

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年6月6日現在

機関番号：12102

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2011～2012

課題番号：23830009

研究課題名（和文）

アメリカン型オプションに対する解析的価格評価方法の構築

研究課題名（英文）

Research on Analytical Valuation for American Options

研究代表者

竹原 浩太 (TAKEHARA KOHTA)

筑波大学・システム情報系・助教

研究者番号：70611747

研究成果の概要（和文）：

本研究では、実務上非常に重要でありニーズが高いにも関わらず、その解析的評価の難しかった「アメリカン型オプション」に対して応用に足る精度・汎用性を持つ解析的価格評価のアプローチの提案を行った。特に、①最適行使領域の推定を近似的に行う手法②アメリカン型オプション価格解をある種の後ろ向き方程式（4.研究成果参照）の解と捉え、その近似解を求める手法の研究を行い、計算精度および速度の向上に貢献した。

研究成果の概要（英文）：

In this research, we proposed analytical valuation schemes for American options, which are very important in financial practice but difficult in evaluation except for numerical one, with high accuracy and flexibility enough for practical applications. Especially, we contributed to improvement in computing accuracy and speed through i) the method for approximation of “optimal exercise region” and ii) approximation of solution to a certain type of Backward Stochastic Differential Equation satisfied by American options.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2011年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2012年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,300,000	690,000	2,990,000

研究分野：社会科学

科研費の分科・細目：財政学・金融論

キーワード：アメリカン型オプション・漸近展開法・解析近似解・数値解法の高速度化・BSDE (Backward Stochastic Differential Equation)

1. 研究開始当初の背景

「アメリカン型オプション」とは、オプション（より一般には条件付き請求権）のうち、満期日での行使以外に満期前の任意の時点・もしくはあらかじめ決められたいくつかの時点での期限前行使が可能なものを用いる。これは金融実務に於いては非常に一般的に

みられる金融派生証券であり、またそれと明示されていない場合でもたとえば仕組債等に見られる「期限前償還条項」等として、内包される形で良く見られる大変重要なタイプの証券である。

それにも関わらず、期限前行使や、投資家の最適行動等の数学的な取り扱いの難しさ

があり、その重要さに反してこれまでアメリカン型オプションに対する解析は、少ない例外は1次元等の非常に簡易なモデル下では得られていたものの、実務への応用に足る一般的なモデルや多次元のモデルに於いて、トレーディングやリスク管理に用いることのできる計算速度・精度を兼ね備えたツールの提供は非常に限られていた。

そのためこれに代わる代替手段として金融実務で広く用いられているものとしては

- ① 偏微分方程式に対する（クランク・ニコルソン法などの近似）数値解法、
- ② モンテカルロ・シミュレーションによる解法

等が挙げられるが、前者は低次元での問題に於いては非常に有効なもの、問題の次元の増加に対する計算負荷の上昇が加速度的に大きくなること、後者は多次元に於いても比較的安定した計算負荷を保つとはいえ、そもそもの絶対的な計算負荷の大きさがネックであった。

2. 研究の目的

そこで、本研究では前述の「アメリカン型オプション」の価格評価という問題に対して、実務への応用も念頭に置いたうえで、以下の4つの基準：

- ① 解析的な（陽に解かれた形での）表現を持つ解が得られ
- ② 十分な近似精度及び
- ③ 応用に足る計算負荷
- ④ できるだけ広い範囲のモデルに対する適用可能性、

を持つ解析近似手法の確立を目的とした。

そうした手法の中でもヨーロッパ型（行使がオプションの満期日、もしくはあらかじめ定められた条件を満たした時点に限られ、オプション保有者の恣意性が入らない）オプションに対して非常に有効な結果を示すことが知られていた「漸近展開法」の応用を中心に検討することとした。併せて、完全な解析近似法だけではなく、偏微分方程式の数値近似・モンテカルロ・シミュレーション等の既存の数値計算法と提案手法の併用による計算速度の上昇や安定化等の方策も同時に検討することとした。

3. 研究の方法

本研究で採ったアプローチは漸近展開法を基礎としているが、この手法は次段の図に示す通り確率微分方程式の確率項を、正規分布を中心に微小な係数に関して展開し近似する手法であり、原理的には何次まででも展開できることが知られている（実際、その高次項の計算手法に関しても近年整備が進んできた）。その一方で数学的にもマリアバン解析における渡辺・吉田理論によってその収

$$(F)SDE: \quad dX_t^{(\epsilon)} = \mu(\epsilon, X_t^{(\epsilon)}, t)dt + \underbrace{\sigma(X_t^{(\epsilon)})}_{\text{確率項}} dW_t; \quad \underbrace{X_0 = x}_{\text{初期条件}}$$



$$\text{漸近展開:} \quad \underbrace{dX_t^{(0)} = \mu(0, X_t^{(0)}, t)dt; \quad X_0 = x}_{\text{通常の微分方程式 (ODE)}} \\ \boxed{+ \text{正規分布}} + \text{補正項}$$

$$\text{BSDE:} \quad dY_t = -\mu(Y_t, Z_t, t)dt + Z_t' dW_t; \quad \underbrace{Y_T = \tilde{Y}}_{\text{(確率的) 終端条件}}$$

束・正当性が保証されており学問的にも長らく興味の対象となってきた。また正規分布の特性を利用していることで微分・積分等の解析的な操作も非常に容易であることもその大きな特徴である。（このためどのようなモデルに対してもその解析解を得やすく、実務に於いて扱いやすい）

