press, 2013. (査読有)
- [2] 山田雄二, 吉野貴晶, 齊藤哲朗, “市場ユニバースにおける新たなリスク指標,” *JAFEE ジャーナル*第 12 巻, pp.168-195, 2013. (査読有)
- [3] Y. Yamada, “Properties of Optimal Smooth Functions in Additive Models for Hedging Multivariate Derivatives,” *Asia-Pacific Financial Markets*, vol. 19, no. 2, pp. 149-179, 2012. (査読有)
- [4] 山田雄二, J.A. Primbs, “共和分性に基づく最適ペアトレード,” *ジャフイー・ジャーナル*第 11 巻, pp.125-152, 2012. (査読有)
- [5] Y. Yamada and J.A. Primbs, “Optimal Trading with Cointegrated Pairs of Stocks,” *RECENT ADVANCES IN FINANCIAL ENGINEERING*, World Scientific, vol. 4, pp. 183-201, 2012. (査読有)
- [6] Y. Yamada and J.A. Primbs, “Model Predictive Control for Optimal Portfolios with Cointegrated Pairs of Stocks,” *Proceedings of the 2012 IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 51, pp.5705-5710, 2012. (査読有)
- [7] Y. Yamada, “Optimal Hedging of Basket Options Using Smooth Payoff Functions: Comparison with Super-Hedging Strategy,” *Proceedings of the 2012 American Control Conference*, vol. 30, pp. 3699-3704, 2012. (査読有)
- [8] Y. Yamada, “Optimal Hedging with Additive Models,” *RECENT ADVANCES IN FINANCIAL ENGINEERING 2010*, world Scientific, Vol. 3, pp.225-245, 2011. (査読有)
- [9] Y. Yamada, “Optimal Hedging for Multivariate Derivatives Based on Additive Models,” *Proceedings of the 2011 American Control Conference*, vol.29, pp.3856-3861, 2011. (査読有)
- [10] 山田雄二, “エネルギー価格変動リスクとデリバティブ,” *エネルギーレビュー*, ERC 出版, 第 357 巻, 2010. (査読無)
- [学会発表] (計 23 件)
- [1] 松田千恵子, 山田雄二, “非上場化企業の特性に関する研究—親子上場の解消に伴う完全子会社化の分析—,” *日本ファイナンス学会 第 21 回大会*, 2013 年 6 月 2 日. 武蔵大学江古田キャンパス(練馬区)
- [2] Y. Yamada, “Optimal Approximation of Basket Options: Application and Comparison with Super-Hedging Strategy,” 第 38 回 2012 年度冬季 JAFEE 大会, 2013 年 1 月 25 日. 筑波大学東京キャンパス文京校舎 (文京区)
- [3] Y. Yamada and J.A. Primbs, “Model Predictive Control for Optimal Portfolios with Cointegrated Pairs of Stocks,” 51st IEEE Conference on Decision and Control, 2012 年 12 月 12 日. Grand Wailea (Hawaii, United States)
- [4] Y. Yamada and J.A. Primbs, “A Model Predictive Control Approach for Portfolio Optimization with Cointegrated Pairs of Stocks,” 第 37 回 2012 年度 JAFEE 夏季大会, 2012 年 8 月 3 日. 成城大学 (世田谷区)
- [5] Y. Yamada, “Optimal Hedging of Basket Options Using Smooth Payoff Functions: Comparison with Super-Hedging Strategy,” *The 2012 American Control Conference*, 2012 年 6 月 28 日. Fairmont Queen Elizabeth (Montreal, Canada)
- [6] 山田 雄二, 吉野 貴晶, 齊藤 哲朗, “Idiosyncratic 共変動パズル: 市場ユニバースにおける歪みや尖りとリスクプレミアムの関係分析,” 2011 年度 JAFEE 冬季大会, 2012 年 3 月 12 日. 筑波大学東京キャンパス文京校舎 (文京区)
- [7] Y. Yamada, “Construction of Optimal Portfolio with Cointegrated Stocks,” *Symposium on Developments in Control Theory towards Glocal Control (招待講演)*, 2012 年 1 月 7 日. 東京大学本郷キャンパス (文京区)
