

4次元超対称共形場の理論と超弦双対性

(研究課題番号 09640335)

平成9年度～平成11年度科学研究費補助金(基盤研究(C)(2))
研究成果報告書

平成12年3月

研究代表者 梁 成 吉
(筑波大学 物理学系 教授)

421.3
R96
HO

平成9年度～平成11年度科学研究費

基盤研究(C)(2)

1. 課題番号 09640335
2. 研究課題 4次元超対称共形場の理論と超弦双対性
3. 研究代表者 梁成吉 (筑波大学物理学系教授)
4. 研究経費

平成9年度	1,100,000 円
平成10年度	600,000 円
平成11年度	600,000 円
計	2,300,000 円

研究成果および研究発表

1994年のSeiberg-Wittenの仕事以来、4次元 $N=2$ 超対称ゲージ理論におけるクーロン相の非摂動的構造に関する理解が急速に深まっている。クーロン相の $N=2$ 超対称真空は連続的な縮退をもち、この縮退する真空状態の空間はモジュライ空間とよばれる。モジュライ空間のある点（あるいは超平面）では、モノポールに代表されるBPS状態の質量がゼロとなる特異点が現れる。この特異点の近傍には理論のもつ非摂動的特徴が際立って反映され、その様相は電磁双対変換により導入される磁気的場の変数でよく記述される。特異点は一般に強結合領域に現れ、双対変換を用いればこの特異点は双対ゲージ理論のガウス型固定点、すなわち自明な赤外固定点となっていることがわかる。

しかし、Argyres-Douglas (1995) は $SU(3)$ ゲージ群の場合に、互いに非局所的なBPS粒子が同時にゼロ質量となる特異点は非自明な赤外固定点であることを示した。ここに今まで知られていなかった新しいクラスの4次元 $N=2$ 超対称共形場の理論(SCFT)が登場したのである。続いて、Argyres-Plesser-Seiberg-Witten (1995) は $N=2$ $SU(2)$ 超対称QCDのクーロン相にも同様の非自明な固定点を見出した。これらに基づき、江口・堀・伊藤・梁 (1996) は任意の古典群をゲージ群としてもつ純 $N=2$ 理論および $N=2$ SQCDを考察し、4次元 $N=2$ 超対称固定点の存在を系統的に明らかにし、固定点を特徴づけるスケール次元を導いた[3]。4次元SCFTとして、従来から知られていたのはガウス型固定点および $N=2, 4$ の有限理論(finite theory)のみであったので、このような非自明固定点に関する成果は非摂動的場の理論の研究にインパクトを与えた。

$N=2$ 超対称ゲージ理論は $N=1$ 理論とも密接な関係にある。純 $N=2$ 理論を多項式型超ポテンシャルで変形して得られる $N=1$ 理論は閉じ込め相にあると考えられる。逆にこの閉じ込め相を記述する低エネルギー有効ポテンシャルから、梁と寺嶋は $N=2$ Seiberg-Witten解のモジュライ空間の特異多様体を再構成してみた[4]。さらに、この結果と上述の $N=2$ 固定点のデータに基づき、新しい非自明な $N=1$ 超対称固定点の存在を示し、その臨界超ポテンシャルの形を決定した。

このような研究成果に基づき、本研究では4次元超対称ゲージ理論と超弦双対性に関する研究をさらに推進することを目的とする。4次元の新しいクラスのSCFTの記述は、おそらく通常の枠組みを越える場の理論についての視野を我々に提供するものとなるであろう。この意味で2次元共形場の理論の果たした役割に匹敵するものがあると思われる。本研究を通して、超弦理論に基づく超対称場の理論の研究の新しい展開が期待される。

本研究によって得られた新しい結果を以下にまとめる。

1. 4次元 $N=2$ 超対称ゲージ理論とADE特異点:

E_6 型特異点に対応する2次元位相的Landau-Ginzburg場の理論の新しい記述を得た[5]。通常、 E_6 型特異点は2変数を用いて表されるが、新しい超ポテンシャルは1変数の無理式で、4次元のヘテロ/II型超弦の双対性から導かれる E_6 型Seiberg-Witten曲線に関連するものである。この結果は E_6 型KdV階層性についても、新しい知見をもたらすものと期待される。

論文[1][2]で行われた4次元 $N=2$ 超対称ゲージ理論のクーロン相における低エネルギー有効作用(ブレポテンシャル)の研究を発展させ、Seiberg-Witten周期積分の満たすPicard-Fuchs型微分方程式を調べた[8]。ゲージ群がADE型の場合、微分方程式はADE型特異点理論で導入された平坦座標を

