研究論文

学校数学における「美しさ」をとらえる枠組みの構築
── 数学における「美しさ」の特色の分析を通して ──

花　園　隼　人※

Construction of a framework to capture “aesthetic qualities” in school mathematics: Through an analysis of “aesthetic qualities” in mathematics

Hayato HANAZONO

1．研究意図

1．1　研究目的

数学の研究において，考察方法や結論の「美しさ」を追求することの重要性が主張されてきた（e. g. ポアンカレ, 1908/2002）。また，数学教育目標論においても数学における「美しさ」は着目されており（e. g. Young, 1924；杉山, 2012），数学の学習の際に学習者に数学の「美しさ」を例示することや，学習者が数学における「美しさ」を判断できるようになることが求められている。すなわち，学校で扱う数学（以降，学校数学）においても「美しさ」を考慮した教授・学習の実現が求められている。

数学における「美しさ」に関する研究は，数学においてどのようなものが美しいかを考察する方向性（e.g. ポアンカレ, 1908/2002；リヨネ, 1962/1975）と，数学の研究で美の判断がどのように役立つかを考察する方向性（e.g. ポアンカレ, 1908/2002；Sinclair, 2004）の二つが主として進められてきた。そして，この前者の考察の方向性については「美しさ」の判断が主観的であるといった理由から「何が美しいかの独断的規定に向かってよりは，美的判断がどんなふうに働き機能するのかの議論により多く向けられるようになってきた。」（デービスら, 1982/1986, p. 160）。しかし，ポアンカレ（1908/2002）が数学における「美しさ」

※筑波大学大学院人間総合科学研究科学校教育学専攻（数学教育学）

を説明する際に「吾々に優美の感を起さしめるのは」(p. 33，ただし下線は引用者）と一人称を複数形で述べていることや，デービスら（1982/1986）が$\sqrt{2}$の無理数であることの証明方法を二つ提示した上で，一方の証明を「専門数学者の10人中９人」(p. 289）がより美しいと判断すると述べていることから，数学における「美しさ」は数学者の間[1]で少なからず共有されていると考えられる。そして，この共有されている数学における「美しさ」の特色を明らかにすることは，学校数学における「美しさ」をとらえ，先述の数学教育における目標を達成する上で不可欠であると考える。

以上より，本研究では数学者の間で共有されている「美しさ」があることを前提とした上で，その「美しさ」の特色を明らかにし，その特色に基づいて学校数学における「美しさ」をとらえる枠組みを構築することを研究の目的とする。なお，本研究において数学における「美しさ」とは学問としての数学で美しいとされる対象を美しくさせている性質を意味し，学校数学における「美しさ」とは学校数学で扱う数学についての数学における「美しさ」を意味することとする。以降，本文中の誤解の生じない箇所では，数学における「美しさ」を単に「美しさ」と省略して表す。

１．２　研究方法

上記の目的を達成するために，本研究では数学者による「美しさ」についての説明がある文献に含まれる美の判断を分析する。特に，美しいと判断した対象のどのような性質を美しいと考えられているのかをとらえ，その数学者にとっての「美しさ」を特定する。そして，この「美しさ」は数学者の間で共有されているという前提のもと，特定した「美しさ」の共通点を抽出することで「美しさ」の特色を明らかにし，その特色に基づいて学校数学における「美しさ」をとらえる枠組みを構築する。

２．数学者の美の判断にみられる数学における「美しさ」の特色の分析方法

２．１　分析の対象

本研究では主として，ポアンカレ（1908/2002）とハーディ（1967/2006）による数学における美の判断を分析する。ポアンカレ,H.（1854-1912）とハーディ,G. H.（1877－1947）はともに著名な数学者であり，数学の研究における「美しさ」の

重要性や，数学における「美しさ」とは何かについての考えが，その著作『科学と方法』(ポアンカレ,1908) と「ある数学者の弁明」(ハーディ,1967) において言及されている。

彼らの数学における「美しさ」に関する考えは，「美しさ」に関する多くの先行研究において着目されてきた。例えばポアンカレの考えについては，数学者が「美しさ」や「美しさ」を感じる感覚を重要視している例として着目している研究 (e.g. デービスら,1982/2003; Dreyfus et al., 1986; Silver et al., 1989) や，数学の創造における「美しさ」の役割についての心理学的考察として着目している研究 (e.g. アダマール,1945/1990; Papert, 1978; Sinclair, 2004) が展開されている。また，ハーディの考えについては，数学者が「美しさ」を重要視している例として着目している研究 (e.g. デービスら,1982/2003; Sinclair, 2004) や，「美しさ」とは何かについての説明として着目している研究 (Dreyfus et al., 1986; Sinclair, 2006) が展開されている。

ポアンカレとハーディがこのように注目を集める理由は，彼らが世界的に著名な数学者であることから彼らの述べる「美しさ」が数学における「美しさ」のよい代表として考えられることに加えて，『科学と方法』と「ある数学者の弁明」における「美しさ」に関する言明が詳細であるためと考えられる。本研究では，数学における「美しさ」が数学者の間で共有されていることを前提として考察するため，その「美しさ」の説明としての信頼性が高く詳細が述べられているポアンカレ (1908/2002) とハーディ (1967/2006) を分析対象とすることは有意義であると考える。なお，ここでポアンカレ (1908/2002) とハーディ (1967/2006) の一方ではなく，両方を分析の対象とする理由は，ポアンカレ (1908/2002) の「美しさ」についての言及が抽象的であるのに対し，ハーディ (1967/2006) は具体的な定理の「美しさ」について言及しており，相補的であるためである。

