言語ゲームの拡張，経路依存，確率安定性

颯々野 大志,* 福住 多一 †

概 要

プレイヤー集団 A とプレイヤー集団 B があるとする．各プレイヤーは同じ集団内のプレイヤーを相手に，ある 2×2 純粋協調ゲームをプレイする．この純粋協調ゲームにおける利得は，各集団内ではすべてのプレイヤーで同じとする．集団 A のプレイヤーと集団 B のプレイヤーは交流もする．互いに別のグループのプレイヤーを相手に，先の協調ゲームと同じ選択肢から成る 2×2 ゲームをプレイする．そこでは，戦略の協調が成功してもプレイヤー間に利害対立があるような男女の争いゲームをプレイする．Neary (2012) が定式化したこの言語ゲームにおいて，別の集団に属すプレイヤーどうしがゲームをプレイする際に，シナジー効果による利得増加や取引費用を許す拡張された言語ゲームを我々は提示する．この拡張された言語ゲームについて，静学的な均衡，プレイヤー集団の適応過程が経路依存性を持つ場合の各均衡状態への吸引流域，そして，この適応過程に各プレイヤーの突然変異を許す確率的な進化プロセスの確率安定性を持つ均衡状態，それぞれの特徴を調べる．

キーワード：集団ゲーム，協調ゲーム，均衡選択，適応過程，確率安定性，慣習

1 イントロダクション

多数のプレイヤーから成る 1 つのプレイヤー集団を想定し，それをグループ A と呼ぶ. 我々は離散的な時間（期間）$t = 1, 2, \ldots$ を想定する．各期 t は，その期首と期末の 2 ステージに分けられる．各 $t-1$ 期の期末に，グループ A 内の各プレイヤーは，2×2 協調ゲーム G^{AA} において自らがとる純粋戦略を選ぶ. そのゲーム G^{AA} は次の利得表で表されるとしよう.

G^{AA} （行：A_1，列：A_2）

	a	b
a	$0.8, 0.8$	$0, 0$
b	$0, 0$	$0.2, 0.2$

翌 t 期の期首に，各プレイヤーはグループ内の他のプレイヤー**全員と 1 回ずつ**この協調ゲームをプレイする．[1] その際，どの相手プレイヤーであっても，各プレイヤーが用いる純粋戦略は直前の $t-1$

*筑波大学 社会・国際学群 社会学類 経済学主専攻
†筑波大学大学院 人文社会系 経済学専攻

[1] 他のプレイヤー全員と 1 回ずつゲームをプレイするという設定を，他の各プレイヤーと等確率でマッチングする（ランダム・マッチング）という設定にしても，本質的に以下の議論は変わらない.

期に選んだ戦略である点に注意する．つまり $t-1$ 期末に 1 つの戦略にコミットし，翌 t 期にそれを実行する．この t 期首のプレイによって，各プレイヤーの t 期の利得が定まる．

この利得表からわかるように，グループ A のプレイヤーは，この協調ゲームにおいて皆同じ選好を持つ．そして戦略の組 (a,a) と組 (b,b) が，ともにこのゲームの純粋戦略ナッシュ均衡点である．各プレイヤーの立場からすれば，いずれの戦略を $t-1$ 期末に選ぶべきか判断に迷うゲームである．

そこで，グループ A のプレイヤー集団にある適応プロセスを想定する．各 $t-1$ 期の期首において，グループ内の各プレイヤーはゲーム G^{AA} を他のプレイヤー全員とプレイしている．この全員のプレイの結果を，各プレイヤーがその $t-1$ 期末の意思決定の際には観察できているとする．例を考えてみよう．ある $t-1$ 期首のゲームのプレイにおいて，自分以外のプレイヤー数の 2 割未満しか戦略 a をとっていなかったとする．これを観察した各プレイヤーは，その $t-1$ 期末での意思決定で戦略 b を選ぶインセンティブを強く持つであろう．[2] したがって，翌 t 期の期首において，ゲーム G^{AA} で戦略 b をとるプレイヤー数は，直前の $t-1$ 期首で戦略 b をプレイしていたプレイヤー数よりも増加するであろう．この t 期首に戦略 a をとったプレイヤー数は，$t-1$ 期より減少しているのであるから，t 期末に戦略 b を選び $t+1$ 期にその戦略 b をプレイするプレイヤーは，ますます増加するであろう．初期時点 $t=0$ においてグループ内で各戦略をプレイするプレイヤー数が与えられたとき，各期に各プレイヤーがプレイする純粋戦略は，ここで述べたような適応プロセスにしたがって戦略 a もしくは戦略 b のいずれか一方のみに，次第に収束していく．[3]

