様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 28 日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2010～2012
課題番号：２２５０００４
研究課題名（和文） グレブナー基底を応用した幾何定理証明アルゴリズムの新たな展開

研究課題名（英文） A New Development of Algorithms for Geometry Theorem Proving by Gröbner Bases

研究代表者
森継 修一（MORITSUGU SHUICHI）
筑波大学・図書館情報メディア系・教授
研究者番号：50220075

研究成果の概要（和文）：計算幾何に関する古典的問題をいくつか取り上げ、そのうち、①円内接多角形問題、②シュタイナー環におけるデカルトの円定理の拡張、の２問について、結果が複雑で巨大な式になるため従来は計算不可能だった関係式の導出に成功した。研究課題にあげた「グレブナー基底の応用」とともに、「終結式の方法」によるアルゴリズムも検討し、結果的には後者によって、これまで未知だった公式を世界で初めて求めることができた。

研究成果の概要（英文）：We picked up several computational geometry problems, and among them, we succeeded in deriving new formulae for (1) radius of inscribed polygons, and (2) extension of Descartes circle theorem for Steiner n-cycles. We investigated both Gröbner basis and resultant methods, and found the latter algorithm more effective for these problems. To our best knowledge, the obtained formulae are so complicated that they have never been computed before.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011 年度	500,000	150,000	650,000
2012 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総　計	2,000,000	600,000	2,600,000

研究分野：情報科学
科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎
キーワード：アルゴリズム・数式処理・計算幾何

１．研究開始当初の背景

申請までの数年にわたり、コンピュータによる幾何定理の自動証明、特に、グレブナー基底を応用したアルゴリズムの研究に取り組み、一定の成果を得ていた。申請時点では、

(1) イデアルの準素分解と幾何定理の記述との関係
(2) 「包括的グレブナー基底」の概念と幾何定理の記述との関係

の２点の解明、およびこれらに基づく効率的なアルゴリズムの開発および実装が課題であると想定されていた。

具体的には、S.-C. Chou, “Mechanical Geometry Theorem Proving”, D.Reidel, 1988. で取り上げられている初等幾何の定理から、できるだけ多くをグレブナー基底の方法で証明することに挑戦中であった。

２．研究の目的

前項で示した「Chou の問題」の証明を通して、初等幾何の定理のコンピュータによる代数的証明を効率化することが当面の目的であった。しかしながら、

- Chou の問題以外にも、計算幾何の難問は多数知られていて、特に和算家（江戸時代の日本の数学者）が取り上げた問題は、現代数学の視点から見ても研究価値があること
- グレブナー基底の方法では、複雑な幾何問題は依然計算困難である一方、「多項式環における消去計算」という面に絞れば、古典的な終結式計算の活用も検討価値があること

に考慮し、研究の対象や目的を以下のように広げて、従来の手法の応用・拡張を目指すこととなった。

- 計算の対象とする幾何図形として、和算で扱われた問題を積極的に取り上げる。
- 「証明アルゴリズム」から一般化して、「不変式の導出（＝図形の中で各量の間に成り立つ関係式を求めること）」も研究対象とする。
- グレブナー基底の方法と終結式による方法を比較しながら、計算を進める。

３．研究の方法

具体的な研究手法は、問題の定式化と数式処理システム上でのプログラミングおよび計算機実験である。

数式処理システムとしては、Maple および Reduce を使用し、グレブナー基底および終結式計算の関数を適用した。

計算機実験は、本補助金で購入したワークステーション Lenovo ThinkStation D20 で行った。

４．研究成果

本研究で具体的に成果の得られた問題は、大きく分けて 2 つある。

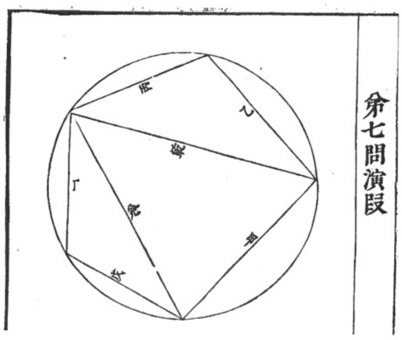

図１ 「算法発揮」第７問

(1) 円内接多角形問題

この問題は、「円に内接するn角形の各辺の長さ$a_1,\ldots,a_n$が与えられたとき、その多角形の面積および外接円の半径を$a_1,\ldots,a_n$の式で表せ」という古典的な問題である。本研究では、半径に関する関係式の導出に取り組んだ。

