

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 25 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2012

課題番号：22510136

研究課題名（和文）

厳密な最小違反順序計算アルゴリズムの開発

研究課題名（英文）

Development of exact algorithm for minimum violation ranking

研究代表者

山本 芳嗣 (YAMAMOTO YOSHITSUGU)

筑波大学・システム情報系・教授

研究者番号：00119033

研究成果の概要（和文）：

多数の対象の対比較などのデータに基づいて、全対象を順序づける問題とクリークに分割する問題、またその解法を研究した。取得されたデータと順序の間の不整合の程度を定義し、その不整合度を最小とする順序を求める問題を最適化問題に定式化した。そうして得られる大規模な整数最適化問題を効率よく解くアルゴリズムを提案し、計算機実験によってその性能を確かめた。

研究成果の概要（英文）：

We investigated the problems of ranking and clique partitioning of a number of objects based on the pairwise comparison data of the objects. We defined the inconsistency measure between the data and an ordering, formulated the problem as an optimization problem of minimizing the measure, and proposed an efficient algorithm, which was tested by numerical experiments.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	700,000	210,000	910,000
2011 年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2012 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野：数理工学

科研費の分科・細目：社会・安全システム科学，社会システム工学・安全システム

キーワード：(1) 最小違反順序 (2) 線形順序多面体 (3) ラグランジュ緩和 (4) 劣勾配法
(5) 妥当不等式

1. 研究開始当初の背景

右の行列 D はある競技に参加した 5 チームの得失点差データである。

0	0	0	0	0
45	0	18	8	20
3	0	0	2	0

31	0	0	0	0
45	0	27	38	0

この行列 D の行と列を並べ替えて得られる次の行列は概ね以下の 2 つの性質を持っている。

0	20	18	8	45
---	----	----	---	----

0	0	27	38	45
0	0	0	2	3
0	0	0	0	31
0	0	0	0	0

- (1) 各行の要素の値は左から右に向かって単調に増加.
- (2) 各列の要素の値は上から下に向かって単調に減少.

何らかの並べ替えによって上記の性質(1)(2)を満たすようにできたとすると、そのときの並べ替えの順序を D から判断したチームの順序と考えることができる. この例のように、両性質を完全に満足する順序は一般には存在しないので、両性質が壊されている箇所の個数が最小となる順序 (最小違反順序と呼ぶ) をもって妥当な順序とすることは自然である.

対象の個数 (例ではチーム数) を n とすると順序の総数は $n!$ であり、 $n=20$ で $20! = 2.4 \times 10^{18}$ となり、これは容易に計算の限界を超える. そのため最小違反順序を求めるにはこれまでヒューリスティックスの利用が試みられて来ているが、その解の品質、計算時間のいずれをとっても要求水準に達していない.

2. 研究の目的

順序は、0 あるいは 1 を要素に持つ $n(n-1)$ 次元のベクトルで表現でき、そのベクトル全体の凸包は線形順序多面体と呼ばれ、そのファセットの幾つかを決める線形不等式が知られている. この不等式を用いれば最小違反順序を求める問題は整数最適化問題に帰着できるが、問題の等式制約の本数が $n(n-1)/2$ 、不等式制約の本数が $n(n-1)(n-2)/3$ となり、この規模が解く際の障害となる. 実際 $n=300$ でこれは 900 万本となり、現在利用可能な CPLEX, Xpress, Gurobi, NUOPT などの最適化ソルバーの能力を超えてしまう.

しかし通常、最小違反順序を決定するのに必要な不等式制約 (これを有効な制約と呼ぶ) は $n(n-1)(n-2)/3$ に比べて多くない. 従って、何らかの方法で有効な制約の小さな候補集合を作り出すことができれば、問題規模を小さく保ったままで問題を解くことができる. この考えに基づいて、厳密な最小違反順序を求めるアルゴリズムの開発を目指す. これによってこれまでヒューリスティックスによる近似解に甘んじていた状況を改善し、解の信頼性を上げ、その応用範囲を拡大したい.

3. 研究の方法

順序付ける対象を $N = \{1, 2, \dots, n\}$ とし、順序対 (i, j) に対して $(0, 1)$ -変数 x_{ij} を定義すると、相異なる i, j, k すべてに対して条件

$$x_{ii} = 0$$

$$x_{ij} + x_{ji} = 1$$

$$x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} \leq 2$$

を満たす変数それぞれと個々の順序が 1 対 1 に対応する. これによって最小違反順序を求める問題はこの不等式を制約に持つ最適化問題となる. この問題を、基本的には

- <1> 少数の不等式制約だけを考慮した問題を作る.