一般に，プレイヤー集団において各 t 期に各戦略をとるプレイヤーの人数を表すものを，当該プレイヤー集団の t 期の**状態**（state）と呼ぶ．あるプレイヤー集団において，初期状態から適応プロセスによってその集団の状態がある状態に次第に近づいていくとする．上で述べたストーリーでは，その近づき先の状態においてゲームの均衡点がプレイされる．適当な初期状態が与えられ，プレイヤー集団の適応プロセスによってゲームのある均衡がその集団内で定型的にプレイされるようになることを，経済学の文脈では，そのプレイヤー集団（もしくは，その社会と言っても良いであろう）における歴史的**経路依存性**（path dependence）を伴う慣習・文化の生成現象と解釈する．このグループ A の各プレイヤーにとって，協調ゲームの利得表を見る限り，均衡点 (a,a) のほうが均衡点 (b,b) よりも明らかに望ましい．しかし経路依存性によれば，その望ましいほうがグループ A 内に定着するかどうかは，初期時点でのグループ A の状態次第である．

ここまで，各プレイヤーは各 $t-1$ 期末に決定した純粋戦略を，翌 t 期首に確実に実行する適応プロ

[2]自分以外のプレイヤーのうち 2 割未満しか戦略 a をとっていないこの状況において，その状況が次期も続くと各プレイヤーが想定したとする．そして，その想定に基づいてすべてのプレイヤーが最適な戦略 b を確実に選ぶというような意思決定をするとする．各プレイヤーのこのような意思決定方法に基づいたプレイヤー集団の適応プロセスは，**最適反応動学**（best response dynamics）と呼ばれる．我々の以下の議論は，この最適反応動学のケースを排除はしない．しかし，よりマイルドな，もしくはより限定合理的な各プレイヤーの意思決定に基づくプレイヤー集団の適応プロセスを含めた議論を我々は展開する．

[3]正確に述べれば，すべてのプレイヤーが，いずれの戦略をとっても同じ利得になる状況も起こり得る．ただしそのような状況からは，続けて説明する突然変異のようなプレイヤーが 1 人でも存在すればプロセスは脱出する．そのため分析上，本質的ではない場合は，この節では言及しない．以下，同様である．

セスを考えてきた．このプロセスを次のように変更する．各プレイヤーは当初の適応プロセスを構成していた各プレイヤーの判断基準に従って，各 $t-1$ 期のグループの状態を観察したうえでその $t-1$ 期末にいずれか一方の純粋戦略を選ぶ．ところが，翌 t 期の期首にゲーム G^{AA} をプレイするが，この際，$t-1$ 期に選んだ純粋戦略**ではない方の**純粋戦略を，各プレイヤーは独立して小さな正の確率 $\varepsilon > 0$ で実行する．したがって各プレイヤーが当初の適応プロセスを構成した判断基準に従って各 $t-1$ 期末の決定どおりの純粋戦略を翌 t 期に実行する確率は $1-\varepsilon$ となる．すると各 $t-1$ 期首のグループ内でとられた各純粋戦略の人数，つまり各 $t-1$ 期のグループの任意の状態から，翌 t 期には任意の状態に正の確率でこのグループは到達可能となる．各 $t-1$ 期にグループ内で各戦略がプレイされた人数がそれぞれ何人であっても，翌 t 期にグループ内で各戦略がプレイされる人数に関して，あらゆる場合が起こり得る．我々は，経路依存性を持つ適応プロセスに，このような各プレイヤーの各期のランダムな選択を加味した確率的な適応プロセスを考察する．[4]ここでの小さな確率 $\varepsilon > 0$ は，確率的な適応プロセスにおける**突然変異**（mutation）の確率と呼ばれる．

各戦略を実行するプレイヤーの人数が，このグループの状態を表していた．その状態には，すべてのプレイヤーが戦略 a をとるものから，すべてのプレイヤーが戦略 b をとるものまでいくつもある．このような各状態が起こる確率を表したものを，状態空間上の確率分布もしくは**状態分布**と呼ぶ．適応プロセスが確率的になったので，これまでのように初期状態が期間を経てどのように変化するかという表現は用いない．初期 $t=0$ の状態分布が，確率的な適応プロセスによってどのように推移していくのかを考察することになる．