そこで、本研究ではこの漸近展開法の利用を中心に据え、大きく2つのアプローチを採ることとした。

1つ目は、主に1次元などの簡単な場合に提案されていた既存研究の、多次元の場合への拡張である。4節に述べるように、1次元のモデル下でのアメリカン・オプションの価格評価に対して漸近展開の応用を提案した既存研究（斉藤・高橋（2003））をベースに、多次元特有の問題を解決しつつ拡張を行うことを検討した。

またもう1つが、アメリカン型オプションの価格をある種の「後ろ向き方程式、BSDE(Backward Stochastic Differential Equation、上図参照)」の解と捉え、それに関する近似手法の適用や構築の可能性を考えるアプローチである。こちらのアプローチについても主にBSDEへの求解という文脈での研究が多くされているが、これをアメリカン型オプションとして捉えなおし、また得られた結果についてもファイナンス的な解釈を試みることを行った。

これらの方法を通して得られた結果（解析近似解）の評価については、主に

- ① モデルの適用可能性（汎用性）
- ② 計算負荷
- ③ 価格に対する近似精度

等を元に行い、

特に②・③については代替手法である偏微分方程式の数値解法やモンテカルロ・シミュレーションとの比較を、プログラムを通じた数値実験を行うことで実行した。（なお精度

評価に必要な「真の価格」に関しては、十分な回数の計算を行えば収束が保証されている数値的解法を用い、大きな回数を繰り返した後に得られたものを真値の代用としている)

4. 研究成果

まず 1 番目のアプローチについて述べる。1 次元ブラックショールズモデル下での漸近展開のアメリカン・オプション評価への応用を扱った斉藤・高橋(2003)ではアメリカン・オプションの価値を

- ① 「保有価値」+「行使価値」に分解し、
- ② その「保有価値」が「最適行使価格」、すなわちその価格を初めて上回る(または下回る)瞬間に行使することが最適、とされる価格(存在することが証明されている)によって特徴づけられる

ことを利用していた。これに対して、多次元問題に於いては対応する「最適行使領域」を考えることになるが、そもそもこうした領域が 1 次元同様に簡単な形で与えられるのか、また「保有価値」との特徴づけが 1 次元の時のように与えられるか等といった問題が 1 次元ほど自明ではなく、多次元への拡張の際の問題であった。

そこで本研究を通じて、まずこの問題に対してある程度の仮定の下では近似的に同様の特徴づけが考えられることを提案し、そのもとで得られた結果に漸近展開法を適用することで、既存アプローチの多次元問題への拡張を行った。

これを通じて得られた近似解の精度及び計算負荷の検証については

- ① 均回帰的な確率的ボラティリティを持つモデル(Heston モデルのように分散ではなく、ボラティリティ自身をモデル化している)及び
- ② 多くの金利に依存する(これは金利に関する派生証券のほか、満期がある程度長い派生証券を考える際は必ず直面する課題である) Libor Market Model モデル

を仮定し、対応する近似解及び数値解法による価格解(及び計算速度)を、プログラムと仮想的なモデル・パラメータを用いた数値実験を通して比較することで行ったが、

- ① 計算負荷については、本手法では多少の数値積分を除けば原理的には瞬時に計算可能であるのに対して、既存の数値計算法では非常に大きな計算負荷がかかったこと

- ② また近似精度については、極端なパラメータ(特にリーマンショック直後などの異常なマーケットを想定しているもの)や超長期のオプションに関しては課題が見られたものの、全般的に近似による計算精度への影響は実務的な応用を考えれば十分許容できる範囲であると言えること

などを知ることができた。こうした結果は、これまで一般的に使われていた数値手法に対する本手法の(特にトレーディングやリスク管理用のシミュレーション、モデル・パラメータのカリブレーション等の高い計算負荷が予想される場面での)有効性を示しているといえよう。

また、2 番目のアプローチについては、Fujii and Takahashi[2011]によって BSDE に対する近似手法が(漸近展開法の直接的な応用ではないものの)提唱されており、これを「アメリカン型オプション」の枠組みに於いて適用することを検討した。

彼らの手法は BSDE と対応する偏微分方程式を、線形の偏微分方程式の周りで展開し、得られた線形偏微分方程式の体系を再び確率論的解釈に戻して解くという近似手法である。この論文に於いては主に金融実務において現在主流となっている担保付取引にその主眼があり、アメリカン型オプションへの応用は検討されていなかった。そこで、本研究では特に応用をアメリカン型オプションに絞り、その定式化のもとでの応用等を検討した。

その結果、アメリカン型オプションについても同様に応用を行うことが可能であり、また前段で述べたものと同じモデルを通じてその近似精度の検証を行ったところ、こちらについても実務的な応用に対して(一部の極端な状況を想定したモデル、パラメータを除けば)おおむね満足な精度を得られることが分かった。

本アプローチに於いても原理的には(途中いくつかの数値的な積分等を除けば)瞬時に価格近似解が得られ、非常に大きな計算負荷を生ずる既存の数値解法に対する優位はここでも同様である。

またこの手法に於いては BSDE の解をいくつかのヨーロピアン型の解を通して表すことを利用し、これらをヨーロピアン型オプションの価格解と捉えることで、アメリカン型オプションの(ヨーロピアン型オプションによる)新たなヘッジの可能性についても検討・分析している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

Kohta Takehara, Masashi Toda and Akihiko Takahashi, "A General Computation Scheme for a High-Order Asymptotic Expansion Method," International Journal of Theoretical and Applied Finance, Vol. 15-6, pp.903-927, 2012.
(査読有)

[その他]

ホームページ等

<http://www.sk.tsukuba.ac.jp/SSM/teacher/rtvprof.cgi?dxgnxrunenu>

(関連論文へのリンクなど有)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

竹原 浩太 (TAKEHARA KOHTA)

筑波大学・システム情報系・助教

研究者番号：70611747