<2> その問題を解き、最適解を得る.

<3> その解が満たしていない不等式制約を列挙する.

<4> そのような不等式制約がなければ停止し、あればそれを問題に追加して<2>に戻る. という手順で解くアルゴリズムを開発し、その性能を確認する. 手順<2>で解く問題として単に制約を緩和した問題ではなく、さらにその連続緩和、あるいはラグランジュ緩和を考慮する. ラグランジュ緩和を用いる場合には、考慮すべきラグランジュ乗数を減らす工夫、ラグランジュ乗数の更新ルールや収束を保証する停止ルールを研究する.

また、以上のアルゴリズムは順序づけ問題だけでなくクリーク分割問題やモジュラリティ最大化問題を解くアルゴリズムに修正可能であるので、その修正と実験を実施する.

4. 研究成果

Table 2 Computational Results for Iterative LP method with bounding on 347-team example

iteration	LP time	Obj. value	best rank	ConGen time	# con.added
1	4.11	1171616.00	1172359.00	0.24	11230
2	3.70	1172002.00	1172338.00	0.22	6887
3	4.17	1172023.00	1172069.00	0.11	560
4	4.12	1172023.00	1172039.00	0.11	249
5	4.13	1172023.00	1172023.00		
total	20.23			.67	18926

上の表に K. E. Pedings, A. N. Langville との共著論文 "A minimum violations ranking method," *Optimization and Engineering* vol. 13 (2012) No. 2, pp. 349-370 で報告した実験結果の例を示す. ここで用いた問題は $n=347$ の実データである. iteration が上記のアルゴリズムで手順<2>を繰り返した回数, LP time は連続緩和問題を解くために費やした時間, ConGen time は手順<3>に費やした時間をいずれも秒で示している. この例では 5 回の繰り返しの後に最適値の上下限 (Obj. value と best rank) が一致して問題の最適解が 21 秒足らずで得られており、しかも 1380 万本の不等式制約のうち僅か 0.14% の 18926 本を取り込むことで問題が解けている.

また、クリーク分割問題の 12 のベンチマーク問題に対するラグランジュ緩和を用いた方法 (表中では MSMP と略記) の実験結果を次の表に、N. Sukegawa と L. Zhang との共著の掲載予定論文 "Lagrangian relaxation

and pegging test for linear ordering problems,” *Advances in Data Analysis and Classification* から引用する。比較したのは現時点で最も速いと言われている最適化ソルバー Gurobi である。Gurobi の欄の OM はメモリー不足で最適化ソルバーが問題を解くことができなかつたことを示している。提案したアルゴリズムは 3 番目の問題 Workers を除いた全問題の最適解を Gurobi よりも短時間で得るのに成功している。

Instance	n	m	MSMPT			Gurobi		Ratio
			Gap(%)	% ^{trans}	% ^{opt}	Time(s)	Time _{LP} (s)	
Wildcats [11]	30	14	*	5.94	91.49	0.12	0.55	*
Cars [11]	33	13	*	13.51	0.00	0.21	0.84	*
Workers [11]	34	13	0.09	11.60	91.44	0.90	2.09	*
Cetacea [11]	36	15	*	1.25	0.00	0.12	1.64	*
Micro [11]	40	14	*	10.21	0.00	0.67	2.02	*
Soybean [2]	47	21	*	4.19	0.00	0.09	2.80	*
UNO [11]	54	3	*	3.13	0.00	0.09	4.06	*
UNO1b [11]	139	3	*	0.53	0.00	0.26	OM	-
UNO2b [11]	145	15	*	1.05	0.00	0.75	OM	-
UNO1a [11]	158	3	*	0.49	0.00	0.40	OM	-
UNO2a [11]	158	15	*	0.92	0.00	0.85	OM	-

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

論文のいくつかは以下のつくりポジトリから入手可能

<https://www.tulips.tsukuba.ac.jp/Tulips-R/tulips-r.php>

[雑誌論文] (計 10 件)