今，我々は，当初の経路依存的な適応プロセスに，各期に各プレイヤーが，独立して少なくとも確率 $\varepsilon > 0$ であらゆる戦略をランダムに選択することを許す確率的なプロセスを考えている．この確率的なプロセスにおいて，各期から翌期にかけて全く変化しない状態分布が唯一存在することが知られている．このように全く変化しない状態分布を，突然変異確率 ε の確率的プロセスにおける**定常分布**（stationary distribution）と呼ぶ．この定常分布は次の性質を持つことも知られている．この確率的なプロセスの開始時点の状態分布がどのような分布であっても，そこからこの確率的プロセスにしたがって状態分布は次第にその唯一の定常分布に収束していく．また，どの状態から出発しても，その確率的なプロセスにしたがって各期に実現する状態の時間平均をとっていくと，それはこの定常分布に収束することが知られている．[5]初期時点での状態の確率分布にかかわらず，状態分布が期間を経て次第に唯一の定常分布に定まっていく．これはつまり，突然変異を適応プロセスに導入した確率的な適応プロセスでは，初期時点からの経路依存性が消滅するということである．

さらに，本来，突然変異は非常に小さな確率で起こる．この突然変異の確率 $\varepsilon > 0$ を限りなく小さ

[4]この確率的プロセスは，モデルではマルコフ連鎖によって表される．

[5]状態のプロセス上の時間平均と，空間的な定常分布が一致するこのような性質は，確率的なプロセスの**エルゴード性**（ergodicity）と呼ばれる．この場合，確率的な動学モデルの均衡概念として定常分布は望ましい性質を持つと言えよう．

くしていっても，それに伴い定常分布が収束する収束先の分布において正の確率が付与される状態に，我々は関心がある．この状態は**確率安定性**（stochastic stability）を持つと言われる．

ここで述べてきたストーリでは，グループ A のプレイヤー全員が戦略 a をとる状態のみが確率安定性を持つことが容易に示される．これをもって，確率進化モデルによって均衡点 (a, a) が選択されるという．戦略の組 (a, a) はグループ A のプレイヤーにとって望ましいほうの均衡点である．[6]

言語ゲーム（Language game）

グループ A とは別のプレイヤー達から成るグループ B が存在するとしよう．グループ A の場合と同じく離散時間 $t = 1, 2, \ldots$ を想定する．各 $t-1$ 期末の意思決定の仕組みと，続く t 期にゲームをプレイして利得が実現する仕組みやタイミングに関してもグループ A とすべて同じとする．グループ B の各プレイヤーも同じグループ B 内のプレイヤーと，グループ A と同じく戦略 a と戦略 b からなる 2×2 協調ゲーム G^{BB} をプレイする．そのゲーム G^{BB} の利得表は次であるとしよう．

G^{BB} B_2

B_1		a	b
	a	$0.4, 0.4$	$0, 0$
	b	$0, 0$	$0.6, 0.6$

ただしグループ B のプレイヤー達がグループ内のメンバーどうしでプレイするこの協調ゲーム G^{BB} は，利得がグループ A のものとは異なっている．上記の利得表が示すように，グループ B のプレイヤーは，純粋戦略の 2 つの均衡点のうち (b, b) を (a, a) より好んでいる．

グループ B の各プレイヤーも，各 $t-1$ 期の期首でグループ内すべてのプレイヤーのプレイの結果を観察して $t-1$ 期末に意思決定をする．そして続く t 期首に，直前期末に選んだ戦略を確実に実行する．するとグループ A の場合と同様，初期時点 $t = 0$ のグループ内で各戦略をとっている人数がどれくらいいるかに依存して，毎期の各プレイでとられる純粋戦略は，戦略 a もしくは戦略 b のいずれか一方に次第に収束していく．グループ A の場合と同様，各 t 期に小さな確率 $\varepsilon > 0$ で，各プレイヤーが $t-1$ 期末に選んだ純粋戦略とは異なる戦略を独立に選ぶとする．するとグループ B 内の協調ゲーム G^{BB} では，効率的な戦略の組 (b, b) のみが確率安定性を持つことが示される．

ここからグループ A とグループ B のプレイヤー間に，**交流**がある場合を考えよう．この交流とは，異なるグループのメンバーどうしがゲームをプレイする関係にあるという意味である．