2.2　分析の方法

本研究では，ポアンカレ (1908/2002) とハーディ (1967/2006) の美の判断において，美しいとされる対象が何で，その対象を美しくさせている性質が何かを分析することによって，この二人の数学者にとっての数学における「美しさ」を特定する。そして特定した「美しさ」の共通点をとらえることで，「美しさ」の特色を明らかにする。なお，この対象と性質の棲み分けは，本研究においては「美し

さ」を「美しいとされる対象を美しくさせている性質」ととらえていることに由来する。すなわち,「美しさ」とは数学者たちに美しいと判断された対象それ自身ではなく,対象がそなえている性質であるととらえている。例えば,オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ が指数関数と三角関数を統一的に表していることで美しいと判断されたとする。そのとき,美しいとされる対象はオイラーの公式であるが,「美しさ」はオイラーの公式ではなく,オイラーの公式を美しいと判断させた性質である統一性が該当する。このような対象と性質の棲み分けは,リヨネ(1962/1975)による数学における「美しさ」を分類する枠組みにも見られ,数学における「美しさ」をとらえるための分析として妥当であると考える。

2.3　分析箇所の抽出上の留意点

分析に当たっては,まず,数学における「美しさ」についてのポアンカレ(1908/2002)とハーディ(1967/2006)による言明から,美の判断を抽出する。その際,美しいとされる対象が何かだけでなく,その対象を美しくさせている性質が何かについても説明されている部分を抽出する。

このような抽出方法をとる理由は,本研究では美の判断が主観的であるととらえており,美しいとされる対象だけでは「美しさ」を特定することができないためである。例えば,フラクタル幾何学の第一人者であるベノア・マンデルブローは自身の名をもつマンデルブロー集合の説明において,研究の過程や集合のもつ単純さなどの性質及び,心臓形と円に近い図形が無数につながった形状について言及した後に,「もうこれ以上,この集合の美しさについて夢中でしゃべらせないで下さい。」(アルバースら,1985/1987, p. 253)と述べている。ここでマンデルブローが美しいとした対象はマンデルブロー集合であり,マンデルブロー集合は単純さなどの性質をそなえている。しかし,単純さなどの性質をそなえているからマンデルブロー集合を美しいと判断したのかは不明である。よって,このマンデルブローの例では単純さなどの性質は「美しさ」であるとは判断できない。

3．数学者の美の判断にみられる数学における「美しさ」の特色

3.1　ポアンカレ(1908/2002)の美の判断にみられる数学における「美しさ」の特定

3.1.1　ポアンカレ(1908/2002)の美の判断にみられる美の判断の抽出

ポアンカレ(1908/2002)[(2)]は自身の数学研究における美の判断の重要性を説明

する中で，「解に於て，また証明に於て，吾々に優美の感を起さしめる」(p. 33) ものとして次の説明を与えている。

> 異なった部分の間の調和，対称，いみじき均斉，つづめて言えば秩序をもたらし統一を与え，したがってまた細目をも，全体をも，ともに同時に明瞭に観取することを得しめるもの，かかるものは全て優美の感を起さしめるものである。 (ポアンカレ, 1908/2002, p. 33)

ここで，「異なった部分の間の調和」，「対称」，「いみじき均斉」は解や証明に「秩序をもたらし統一を与え」るものの例と考えられ，「秩序をもたらし統一を与え」ることから，「細目をも，全体をも，ともに同時に明瞭に観取することを得しめる」と読み取ることができ，そのようなものは全て「美しさ」を感じさせる対象であると解釈できる。換言すると，「秩序をもたらし統一を与えることで細目と全体をともに同時に明瞭に観取できるようにする」という性質をそなえた対象は「美しさ」を感じさせるものであり，その例が「異なった部分の間の調和」や「対称」，「いみじき均斉」であるといえる（判断 1 とする）。そしてポアンカレ (1908/2002) は「吾々が普通互に結びつけて考えていないような対象が思いがけなく同時に起こるとき，それを意外に思う感じ」(p. 33) によって美しさを感じると述べている。また，「手段の単純さと，課せられた問題の複雑さとの対照のみから生ずる」(p. 33) 場合（判断 2 とする）にも優美の感が起されると述べている。

3．1．2　ポアンカレ (1908/2002) の美の判断にみられる数学における「美しさ」の特定

3．1．1で挙げたポアンカレ (1908/2002) の言明にみられる美の判断における美しいとされる対象と，その対象を美しくさせている性質をまとめると以下の表 1 のようになる。

なお，判断 1 については，「美しさ」をもたらすものによってもたらされるものとして挙げられている統一性，明瞭性といった性質をここで述べられている「美しさ」としてとらえた。また，判断 2 において，美しいとされる対象は，手段の単純性と問題の複雑性という対極に位置する性質が共存していることによって生じる不均斉性をそなえていると考えられる。本研究ではこの不均斉性という性質が，ここで生じている「美しさ」であるととらえた。以下では判断 1 の対称性な