数学史上では、四角形の場合が 7 世紀に解かれて以降、五角形以上に対しては未解決であったが、現代数学では、D.P.Robbins (1994) により解決されたとされ、P.Pech(2004) が「半径の 2 乗を変数とする 7 次方程式」を具体的に求めている。

これに対し、井関知辰「算法発揮」(1690) の第 7 問(図 1)が「五角形の外接円の直径は 14 次方程式で表される」と記していることに着目し、井関の計算を現代の数式処理システムを用いて検証した。その結果、最終的な 14 次方程式(2,922 項になる)は具体的に示していないものの、井関の消去計算の手順は完全に正しいことが確認された。

17 世紀後半の和算家は、終結式に相当する消去計算を駆使して連立代数方程式を解き、多変数の方程式系から 1 変数の高次方程式を導くことで、問題の解決とみなしていた。本問も、池田昌意「数学乗除往来」(1674)の遺題第 3 問「辺の長さを 5,6,7,8,9 寸とするとき、外接円の直径を求めよ」という問題に基づいており、建部賢弘「研機算法」(1683) が最初に「直径の 14 次方程式」を導いた。むしろ、池田の出題のままに数値解を求めた和算家は存在せず、本研究の成果である下記の「雑誌論文①」が初出(半径 6.0198 寸)ということである。

本研究の現代数学としての成果は、五角形の外接円の半径を求めた手法を拡張して、六角形・七角形まで、外接円の半径を具体的に求めたことにある。その計算手法の詳細は、下記の「雑誌論文①③」に記されているが、古典的な終結式計算の効率化によっている。

n	次数	項数
3	1	7
4	2	71
5	7	2,922
6	14	497,417
7	38	337,550,051

表１ 「半径の２乗」に対する定義方程式

得られた方程式の形状を表 1 にまとめて示した。七角形に対する 38 次方程式は、約 15GB のサイズとなり、本研究で導入した計算環境で扱える数式の上限に近く、これを具体的に求めた研究は他には存在しないとみられる。

Robbins の結果から、八角形に対する方程式は 76 次であり、これが 38 次×38 次に因数分解できることが想定されるが、現時点では計算できる見込みは立っていない。

また、多角形の面積に関する公式との関係も未知な部分が多く、今後の検討課題となっている。

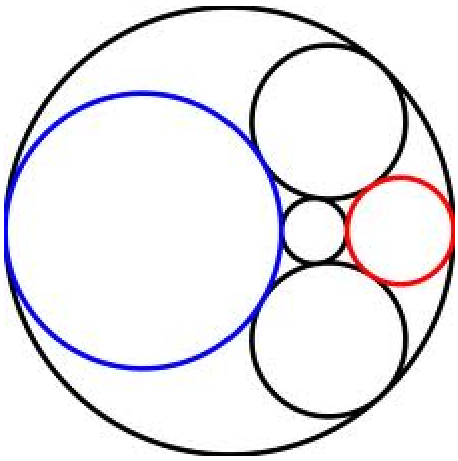

図 2 シュタイナー環（n = 4）

(2) シュタイナー環におけるデカルトの円定理の拡張

シュタイナー環とは、外円と内円の間に、互いに接するような円を順次挿入して、環をなすように描いた図形(図 2)である。この図形において成り立つ関係式として、古典的な結果がいくつか知られているが、その中でも 3 個の環円の場合に成り立つ外円・内円の半径との間の関係式は、「デカルトの円定理」(1643)として有名である。