[6] この協調ゲームが 1 回限りしかプレイされないとしよう．すると，各プレイヤー個人の動機に基づいて，いずれの均衡がプレイされるかについて，先験的に予測するのは困難である．このような困難を伴う状況に対して，プレイヤー集団の適応過程を設定して分析を進めていくことは，**進化ゲーム理論**モデルによる均衡選択と呼ばれる．ここで説明した小さな確率のひっきりなしの突然変異を伴う適応過程を想定し，均衡点を選択しようとするモデルを特に**確率進化モデル**（stochastic evolutionary model）と呼ぶ．確率安定性の概念による均衡選択を提示したのは，Kandori, Mailath and Rob (1993) 及び Young (1993) である．

これまでと同様に離散時間 $t = 1, 2, \ldots$ を想定する．各 t 期の期首において，各プレイヤーは自分以外の全てのプレイヤーと 1 回ずつ協調ゲームをプレイする．ただし，所属するグループを問わず各プレイヤーは，相手プレイヤーの所属するグループによって異なる 2 種類の 2×2 ゲームをプレイすることになる．1 つは，同じグループ内の他のプレイヤーとのゲームであり，これまで述べてきたそれぞれのグループ内での協調ゲーム G^{AA} もしくは G^{BB} である．もう 1 つは，自分とは異なるグループのプレイヤーとマッチングしてプレイする 2×2 ゲーム G^{AB} である．これも戦略は a と b から成る．下の利得表が後者のほうの異なるグループのプレイヤー間でのゲーム G^{AB} を表すとしよう．グループ A のプレイヤーを行プレイヤー，グループ B のプレイヤーを列プレイヤーとしている．異なるグループ

G^{AB} B

A		a	b
	a	$0.8, 0.4$	$0, 0$
	b	$0, 0$	$0.2, 0.6$

のプレイヤー間でのゲームは，プレイヤー間の利得に関して**非対称な**ゲームになる．利害対立があるこのゲームのクラスは，男女の争い（battle of the sexes）と呼ばれる．

2 つのグループのプレイヤー間にこのような交流がある状況を定式化したのは Neary（2012）である．Neary（2012）はこの交流のある状況を**言語ゲーム**（Language game）と呼ぶ．それぞれのグループが標準的に用いるコンピュータのオペレーティング・システム（OS）を，戦略 a または戦略 b とする例を述べている．両グループのプレイヤーがコミュニケーションをとる際，それぞれのグループに属すプレイヤーが得意な言語の相違，もしくはすでに使用しているコンピュータ機種の相違などにより，男女の争いのような利害対立が生まれるという着想で，このような状況を言語ゲームと名付けている．

交流がない場合，各グループの協調ゲームにおける純粋戦略ナッシュ均衡点は (a, a) と (b, b) である．そこでは，経路依存性がある適応プロセスの下で，それぞれのグループの初期時点 $t = 0$ の状態に依存しているものの，各グループのメンバー全員が戦略 a もしくは全員が戦略 b をとる状態のいずれかに各グループは到達する．交流がある言語ゲームの場合，両グループの各プレイヤーが戦略を変更したくない均衡状態は，交流がない場合よりもそのパターンが増える．経路依存性を持つ適応プロセスを両グループで想定すると，どの初期状態からどの状態に近づいていくのかに関して，より注意が必要となる．これらの議論を踏まえたうえで，突然変異を考慮した確率的なプロセスまで想定すると，交流がある状況の確率安定状態を特定化するのは，容易な作業ではないことは想像に難くないであろう．各グループのプレイヤー数の大小，グループ間の利得の非対称性，そして各プレイヤーがグループを問わず他のプレイヤー全員とゲームをプレイするマッチング構造，これらが互いに影響し合うのである．[7]

[7]正確には，各グループの毎期の戦略変更の人数（調整速度）の相違によって，プロセスが各均衡に至る初期時点の状況が異なってくる．我々はこの両グループが共通の調整速度を持つ場合のみ分析をしている．