表1　ポアンカレの美の判断における美しい「対象」とその「性質」

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="2"></td><td colspan="3">美しいとされる対象とその性質</td></tr>
<tr><td>対象</td><td>対象がそなえる性質</td><td>性質をもたらすもの</td></tr>
<tr><td rowspan="2">美の判断</td><td rowspan="2">ポアンカレによる</td><td>判断1</td><td>解
証明</td><td>秩序
統一性
明瞭性</td><td>異なった部分の間の調和
対称
いみじき均斉</td></tr>
<tr><td>判断2</td><td>手段と問題</td><td>（手段の）単純性と（問題の）
複雑性の不均斉性</td><td>（明記なし）</td></tr>
</table>

どと同様に秩序や統一性，明瞭性という性質をもたらす他の対象を探るために，異なったものを統一的にみられる例を挙げて考察する。

まず，アポロニウスの円を考える。ここでは具体的に，2点 (0, 0)，(3, 0) からの距離の比が2：1である点の軌跡として考える。求める図形上の点の座標を $(x,\ y)$ とすると，

$$\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(x-3)^2+y^2}$$

を満たすので，両辺を2乗すると

$$x^2+y^2=4\ \{(x-3)^2+y^2\}$$

となり，これを整理すると，

$$(x-4)^2+y^2=4$$

が得られる。逆にこの円周上の点は2点 (0, 0)，(3, 0) からの距離の比が2：1であるので，求める軌跡は点 (4, 0) を中心とする半径2の円である。

続いて，2円 $x^2+y^2=4$，$(x-3)^2+y^2=1$ の共有点を通る図形の方程式を考える。実数の定数 k を用いて k についての恒等式を考えると，求める図形の方程式は，

$$x^2+y^2-4+k\ \{(x-3)^2+y^2-1\}=0$$

と表せる。ここで $k=-4$ の場合を考えると，この図形は円 $(x-4)^2+y^2=4$ に

なる。

ここで先のアポロニウスの円とこの2円の共有点を通る円の方程式を比較すると，二つの図形は同じ図形であるとわかる。そこで以下においては異なる考察で同じ図形が得られた理由を考える。

まず，アポロニウスの円としての円$(x-4)^2+y^2=4$は，方程式

$$x^2+y^2=4\{(x-3)^2+y^2\} \quad \cdots(*)$$

から得られた。また，2円の共有点を通る円としての円$(x-4)^2+y^2=4$は，方程式

$$x^2+y^2-4-4\{(x-3)^2+y^2-1\}=0 \quad \cdots(**)$$

から得られた。この方程式(**)を変形すると，

$$x^2+y^2-0=4\{(x-3)^2+y^2-0\} \quad \cdots(***)$$

が得られる。ここで，$x^2+y^2=X$，$(x-3)^2+y^2=Y$とおくと，方程式(***)は

$$(X-4)=4(Y-1)$$

となり，方程式(*)は

$$X=4Y$$

と2変数の比例を表す方程式で表現でき，これらの方程式がXY平面で表す二つの図形は，一方を自分自身に重なるように平行移動した図形になっている。同様に，XY平面において平行移動によって重なる図形の方程式とみなせるx，yについての方程式は，全てxy平面で同じ図形を表すことがわかる。さらに，2点から等距離にある点の軌跡（2点を端点とする線分の垂直二等分線）のように$X=kY$の形式で表される方程式は全て統一的に，比例を表す式と見なすことができる。すなわちこの例では比例という数学の性質が顕在化することによって，異なると考えていた2円の共有点を通る図形，垂直二等分線，アポロニウスの円に統一性がもたらされているので，比例は統一性をもたらすものであるといえる。

3．2　ハーディ（1967/2006）の美の判断にみられる数学における「美しさ」の特定

3．2．1　ハーディ（1967/2006）の美の判断にみられる美の判断の抽出

ハーディ（1967/2006）は数学の研究について説明する中で，「数学者は概念（アイディア）の織り成す様式をつくる人であり，その美しさと重さが，彼の様式を評価する基準である」(p. 30) と述べている。そして「美しさ」については，「画家や詩人の様式と同様に」(p. 20) とした上で，「様々な概念は，色や言葉と同様に，互いに調和しつつ全体を形作らなければならない」(p. 20) としている（判断３）とする。

また，「どの数学者も第一級品と認める」(p. 25) ユークリッドによる「素数が無限に存在することの証明」とピュタゴラスの「$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明」において識別できる「純粋に美的な」性質として，「必然性と経済性に結びついている非常に高度の意外性」を挙げている（判断４とする）。ここでは必然性や経済性といった一つ一つの語についての説明はないが，以下のような説明が挙げられている。

> 議論は極めて風変わりで，驚くべき形を取っている。その遠きに達する結果に比べれば，使われている道具は幼稚なほど単純に見える。しかし，結論には有無を言わせぬものがある。複雑に入り組んだ細かな議論はない—どちらの場合も，一撃でことが済む。　　　　（ハーディ，1967/2006，pp. 39-40）

ここで必然性を「何かがそれ以外ではありえないこと」，経済性を「手間がかからず効率がいいこと」，ととらえれば(3)，この説明のうち，「結論には有無を言わせぬものがある」の部分を必然性に，「その遠きに達する結果に比べれば，使われている道具は幼稚なほど単純に見える。」と「複雑に入り組んだ細かな議論はない—どちらの場合も，一撃でことが済む。」の部分を経済性に当てはめることができる。