しかしながら、このデカルトの円定理を 4 個以上の環円の場合に直接拡張した結果は公刊されていないようである。これは、既知の結果はいずれも、「円の反転」を利用して「外円と内円が同心、等円が環をなす」図形に変換して得られるものに限られていることによる。

したがって、本研究では、円の反転を用いず、座標を用いた各円の方程式から、不要な変数を順次消去し、外円・内円・環円の半径を表す変数間の関係式を求めることを試みた。円の方程式は、多項式で表現されるので、その消去計算には、グレブナー基底計算および終結式計算の両者を比較しながら適用した。結果として、以下の場合における計算に成功した。

- 環円 4 個の場合
  グレブナー基底による消去計算が可能で、環円と外円の関係を表す 4 次方程式を導くことができ、「デカルトの円定理」の直接の拡張と呼べるものと考えられる。簡明な式であるが、これまでに具体的に提示されたことはなかったようである。

- 環円 5 個の場合
  グレブナー基底では計算不可能で、終結式による消去を行った。その詳細は、下記「雑誌論文②」に記されている。結果は、外円の半径に対して、24 次方程式となった。

- 環円 6 個の場合
  終結式計算により、外円の半径に対して 48 次方程式となり、さらにこれが 12 次と 36 次に因数分解されることも確かめられた。この計算は、現在の計算環境の限界に近く、具体的な計算を行った他の研究は存在しないとみられる。

現時点では計算の見込みは全く立たないが、環円 7 個では 160 次、8 個では 320 次の方程式が得られるとみられていて、少なくともこれらの次数の列が持つ幾何学的な意味を解明することが、近々の課題となっている。

なお、この「シュタイナー環」の問題は、多数の和算家も取り上げており、中でも法道寺善「観術」(1861)では、「4 個の環円の直径が与えられた場合の外円の直径」を数値的に求めているため、法道寺は 4 個の場合に成り立つ関係式の導き方を知っていた可能性がある。

また、他にも多くの和算家が類似の図形に関する問題を取り上げている。例えば、安島直円「廉術変換」(1784)では、環円の直径の間に成り立つ漸化式を導き、環が閉じるための条件式を示している。この条件は、J. Steiner(1796-1863)が示したものと結果的に等しい。和算家の結果を取り入れることで、さらに問題に対する解析が深まることも期待される。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）
① 森継修一，円内接多角形問題と「算法発揮(1690)における解について，京都大学数理解析研究所講究録,No.1815,124-132, 2012.［査読無］
② Moritsugu,S., Extending the Descartes Circle Theorem for Steiner n-cycles, Proc. of ADG2012, 173-183, 2012. ［査読有］
③ Moritsugu,S., Computing Explicit Formulae for the Radius of Cyclic Hexagons and Heptagons, Bulletin of JSSAC, Vol.18, No.1, 3-9, 2011. ［査読有］
④ Moritsugu,S., Radius Computation for an Inscribed Pentagon in "Sanpou -Hakki"(1690), ACM Communications in Computer Algebra, Vol.44, No.3&4, 127-128, 2010. ［査読有］

〔学会発表〕（計４件）
① 森継修一，シュタイナー環におけるデカルトの円定理の拡張について，研究集会"Computer Algebra – The Algorithms, Implementations and the Next Generation 2012", 京都大学,2012.12.27.
② Moritsugu,S., Extending the Descartes Circle Theorem for Steiner n-cycles, ADG2012, University of Edinburgh (UK), 2012.9.19.
③ 森継修一，円内接多角形問題と「算法発揮(1690)における解について，研究集会" Computer Algebra – Algorithms, Implementations and Applications 2010, 京都大学, 2010.12.3.
④ Moritsugu,S., Radius Computation for an Inscribed Pentagon in "Sanpou -Hakki"(1690), ISSAC 2010 (Poster), Technische Universität München (Germany), 2010.7.25-28.

６．研究組織
(1)研究代表者
森継　修一（MORITSUGU　SHUICHI）
筑波大学・図書館情報メディア系・教授
研究者番号：50220075