試みに，我々が示している上記の例で，両グループのプレイヤー数が等しい場合を考えてみよう．その場合は，グループ A では全員が戦略 a をとり，グループ B では全員が戦略 b をとる均衡の状態がある．この均衡では，異なるグループのプレイヤーどうしのゲーム G^{AB} では，常に協調の失敗が起こって，各プレイヤーは利得を得ることができない．各グループ内では，それぞれ利得が大きいほうの戦略で協調が成功している．ここである 1 人のプレイヤーが，異なるグループのプレイヤーを相手にしているゲーム G^{AB} で常に起こっている協調の失敗を避けるため，自らの戦略を変更したとする．自分が属するグループ内で自分以外のすべてのプレイヤーとのゲームで得ていた大きいほうの均衡利得から，プレイの相手人数がほぼ同じ[8]で，利得の低いほうの均衡利得しか各ゲーム G^{AB} のプレイから得ることができなくなる．よって各グループごとに得意な戦略で均衡する．つまりグループ A では a，グループ B では b がとられる．経路依存性のある適応プロセスでも，この均衡の状態に近い初期状態からであれば，このようなグループ間の非対称均衡に到達することは容易に想像がつく．

翻って，グループ B のプレイヤー数がグループ A のプレイヤー数に比べて非常に大きい場合を考えてみよう．グループ A のプレイヤーにとって，同じグループ内では (a, a) が魅力的な均衡である．しかしゲーム G^{AB} でプレイする相手グループ B のプレイヤー数が非常に大きい．もしグループ B のプレイヤー全員が戦略 b を選ぶならば，グループ A のプレイヤーであっても戦略 b をとるほうがプレイしたゲームの利得合計は大きくなるだろう．したがってグループ A 全員が戦略 a，グループ B 全員が戦略 b をとるという非対称な状態は均衡にならない．グループを問わず全員が b をとる均衡状態と，その状態への経路依存的な適応プロセスの初期状態がいくつもある．

Neary (2012) は，これらの静学的な均衡状態，経路依存性を伴う適応プロセスの振る舞い，そして突然変異を導入した確率的なプロセスの確率安定状態について，詳細に検討している．各ゲームの利得と各グループのプレイヤー数，適応プロセスの速度によって，全員が戦略 a，全員が戦略 b，グループ A 全員が a でグループ B 全員が b，というそれぞれの状況が確率安定性を持つ場合の言語ゲームの特徴を Neary (2012) は述べている．

言語ゲームの拡張

我々はこの Neary (2012) の言語ゲームを拡張する．異なるグループのプレイヤー間でのゲーム G^{AB} で協調が成功するときの両プレイヤーの利得が，各グループ内で協調が成功する場合のそれとは，必ずしも一致しないとする．その利得表を下に示す．

ただし $k > -0.2$ とする．パラメータ k が負値のとき，異なるグループのプレイヤー間のゲーム G^{AB} では，協調が成功しても取引費用もしくはコミュニケーション・コストがかかってしまう．これは異なるグループのプレイヤーとゲームをプレイするには一定の移動コストが必要であるとも解釈できよ

[8] ゲーム G^{AB} をプレイする相手プレイヤーの数は，自分のグループのプレイヤー数に自分の 1 人分だけを加えた人数である．

G^{AB} B A

	a	b
a	$0.8+k, 0.4+k$	$0, 0$
b	$0, 0$	$0.2+k, 0.6+k$

う．またパラメータ k が正値のとき，異なるグループのプレイヤー間で戦略の協調が成功することで，シナジー効果が生まれて利得が増える．これは異文化どうしの交流によって技術革新が起こるような場合とも解釈できよう．Neary (2012) では，異なるグループのプレイヤー間でのゲームでも，協調が成功すれば同じグループ内の協調の成功と同じ利得が各プレイヤーにもたらされる．つまり，協調の成功における利得は**相手の所属グループとは独立**であると仮定している．

我々は，この新たなパラメータ k を追加したモデルを，**拡張された言語ゲーム**と呼ぶ．取引費用やシナジー効果を表すパラメータ k の大きさが，各グループのプレイヤー数と協調ゲームの利得の大きさと相まって静学的な均衡の集合に与える影響，これらが適応過程の調整速度の大きさと相まって経路依存性を持つ適応プロセスに与える影響，そして，これらが確率的適応プロセスのもとで拡張された言語ゲームの確率安定的な状態に与える影響を我々は検討する．

以下，この論文は次のように構成される．第 2 節では，拡張された言語ゲームの形式的な定義と静学的な均衡を特徴付ける．第 3 節では，我々が採用する経路依存的な適応プロセスの定義と，その経路の特徴を明らかにする．第 4 節では，突然変異の仮定を置き，経路依存性を無くした確率的なプロセスでの拡張された言語ゲームの確率安定的な状況を特徴付ける．第 5 節では，この分析の結論と今後の研究の展望を述べる．