また，ハーディ（1967/2006）は先述のように数学者のつくった様式の評価基準の一つに「重さ」を挙げているが，「数学の定理の美しさは，その重さに非常に大きく依存する」(p. 24) と述べている（判断５とする）。そして「重さ」とは，実用上の重要性にあるのではなく，「定理が相互に結びつける数学的な諸概念（アイディア）の意義にある」(p. 23) とし，数学的な概念が「意義ある」とは，「それが自然にまた明瞭に，他の多くの概念の総体と結びつけられること」(p. 24) と説明していることから，「重さ」とは，概念の連結可能性であるととらえられる。この「数学的概念を意義あらしめている性質」(p. 33) について，ハーディ（1967/2006）は本質的な事柄と

して「一般性」と「深さ」を挙げているが，これらは「美しさ」に関連の強い連結可能性としての「重さ」をとらえる重要な概念であると考えられるので，以下ではこの「一般性」と「深さ」について考察する。

(1)「重さ」としての「一般性」の意味

ハーディ（1967/2006）はこの「一般性」をもつ概念について，

> その概念は多くの数学的構築物の要素であり，多くの異なる種類の定理を証明するのに用いられる。定理は，もともと非常に特別な形で述べられていても（ちょうどピュタゴラスの定理のように），少なからず拡張の可能性を持ち，同種の諸定理の全体を代表するものである。証明によって明らかにされた諸関係は，多くの異なった数学的概念を結びつける。
>
> （ハーディ，1967/2006，p. 33）

と説明している。そして，この「一般性」は，全ての数学の定理がもつような一般性と区別していることを明確に述べ，全ての数学の定理がもつような一般性として，次の例を挙げている。

> 私たちが2+3=5と主張するとき，私たちは三つのグループの「もの」の間にある一つの関係を主張している。これらの「もの」はリンゴでも硬貨（ペニー）でも，あるいは何ら特定の種類のものでもなく，単なるもの，「どんなガラクタ」を持ってきてもよい。（ハーディ，1967/2006，p. 35）

この全ての数学がもつような一般性についての引用文と，先の「一般性」についての引用文とを比較すると，「重さ」としての「一般性」とは，定理が適用される範囲をもつことではなく，その範囲を拡張する可能性をもつことであると読み取れる。そして，定理が拡張されることで，多くの異なる数学的概念が結びつけられるものであるといえる。すなわち，この「一般性」とは，定理の一般化可能性または拡張可能性であると解釈できる。例えば，直角三角形の辺の長さについてのピュタゴラスの定理(4)は，それ自身どんな直角三角形にも適用できるという意味で一般的であるが，中線定理や余弦定理といった「一般性」をもっている。すなわち，ピュタゴラスの定理は中線定理や余弦定理の「代表」である（図1）。

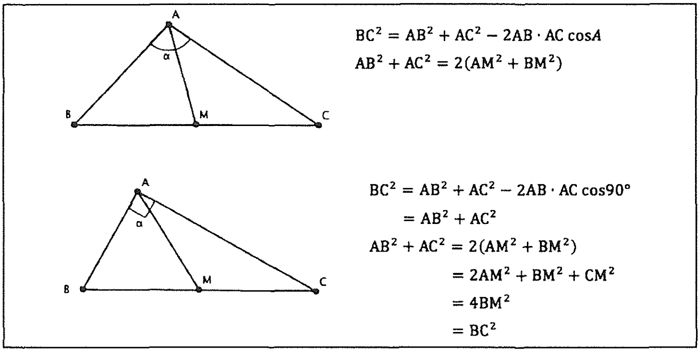

図1　「代表」としてのピュタゴラスの定理

(2)「重さ」としての「深さ」の意味

ハーディ（1967/2006）は，「深さ」について，

> 数学の諸概念は，何らかの階層上に構成されており，一つの階層の諸概念はそれらどうしの間で，また上下の階層の諸概念と，複雑な関係によって結びつけられている。階層が低ければ低いほど，概念はより深い（また，一般的にはより難しい）ものになる。　　　（ハーディ，1967/2006，pp. 37-38）

と述べ，「無理数」の概念が整数の概念より深いとし，そのためにピュタゴラスの定理[5]はユークリッドの定理よりも深いとしている。この引用文における説明から，「重さ」としての「深さ」とは，概念を構成する階層における位置を表す語であると読み取れる。そして，定理について考察する際に概念の階層におけるより「深い」位置にある概念を必要とすることで，その「深い」位置の階層と結びつけられるものであると考える。この点について，「深さ」に関わる他の概念を探るために，例を挙げて考察する。

2円 $x^2+y^2=4$，$(x-3)^2+y^2=1$ の共有点を通る図形のうち，直線であるものの方程式は，

$$x^2+y^2-4-\{(x-3)^2+y^2-1\}=0$$

で与えられ，整理すると

$$x=2$$

となる。この直線は，２円 $x^2+y^2=5$ と $(x-3)^2+y^2=2$ の共有点を通る直線でもあり，共有点をもたない二つの図形，２円 $x^2+y^2=3.5$ と $(x-3)^2+y^2=0.5$ の組や，円 $x^2+y^2=3$ と点（点円）$(x-3)^2+y^2=0$ の組からも，同様な方程式を立てることで得ることができる（図２）。