- [8] 山田雄二, “I-共変動: 市場ユニバースにおける新たなリスク指標,” *横浜国立大学・南山大学共同ファイナンス・ワークショップ(招待講演)*, 2011 年 12 月 3 日. 横浜国立大学みなとみらいキャンパス (横浜市)
- [9] 山田 雄二, 吉野 貴晶, 齊藤 哲朗, “Idiosyncratic 共変動の資産収益率への影響分析,” 2011 年度 JAFEE 夏季大会, 2011 年 10 月 14 日. 慶應義塾大学・三田キャンパス (港区)
- [10] Y. Yamada, “Optimal Trading with Cointegrated Pairs of Stocks,” *International Workshop on Finance 2011*, 2011 年 8 月 4 日. 同志社大学室町キャンパス寒梅館 (京都市)
- [11] Y. Yamada, “Optimal Hedging for Multivariate Derivatives Based on Additive Models,” 2011 American Control Conference (招待講演), 2011 年 7 月 1 日. San Francisco Hilton on O'Farrell Street (USA)
- [12] 山田雄二, “Hedging of Multivariate

- Options with Additive Models,”日本ファイナンス学会第19回大会, 2011年5月15日. 早稲田大学早稲田キャンパス(新宿区)
- [13] 中島篤, 山田雄二, “J-REITにおける保有不動産の用途特化・多様化とバリュエーション,” 日本ファイナンス学会第19回大会, 2011年5月14日. 早稲田大学早稲田キャンパス(新宿区)
- [14] Y. Yamada, “Hedging Multivariate Illiquid Asset Derivatives Based on the Additive Models,” Quantitative Methods in Finance 2010 Conference, 2010年12月17日. University of Technology, Sydney, Australia
- [15] 山田雄二, “Optimal Hedging of Basket Options Using Separate Options on Individual Assets,” 2010年JAFEE冬季大会, 2010年12月5日. 中央大学後楽園キャンパス
- [16] 榎本 重朗, 山田 雄二, 牧本 直樹, 久保 博司, 谷川 亮一, “ハイブリッド・ファンダメンタル・モデルによる電力価格の予測(その1),” 第21回電気学会電力エネルギー部門大会, 2010年9月3日. 九州大学 伊都キャンパス
- [17] 久保 博司, 谷川 亮一, 榎本 重朗, 山田 雄二, 牧本 直樹, “ハイブリッド・ファンダメンタル・モデルによる電力価格の予測(その2),” 第21回電気学会電力エネルギー部門大会, 2010年9月3日. 九州大学 伊都キャンパス
- [18] 山田 雄二, 牧本 直樹, 榎本 重朗, 久保 博司, 谷川 亮一, “ハイブリッド・ファンダメンタル・モデルによる電力価格の予測(その3),” 第21回電気学会電力エネルギー部門大会, 2010年9月3日. 九州大学 伊都キャンパス
- [19] 山田 雄二, “新エネルギー発電とデリバティブ,” 社団法人日本鉄鋼協会 計測・制御・システム工学部会 第5回フォーラム「エネルギー・環境問題とシステム技術の最新動向」, 2010年8月18日. (株)神戸製鋼所 大阪支社
- [20] Y. Yamada, “Robust Hedging of Multivariate Derivatives Using Additive Models,” KIER-TMU International Workshop on Financial Engineering 2010, 2010年8月2日. 秋葉原ダイビル
- [21] 中島 篤, 山田 雄二, “J-REITの価格形成における要因分析,” 2010年JAFEE夏季大会, 2010年7月31日. 成城大学 8号館
- [22] 佐久間 貴之, 山田 雄二, “Pricing Knock-Out Options Using Homotopy Analysis Method Under Levy Processes,” 2010年JAFEE夏季大会, 2010年7月30日. 成城大学 8号館
- [23] 山田 雄二, J.A. Primbs, “Portfolio optimization using spreads of pairs of stocks,” 第27回 応用経済時系列研究会・研究報告会, 2010年6月19日. 明治学院大学 白金キャンパス
- 〔図書〕(計5件)
- [1] 津田博史, 中妻照雄, 山田雄二編集: ジャフイージャーナル「実証ファイナンスとクオンツ運用」, 朝倉書店, 2013, pp.240.
- [2] 津田博史, 中妻照雄, 山田雄二編集: ジャフイージャーナル「市場構造分析と新たな資産運用」, 朝倉書店, 2012, pp.212
- [3] 山田雄二, “エネルギー事業リスクとデリバティブ,” 経済時系列分析ハンドブック (刈屋・前川・矢島・福地・川崎編, 朝倉書店), 2012, “第8.4節 エネルギー事業リスクとデリバティブ”, pp.629-647.
- [4] 津田博史, 中妻照雄, 山田雄二編: バリュエーション, 朝倉書店, 2011, pp.230.
- [5] 津田博史, 中妻照雄, 山田雄二編: 定量的信用リスク評価とその応用, 朝倉書店, 2010, pp.227.
- 〔産業財産権〕  
○取得状況(計1件)
- 名称: 動作方法, 予測誤差補填装置, 気象発電計画装置, およびプログラム  
発明者: 山田雄二・福田寿・谷川亮一・早崎宣之  
権利者: 筑波大学, 伊藤忠テクノソリューションズ株式会社  
種類: 特許  
番号: 第5078128号  
取得年月日: 2012年9月7日  
国内外の別: 国内
6. 研究組織  
(1) 研究代表者  
山田 雄二 (YAMADA YUJI)  
筑波大学・ビジネスサイエンス系・准教授  
研究者番号: 50344859