用いて系統的に記述される。この結果は 4 次元 $N=2$ ゲージ理論と 2 次元位相的場の理論の間に興味深い関連があることを示唆するものである。

4 次元 $N=2$ 超対称ゲージ理論を記述する複素曲線を周期型戸田格子方程式のスペクトル曲線により与え、低エネルギー有効ポテンシャルのインスタントン補正を計算した [9]。ADE 型ゲージ群すべての場合で、結果は微視的インスタントン法で求められたものと一致することを示した。

ADE 型ゲージ対称性をもつ 4 次元 $N=2$ 超対称ゲージ理論のプレポテンシャルが WDVV 方程式を満たすことの簡潔な証明を与えた [12]。このことから、4 次元における WDVV 方程式は、2 次元位相的場の理論におけるカイラル環の結合則に由来することが明らかとなった。さらに、この理論の低エネルギー有効作用の量子モジュライ空間の原点近傍のふるまいが、2 次元位相的ストリング理論の相関関数の無限和によって表されることを見いだした [14]。

論文 [10] は 4 次元 $N=2$ 超対称ゲージ理論の厳密解についての総合報告であり、とくに、厳密解によって明らかにされたソリトン粒子とその幾何学的記述に焦点を当て、また 11 次元 M 理論を用いて $N=2$ 厳密解の幾何を再現する方法を解説した。

2. 4 次元位相的ゲージ理論：

ゼロ質量のクォーク自由度が入った $N=2$ $SU(2)$ 超対称ゲージ理論をツイストして得られる位相的ゲージ理論の経路積分測度を解析し、4 次元多様体についての Donaldson-Witten 不変量の一般化を試みた。K3 曲面の場合は、得られた不変量は一般単純型と分類されるものと類似の性質をもつ。さらに、この結果より得られる Seiberg-Witten モノポール方程式の多成分版についても解析を行い、消滅定理を示すことができた [13]。

3. 閉じ込め相ポテンシャルと $N=2$ クーロン相：

随伴表現のカイラル多重項をもつ $N=1$ 超対称ゲージ理論の閉じ込め相を記述するスーパーポテンシャルを、すべての古典ゲージ群 $SU(N)$, $SO(N)$, $Sp(2N)$ の場合に構成し、真空状態が $N=2$ 超対称ゲージ理論のクーロン相における特異点を与えることを示した [4]。この結果を拡張、応用し、基本表現に属するハイパー多重項をもつ $N=2$ SQCD のクーロン相の特異点を決める閉じ込め相ポテンシャルを導いた [6]。

随伴表現の物質場と結合した ADE 型ゲージ群をもつ 4 次元 $N=1$ 超対称ゲージ理論において $U(1)$ 光子の閉じ込め相における低エネルギー有効超ポテンシャルを導いた。これより、種々のゲージ不変量の真空期待値が得られ、その結果 $N=2$ 超対称ゲージ理論を記述する複素曲線が球面上のファイブレーションとして求められた [7]。

E_6 型ゲージ対称性をもつ 4 次元 $N=2$ 超対称 QCD において、ハイパー多重項が有質量の場合の低エネルギー有効理論を記述する Seiberg-Witten 幾何を、球面上の ALE ファイブレーションとして決定した [11]。さらに、 E_6 ゲージ対称性を Higgs 効果によって $SU(6)$ 、および $SO(10)$ 対称性へ破ることにより、 SU 型ゲージ群の反対称表現や SO 型ゲージ群のスピンル表現に属する $N=2$ ハイパー多重項と結合する $N=2$ 超対称ゲージ理論の Seiberg-Witten 幾何を与える方程式を導いた [15]。

4. IIB 7-brane と D3-brane 上の超対称ゲージ理論：

ADE 型グローバル対称性をもつ 4 次元 $N=2$ 超対称共形場の理論の質量変形の問題を D3-brane 探索の方法により詳しく解析した [16]。この理論の Seiberg-Witten 幾何と ADE 型特異点の対応を指摘し、Seiberg-Witten 微分の極が楕円ファイバー束の切断上にあることを示した。これより極の留数と ADE 型リー代数の表現との関係が明らかにされた。この Seiberg-Witten 微分のあらわな形はリー代数の表現に依存するが、BPS 質量公式などの物理的結果は表現に依らずに一意的であることを証明した。

E 型アフィン・リー環のルート格子をつくる IIB 超弦の 7-brane 配位とストリング接合を記述する楕円曲線を有理楕円曲面を表す 3 次式から系統的に導いた [17]。その結果は、ひとつの次元が円周上にコンパクト化された 5 次元の E 型超対称共形場の理論の質量変形を与える Seiberg-Witten 理論のものと同じ示された。すなわち、円周上コンパクト化された 5 次元 E 型理論についても D3-brane 探索のアイデアが有効であることを示唆するものである。