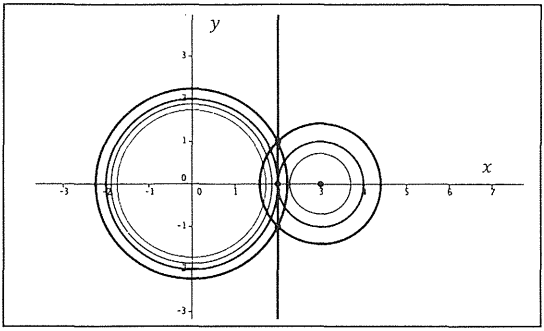

図２　２円 (点) と共有点を通る直線

この直線 $x=2$ が２円の共有点を通る直線を求める方法で得られたことを考えると，２円が共有点をもたないときにも存在することに違和感がある。そこで３次元の空間でこの関係を考えてみると，この円の組は二つの球の z 軸に垂直な平面による断面の組と見なすことができる。例えば二つの球を $x^2+y^2+z^2=5$, $(x-3)^2+y^2+z^2=2$ とすれば，$z=0$ による断面が２円 $x^2+y^2=5$ と $(x-3)^2+y^2=2$ になり，$z=1$ による断面が２円 $x^2+y^2=4$ と $(x-3)^2+y^2=1$ になり，$z=\sqrt{2}$ による断面が，２円 $x^2+y^2=3$ と $(x-3)^2+y^2=0$ になる。そして直線を与えた方程式は，

$$x^2+y^2+z^2-5-\{(x-3)^2+y^2+z^2-2\}=0$$

と見なすことができ，これは平面 $x=2$ を与えることになる。

この例では，直線 $x=2$ の存在の説明において次元という概念に着目して，もともとの図形を考えていた２次元ではなく３次元において考察することで，平面を表す方程式として $x=2$ をとらえることができたといえる。このとらえ方によって，断面図で与えられた２円が共有点をもたなくても２球の共有点を通る平面の断面図として直線が存在することが必然であることが説明できた。また，次元という概念の階層を変えて考察したことで，平面図形の性質と空間図形の性質を

結びつけることができた。すなわち，次元という概念は「深さ」に関わる概念であり，３次元は２次元よりも「深い」概念であるといえる。

３．２．２　ハーディ（1967/2006）の言明にみられる数学における「美しさ」の特定

３．２．１ではハーディ（1967/2006）の言明にみられる美の判断を三つ挙げた。それらを順に判断３，判断４，判断５として，美しいとされる対象とその対象がそなえる性質をまとめると表２のようになる。ただし，判断５については美の判断そのものではなく，「美しさ」の必要条件ともとらえられる「重さ」について取り上げたものであったので，表についても二重線によって区分けする。

表２　ハーディの美の判断における美しい「対象」とその「性質」

		美しいとされる対象とその性質		
		対象	対象がそなえる性質	性質をもたらすもの
ハーディによる美の判断	判断３	様々な概念が形作る全体	調和	（明記なし）
	判断４	ユークリッドによる素数が無限に存在することの証明 ピュタゴラスによる$\sqrt{2}$が無理数であることの証明	必然性と経済性に結びついている非常に高度の意外性	（明記なし）
	判断５	定理 $\sqrt{2}$が無理数であるという定理	概念の連結性	他の概念との連結可能性としての「重さ」

３．３　「美しさ」であるための必要条件としての意外性が生起する場面の同定

３．３．１　「美しさ」であるための必要条件としての意外性

ポアンカレ（1908/2002）とハーディ（1967/2006）のとらえている数学における「美しさ」には，ともに意外性が含まれている。この意外性に関してデービスら（1982/1986）は，「黄金比Φにおける美的喜びは，今日ではそれが生起するさまざまな意外な場所から生ずるように思われる」(p. 161）と述べている。このデービスら（1982/1986）の言明を踏まえても，統一性などの性質が「美しさ」となるための必要条件に意外性があると考えられる。ただし，ポアンカレ（1908/2002）やハーディ（1967/2006）の言明にみられるように，意外性があれば美しいというわけではないので，意外性は「美しさ」と同値ではない。そこで，

本研究では統一性などの性質が「美しさ」となるための必要条件として意外性があるととらえる。

3．3．2　意外性が生起する場面の同定

ポアンカレ（1908/2002）は「吾々が普通互に結びつけて考えていないような対象が思いがけなく同時に起こるとき」(p. 33）に意外性を感じると述べている，また，統一性は「異なった部分の間の調和，対称，いみじき均斉」などから得られるものであったが，これが意外であるとは，「異なった」と考えていたものが統一的にとらえられることから生じると考えられる。また，「手段の単純さと，課せられた問題の複雑さとの対照」から「美しさ」を感じると述べており，ここでも意外性が生じていると考えれば，手段の単純性と問題の複雑性という対極に位置づくような性質が共存していることで意外性が生じていると考えられる。

また，ハーディ（1967/2006）は必然性と経済性に結びついた意外性を，ユークリッドによる「素数が無限に存在することの証明」とピュタゴラスの「$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明」から感じており，特に経済性についての「その遠きに達する結果に比べれば，使われている道具は幼稚なほど単純に見える。」(pp. 39-40）という説明から，証明の道具の単純性に対する「有益」な結果から意外性が生じると考えられる。

このポアンカレ（1908/2002）とハーディ（1967/2006）の説明した意外性が生じる過程は二つに分けられる。一つ目は，「異なるものが統一的に見られる」ときのように，ある種の状態が改められた状態に変容することに対して意外性が生じている場合である。このことに関してデービスら（1982/1986）は，「強い個人的な美的喜びの感覚は，混沌がなくなった秩序と呼ばれうる現象から生じる。」(p. 162）と述べている。このデービスら（1982/1986）の言明を踏まえると，混沌とした状態が秩序ある状態に変容したときに，「美しさ」を感じさせる意外性が生じるととらえられる。