- ① N. Sukegawa, Y. Yamamoto and L. Zhang, “Lagrangian relaxation and pegging test for linear ordering problems,” *Advances in Data Analysis and Classification* に掲載予定, 査読有。
- ② A. Wibowo and Y. Yamamoto, “A note on kernel principal component regression,” *Computational Mathematics and Modeling*, 査読有, vol. **23** (2012) No. 3, pp. 350-367.
- ③ N. Sukegawa and Y. Yamamoto, “Preference profile determining the proposals in the Gale-Shapley algorithm for stable matching problems,” *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 査読有, vol. **29** (2012) No. 3, pp. 547-560; DOI:10.1007/s13160-012-0077-x.
- ④ K. E. Pedings, A. N. Langville and Y. Yamamoto, “A minimum violations ranking method,” *Optimization and Engineering*, 査読有, vol. 13 (2012) No. 2, pp. 349-370; DOI:10.1007/s11081-011-9135-5.
- ⑤ S. Ryuo, K. Sato and Y. Yamamoto, “Parameterized fairness axioms on

cycle-free graph games,” *Journal of Global Optimization*, 査読有, vol. 52 (2012) pp. 487-497;

DOI:10.1007/s10898-011-9761-7.

- ⑥ N. Sukegawa, Y. Yamamoto and L. Zhang, “Lagrangian relaxation and pegging test for linear ordering problems,” *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 査読有, vol. **54** (2011) No. 4, pp. 142-160.
- ⑦ J. Gotoh, Y. Yamamoto and W. Yao, “Bounding contingent claim prices via hedging strategy with coherent risk measures,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, 査読有, vol. 151 (2011) No. 3, pp. 613-632; DOI:10.1007/s10957-011-9899-y.
- ⑧ J. Gotoh, Y. Takano, Y. Yamamoto and Y. Wada, “Credit risk optimization via CVaR and its solution,” *Transaction of the Operations Research Society of Japan*, 査読有, vol. 54 (2011) pp. 23-42.
- ⑨ K. Sekitani and Y. Yamamoto, “Optimization modeling for entrance examination including elective subjects,” *Transaction of the Operations Research Society of Japan*, 査読有, vol. 53 (2010) pp. 56-68.
- ⑩ Y. Takano and Y. Yamamoto, “Metric-preserving reduction of earth mover’s distance,” *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 査読有, Vol. 27 (2010) No. 1, pp. 39-54; DOI:10.1142/S0217595910002545.

[学会発表] (計 6 件)

- ① N. Sukegawa, Y. Yamamoto and L. Zhang: Lagrangian relaxation and pegging test for clique partitioning problems, The International Symposium on Mathematical Programming, August 19-24 2012, Berlin, Germany.
- ② 鮎川矩義, 山本芳嗣, 張理遠: クリーク分割問題に対するラグランジュ緩和と釘付けテスト, 日本オペレーションズ・リサーチ学会研究部会「最適化の理論と応用(SOTA)」2012年6月30日, 筑波大学.
- ③ 鮎川矩義, 山本芳嗣, 張理遠: 線形順序付け問題に対するラグランジュ緩和と釘付けテスト, 2011年日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会, 2011年9月15日, 甲南大学.

- ④ N. Sukegawa, Y. Yamamoto and L. Zhang: Lagrangian relaxation and pegging test for linear ordering problems, The International Conference on Operations Research, September 2 2011, Zurich, Switzerland.
- ⑤ 鮎川矩義, 山本芳嗣, 張理遠: 線形順序付け問題に対するラグランジュ緩和と釘付けテスト, 京都大学数理解析研究所研究集会「最適化手法の深化と広がり」2011年7月21日, 京都大学.
- ⑥ 鮎川矩義, 山本芳嗣, 張理遠: Lagrangian relaxation and pegging test for linear ordering problems, 日本オペレーションズ・リサーチ学会研究部会「計算と最適化の新展開(SCOPE)」2011年5月28-29日, 筑波大学.

[その他]

ホームページ等

山本芳嗣

- (1) <http://www.trios.tsukuba.ac.jp/Profiles/0004/0000565/profile.html>
- (2) <http://infoshako.sk.tsukuba.ac.jp/~yamamoto/>

Majority Judgment のページ

- (1) http://infoshako.sk.tsukuba.ac.jp/~yamamoto/Majority_Judgment/1._Majority_Judgment_heyoukoso.html

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山本 芳嗣 (YAMAMOTO YOSHITSUGU)
筑波大学・システム情報系・教授
研究者番号: 00119033