有理楕円曲面の特異点、Mordell-Weil 格子、そしてトーシヨンの構造を IIB 型超弦理論の 7-brane 背景中のストリング接合を用いて解析した [18]。その結果、ストリング接合の生成する格子の分類は、従来数学者により得られていた Mordell-Weil 格子の分類と完全に一致することが示された。とくに、Mordell-Weil 群のトーシヨンは E_9 型ループ代数の虚のルート・ベクトルを表すループ型ストリング接合により理解することができた。さらに、保存電荷をもつ非 BPS 接合を与える 7-brane 配位も決定した。

以上のように、本研究計画は着実に遂行されたと考えられる。なお、本研究プロジェクトは次の共同研究者、江口徹、伊藤克司、菅野浩明、山田泰彦、C.-S. Xiong、野口雅之、寺嶋靖治、深江光明、北尾拓洋、各氏の協力の下に行なわれた。また、川上則雄氏とは 1989 年以來の共同研究に基づく共著書をまとめることができた。

発表論文

1. (with K. Ito) *Prepotentials in $N = 2$ $SU(2)$ Supersymmetric Yang-Mills Theory with Massless Hypermultiplets*,
Phys. Lett. **B366** (1996), 165–173.
2. (with T. Eguchi) *Prepotentials of $N = 2$ Supersymmetric Gauge Theories and Soliton Equations*,
Mod. Phys. Lett. **A11** (1996), 131–138.
3. (with T. Eguchi, K. Hori and K. Ito) *Study of $N = 2$ Superconformal Field Theories in 4 Dimensions*,
Nucl. Phys. **B471** (1996), 430–442.
4. (with S. Terashima) *Confining Phase of $N = 1$ Supersymmetric Gauge Theories and $N = 2$ Massless Solitons*,
Phys. Lett. **B391** (1997), 107–114.
5. (with T. Eguchi) *A New Description of the E_6 Singularity*,
Phys. Lett. **B394** (1997), 315–322.
6. (with T. Kitao and S. Terashima) *$N=2$ Curves and a Coulomb Phase in $N=1$ SUSY Gauge Theories with Adjoint and Fundamental Matters*,
Phys. Lett. **B399** (1997), 75–82.
7. (with S. Terashima) *ADE Confining Phase Superpotentials*,
Nucl. Phys. **B519** (1998), 453–469.
8. (with K. Ito) *Flat Coordinates, Topological Landau-Ginzburg Models and the Seiberg-Witten Period Integrals*,
Phys. Lett. **B415** (1997), 45–53.
9. (with K. Ito) *A-D-E Singularity and Prepotentials in $N=2$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*,
Int. J. Mod. Phys. **A13** (1998), 5373–5390.
10. *Non-Perturbative Aspects of $N = 2$ Supersymmetric Gauge Theories*,
Prog. Theor. Phys. Suppl. **131** (1998), 323–336.
11. (with S. Terashima) *Exceptional Seiberg-Witten Geometry with Massive Fundamental Matters*,
Phys. Lett. **B430** (1998), 102–108.
12. (with K. Ito) *The WDVV Equations in $N = 2$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*,
Phys. Lett. **B433** (1998), 56–62.
13. (with H. Kanno) *Donaldson-Witten Functions of Massless $N=2$ Supersymmetric QCD*,
Nucl. Phys. **B535** (1998), 512–530.

14. (with K. Ito and C.-S. Xiong) *Seiberg-Witten Theory as $d < 1$ Topological Strings*,
Phys. Lett. B441 (1998), 155–162.
15. (with S. Terashima) *Seiberg-Witten Geometry with Various Matter Contents*,
Nucl. Phys. B537 (1998), 344–360.
16. (with M. Noguchi and S. Terashima) *$N=2$ Superconformal Field Theory with ADE Global Symmetry
on a D3-brane Probe*,
Nucl. Phys. B556 (1999), 115–151.
17. (with Y. Yamada) *Affine 7-brane Backgrounds and Five-Dimensional E_N Theories on S^1* ,
Nucl. Phys. B to be published, hep-th/9907134.
18. (with M. Fukae and Y. Yamada) *Mordell-Weil Lattice via String Junctions*,
Nucl. Phys. B to be published, hep-th/9909122.

著書

「共形場理論と1次元量子系」、岩波書店(1997年), 236頁。(川上則雄氏との共著)