二つ目は，「手段の単純さと，課せられた問題の複雑さとの対照」や「その遠きに達する結果に比べれば，使われている道具は幼稚なほど単純に見える」ことのように，「単純性と複雑性」のように対極に位置する性質が共存している不均斉な状態によって意外性が生じている場合が考えられる。

以上をまとめると，数学における「美しさ」の共通点として，「混沌とした状態

から秩序ある状態への変容」または「対極に位置する性質の共存」によって意外性が与えられることが挙げられる。以下ではこの「混沌とした状態から秩序ある状態への変容」または「対極に位置する性質の共存」が起きたときには，意外性が生じているものとして考える。

3．4　数学において「美しさ」をそなえる対象と「美しさ」をもたらすもの

3．4．1　「美しさ」をそなえる対象

数学において美しいとされる対象としては，「解」や「証明」，「手段と問題」，「様々な概念が形作る全体」，ピュタゴラスによる「$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明」，「$\sqrt{2}$ が無理数であるという定理」，ユークリッドによる「素数が無限に存在することの証明」，「定理」を挙げた。この中で，「素数が無限に存在することの証明」と「$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明」は「定理とその証明」であり，定理を問題，証明を解決方法ととらえれば，「手段と問題」と同様に「問題とその解決手段」とまとめることができる。よって，「美しさ」をそなえる対象には，「問題とその解決手段」と「解」，「証明」，「定理」，「様々な概念が形作る全体」が挙げられる。また，この中で「問題とその解決手段」については「対極に位置する性質の共存」によって不均斉もそなえうる対象である。

3．4．2　「美しさ」をもたらすもの

数学において「美しさ」をもたらすものには，対称性や「異なった部分の調和」，「いみじき均斉」，「重さ」を挙げ，筆者による考察によって比例も同様なものとして挙げた。そしてこれらは，「混沌とした状態から秩序ある状態への変容」において「美しさ」をもたらしうるものであった。

ここで，ポアンカレ（1908/2002）の美の判断の分析から挙げた「異なった部分の間の調和」は「美しさ」をもたらすものとして挙げたが，ハーディ（1967/2006）の美の判断の分析から抽出した「様々な概念が形作る全体」の調和は，「様々な概念が形作る全体」がそなえる「美しさ」として挙げた。これは調和が性質を表すものであるため，「美しさ」をもたらすものとしても「美しさ」そのものとしても該当したと考えられる。

なお，ここで挙げた対称性や比例とはそれら自体が数学における性質であるが，これらは数学の概念を特徴づけるパターンでもあるといえる。Steen（1990）は

数理科学としての数学の大きな広がりを考慮し，数学をパターンの科学ととらえた上でその体系の根源をなすものとして，伝統的に学校で基本となっている算術，測定，代数，初等的な幾何の他に，「特徴」として〈線形的，周期的，対称的，連続的，ランダム（無作為），最大，近似的，なめらか〉の八つを挙げている。これらは数学の概念の特徴を表す性質であるが，ここに対称性が含まれていることから，他の線形性や周期性，連続性といった性質も「美しさ」をもたらす対象となるパターンであると示唆される。また逆に，「美しさ」をもたらす対象となるパターンも，数学の体系の根源をなすものになりうることも示唆される。この点については今後詳細に考察する。

3．5　数学における「美しさ」の特色

数学者の美の判断に見られる数学における「美しさ」の共通点についての考察から，数学における「美しさ」は意外性を伴うものであり，意外性が生起する場面を考慮すると，混沌とした状態が秩序ある状態に変容するときに「美しさ」が生じる場合と，対極に位置する性質が共存しているときに「美しさ」が生じる場合があるという特色が明らかになった。さらに，混沌とした状態が秩序ある状態に変容するときに「美しさ」が生じる場合には，対称性などの「美しさ」をもたらすものが特定できうることと，「美しさ」をそなえる対象のうち，「問題とその解決手段」については，対極に位置する性質の共存によって「美しさ」を生じさせうる対象であることも明らかになった。

4．学校数学における「美しさ」をとらえる枠組み

4．1　学校数学における「美しさ」をとらえる枠組み

3節までの考察によって，数学における「美しさ」は生起の方法と対象との関係という二つの観点に関する特色があることが明らかになった。そこで，学校数学においてこの二つの観点において同様な特色をもつ性質をとらえる枠組みを構築することで，学校数学における「美しさ」をとらえる枠組みを提示する。

まず，「混沌とした状態から秩序ある状態への変容」という「美しさ」の生起方法に着目し，学校数学における定理などの対象がそなえる「美しさ」をとらえることを考える。このとき，「美しさ」は混沌とした状態 S_C から秩序ある状態 S_O への変容 $S_C \rightarrow S_O$ によって生じることから，この定理などの対象が変容後の秩

序ある状態であるととらえる。そして変容前の混沌とした状態を特定することによって，この変容によって生じる「美しさ」をとらえる。例えば，先述の比例について考えると，どちらも比例という性質を表しているということが顕在化された状態を S_O ととらえ，アポロニウスの円と２円の共有点を通る円が異なるものとしてとらえられている状態が S_C であると考える。そして，$S_C \rightarrow S_O$ を考えることによって，アポロニウスの円と２円の共有点を通る円の比例という性質が顕在化された状態が統一性という「美しさ」をそなえていることがとらえられる。また，この統一性という「美しさ」は比例によってもたらされたこともとらえられる。この例をまとめると以下の表３のようになる。

この例で「美しさ」とした性質は統一性であったが，「美しさ」を判断する主体によっては異なる表現がなされることは考えられる。しかし，このように「美しさ」を変容する二つの状態 S_C，S_O とあわせてとらえることによって，「$S_C \rightarrow S_O$ によってもたらされる性質」自体は特定することができる。よって，学校数学における対象について $S_C \rightarrow S_O$ を特定することによって，「混沌とした状態から秩序ある状態への変容」によって生じる学校数学における「美しさ」をとらえることができる。

続いて，「対極に位置する性質の共存」という「美しさ」の生起方法に着目し，学校数学における定理とその証明などの対象がそなえる「美しさ」をとらえることを考える。このとき，「美しさ」である不均斉性は対極に位置する性質 q_1 と q_2 の共存（q_1，q_2）によって生じることから，この定理とその証明の全体がそなえる性質のうち，対極にあるものを明らかにすることができれば，不均斉性という「美しさ」をとらえることができる。例えば，$\sqrt{2}$ が無理数であるという定理とその証明について考える。この定理は単に２の正の平方根が整数の比で表せないことを示しているのみに留まらず，線分の長さを数で表したり２次方程式を解いた

表３　比例がもたらす「美しさ」

S_C	S_O	「美しさ」	「美しさ」をもたらすもの
アポロニウスの円と２円の共有点を通る円が異なるものとしてとらえられている状態	どちらも比例という性質を表していることが顕在化されている状態	統一性	比例

りするにあたっては有理数のみを考えていては不十分であることなど，数学において多大な貢献をしている多産的な定理であるといえる。一方，この定理の証明は，ハーディ（1967/2006）が述べるように，背理法という集合の考えに基づいた方法が用いられているものの，中学校までで学習する概念や演算で事足りる単純なもので行うことができるといえる。すなわち，定理は多産的（q_1とする）であるにもかかわらず，証明は単純（q_2とする）であるという不均斉性が生じているといえる。

しかし，この考察において，考察の過程で特定した性質 q_1と q_2は，それぞれ筆者が主観的に定めたものであった。実際，性質 q_2は背理法を難しいと考える場合には単純とはいえない。さらに，性質 q_1と q_2が対極に位置することも，主観によって定めることになる。このような性質 q_1と q_2についての主観性は，この例ではなくても同様に起こりうると考える。よって，本研究では学校数学において考えられる「美しさ」のうち，「対極に位置する性質の共存」によって生じる不均斉性については考察の対象とはしない。

以上から，本研究では学校数学における「美しさ」をとらえる枠組みとして，生起の方法としてに着目した次の表4で表されるものを提示する。

表4　$S_C \rightarrow S_O$によって生じる学校数学における「美しさ」をとらえる枠組み

S_C	S_O	「美しさ」をもたらした対象	「美しさ」

4．2　学校数学における「美しさ」をとらえるという視点からみた数学教育の改善の示唆

本研究で特定した美しい対象のうち，「美しさ」をそなえる対象であるユークリッドによる「素数が無限に存在することの証明」とピュタゴラスによる「$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明」は高等学校における背理法の学習で取り上げられるものであり，後者は教科書にも記載されている。また，「美しさ」をもたらすものである対称性や比例は小学校第5学年から取り上げられる概念である。よって，日本のカリキュラムにおいては，数学において美しいとされる対象や「美しさ」をもたらすものについて学習する機会があるといえる。

しかし，例えば学習指導要領における比例の取扱いをみると，比例を用いて問題を解決することや関数の基本的なものとして理解することが学習の目標となっており（文部科学省，2008，pp. 56-57），統一性をもたらすものとしての扱いは必ずしも強調されていない。ただし，関数 $y = a\,x^2$ については，「x^2 に比例する関数」としての扱いがみられ，比例としての統一性が示されているので，この関数 $y = a\,x^2$ のように，１次関数 $y = a\,x + b$ を「$\left(x + \frac{b}{a}\right)$ に比例する関数」とみることや反比例 $y = \frac{a}{x}$ を「x の逆数に比例する関数」とみることによって，比例がもたらす統一性が強調されると考えられる。

この比例のように，他の対象ついても同様に美しいとされる対象の「美しさ」が何であるかを本研究で提示した枠組みによって明確にすることは，冒頭で述べた数学教育における目標を達成する上で不可欠であると考える。

５．研究の総括と今後の課題

本研究では数学における「美しさ」の特色を明らかにし，その特色に基づいて学校数学における「美しさ」をとらえる枠組みを構築することを目的として，ポアンカレ（1908/2002）とハーディ（1967/2006）による美の判断の分析を行った。その結果，数学における「美しさ」は（ｉ)「混沌とした状態から秩序ある状態への変容」または「対極に位置する性質の共存」によって生じるという生起の方法についての特色と，（ii)「渾沌とした状態から秩序ある状態への変容」によって「美しさ」が生じるときには，「美しさ」をもたらすものが特定できうるという特色が明らかになった。そしてこの特色に基づいて，学校数学における「美しさ」をとらえる枠組みを提示した。

今後の課題は構築した枠組みを用いて学校数学における「美しさ」を具体的内容に基づいて特定すること及び，それら「美しさ」のうち生徒が美しいと感じるものを明らかにすることである。

註

（１） この「美しさ」を共有している数学者の時間的・文化的な範囲については議論する必要がある。この点についてデービスら（1982/1986）は「文化や世代と共に変わる傾向があり」(p. 160）と指摘している。この点に関する考察は今後の課題とする。

（２） ポアンカレ（1908/2002）の原文は旧漢字が用いられているが，本稿では新漢字を用いる。

（3） すべて広辞苑（第五版）に基づいてとらえた。「必然性」は原文のままである。「経済性」は「経済的な効率」とあり，「経済的」は「費用・手間がかからないさま」となっていたことと，文脈から費用という観点を省き，「手間がかからず効率がいいこと」とした。「意外性」は広辞苑には含まれていなかったので，「意外」の項目にあった「思いのほか」を調べ，「予測と違って」となっていたことから「予想と違うこと」とした。

（4） 「一般性」を説明している引用文中のピュタゴラスの定理は，ピュタゴラスによる「$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明」を指しており，この場合の「一般性」は，「殆ど同様な考え方で，非常に広い範囲の『無理数』に応用できる」（ハーディ，1967/2006，p. 31）ことが該当していると考えられる。

（5） （4）と同様に，「$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明」を指している。「深さ」の説明の引用文中のピュタゴラスの定理も同様。すなわち，引用文中のピュタゴラスの定理の基礎にある概念とは無理数のことを指している。

引用・参考文献

アダマール，J.（1945/1990）．『数学における発明の心理』．みすず書房．

アルバース，D. J.・アレクサンダーソン，G. L.（編）（1985/1987）．『数学人群像』．近代科学社．

デービス，P. J.・ヘルシュ，R.（1982/2003）．『数学的経験』．森北出版株式会社．

Dreyfus, T. and Eisenberg, T. (1986). On the aesthetics of mathematical thought. *For the learning of mathematics.* 6(1). pp. 2-10.

ハーディ，G. H.（1967/2006）．「ある数学者の弁明」．ハーディ，G. H.，スノー，C. P.（2006）．『ある数学者の生涯と弁明』．シュプリンガー・ヘアラーク東京株式会社．

リヨネ，F. L.（1962/1974）．「数学における美」．リヨネ，F. L.（編）（1962/1974）．『数学思想の流れ３』．東京図書．

文部科学省（2008）．『中学校学習指導要領解説 数学編』．教育出版株式会社．

Papert, S. A (1978). The mathematical unconscious. In Wechsler, J. (Ed.). *On aesthetics and science.* Boston: Birkhauser.

ポアンカレ，H.（1908/2002）．『改訳　科学と方法』．岩波書店．

Silver, E., and Metzger, W. (1989). Aesthetic influences on expert mathematical problem solving. In D. B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: a new perspective.* New York: Springer-Verlag. pp. 59-74.

Sinclair, N. (2004). The role of the aesthetic in mathematical inquiry. *Mathematical Thinking and Learning,* 6 (3), pp. 261-284.

Sinclair, N. (2006). *Mathematics and beauty: aesthetic approaches to teaching children.* New York: Teachers College Columbia University Press.

新村出（編）（1998）．『広辞苑 第五版』．岩波書店．

Steen, L. A. (Ed.) (1990). *On the shoulder of the giants: new approaches to numeracy.* Washington, D. C.: National Academy Press

杉山吉茂 (2012). 論説「数学する心」を育てる. 杉山吉茂先生喜寿記念論文集編集委員会(編)(2012).『続・新しい算数数学教育の実践をめざして―杉山吉茂先生喜寿記念論文集』. pp. 13-19. 東洋館株式会社.

Construction of a framework to capture "aesthetic qualities" in school mathematics: Through an analysis of "aesthetic qualities" in mathematics

Hayato HANAZONO

It is important in mathematics that methods and results of a discussion of mathematics are aesthetic. In mathematics education, it is important that teachers exemplify "aesthetic qualities" in mathematics and students learn to judge and recognize "aesthetic qualities" in mathematics. However, it is not clear what "aesthetic qualities" in mathematics is, and likewise it is not clear what "aesthetic qualities" in school mathematics are.

The purpose of this study is to construct a framework for capturing "aesthetic qualities" in school mathematics based on the characteristics of "aesthetic qualities" in mathematics on the assumption that "aesthetic qualities" are shared among mathematicians.

In order to accomplish the above purpose, this study analyzes aesthetic judgments in Poincare (1908/2002) and Hardy (1967/2006).

As a result, uniformity and clarity caused by harmony and symmetry are given as "aesthetic qualities" in mathematics. Under such consideration, "aesthetic qualities" in mathematics occurs by "transformation to an orderly state from a state of complexity" or "coexistence of qualities which is positioned as a counter." Therefore, this study established the characteristics of "aesthetic qualities" in mathematics as a qualities that occurs by "transformation to an orderly state from a state of complexity" or "coexistence of quality that is positioned as a counter."

Based on the characteristics of "aesthetic qualities" in mathematics, this study constructed a framework to capture "aesthetic qualities" in school mathematics from the viewpoint of how "aesthetic qualities" in mathematics occurs and the viewpoint of relationships between aesthetic "objects" and "aesthetic qualities." And, it is clear that school mathematics in Japan deals with aesthetic "objects," but does not necessarily deal with aesthetic "objects.". Therefore, this paper recommends that school mathematics clarify "aesthetic qualities" by the framework built in this study.