2　言語ゲーム（Language Game）の拡張

2.1　モデル

我々が考察する拡張された言語ゲーム $\mathcal{G}$ は，4 つの組 $\{\mathcal{N}, \Pi, S, \mathbb{G}\}$ によって定義される．$\mathcal{N} := \{1, \cdots, N\}$ はプレイヤーの集合を表し，この集合 $\mathcal{N}$ は，それぞれサイズ N^A, N^B (≥ 2) のグループ A, B に分割される．$\Pi := \{A, B\}$ はこのグループ名の集合である．$S := \{a, b\}$ は，すべてのプレイヤーに共通な 2 つの戦略 a と戦略 b から成る集合である．$G^{KK'}$ によってグループ $K, K' \in \Pi$ のプレイヤーどうしがマッチングする 2×2 戦略形ゲームを表し，それは局所ゲームと呼ばれる．$\mathbb{G} := \{G^{AA}, G^{BB}, G^{AB}\}$ は局所ゲームの集合である．各局所ゲーム $G^{KK'}$ は，下の利得表で示される協調ゲームとする．
ここで $p, q \in (\frac{1}{2}, 1)$, $k > -\min\{1-p, 1-q\}$ と仮定する．つまり，どの局所ゲームでも，グループ A に属すプレイヤーはそのゲームの均衡点 (a, a) を，グループ B に属すプレイヤーはそのゲームの均衡点 (b, b) を，もう一方の均衡点よりも好むとする．定数 k は，それが負値のときは異なるグループに

G^{AA} A_2

		a	b
A_1	a	p, p	$0, 0$
	b	$0, 0$	$1-p, 1-p$

G^{BB} B_2

		a	b
B_1	a	$1-q, 1-q$	$0, 0$
	b	$0, 0$	q, q

G^{AB} B

		a	b
A	a	$p+k, 1-q+k$	$0, 0$
	b	$0, 0$	$1-p+k, q+k$

属するプレイヤーどうしがマッチングする局所ゲーム G^{AB} での取引費用の大きさを表し，それが正値のときは同様の局所ゲームでのシナジー効果の大きさを表す．Neary (2012) のモデルと我々のモデルの相違点は，我々のモデルにこのパラメータ k を導入した点である．

$[\omega]_K \in \{0, 1, 2, \ldots, N^K\}$ は，グループ $K \in \Pi$ のプレイヤーで戦略 a をとっている人数を表す．$\omega = ([\omega]_A, [\omega]_B)$ によって，我々のモデルの**状態**（state）を表す．すべての状態 ω の集合 $\Omega := \{0, \cdots, N^A\} \times \{0, \cdots, N^B\}$ を我々のモデルの**状態空間**（state space）と呼ぶ．

各状態 $\omega \in \Omega$ において，各プレイヤーは自分以外のプレイヤー全員と**総当たりする**（playing the field）というマッチング方式を仮定する．自分の属すグループだけでなく，自分の属さない他のグループのプレイヤー全員ともマッチングする点に注意が必要である．こうして，各プレイヤーの利得は，各局所ゲームで得られた利得の総和として定まる．状態 $\omega \in \Omega$ において，グループ $K \in \Pi$ のプレイヤーが戦略 $s \in \{a, b\}$ をとる時に得る利得 $U^K(s, \omega) \in \mathbb{R}$ は，次のように整理される．

$$U^A(a, \omega) = ([\omega]_A + [\omega]_B - 1)p + k[\omega]_B \tag{1}$$

$$U^A(b, \omega) = (N - [\omega]_A - [\omega]_B - 1)(1-p) + k(N^B - [\omega]_B) \tag{2}$$

$$U^B(a, \omega) = ([\omega]_A + [\omega]_B - 1)(1-q) + k[\omega]_A \tag{3}$$

$$U^B(b, \omega) = (N - [\omega]_A - [\omega]_B - 1)q + k(N^A - [\omega]_A) \tag{4}$$

このゲームのすべてのパラメータの集合 Θ は次となる．

$$\Theta = \left\{(N^A, N^B, p, q, k) \mid N^A, N^B \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ p, q \in (\frac{1}{2}, 1),\ k > -\min\{1-p, 1-q\}\right\}$$

我々はこの Θ を言語ゲームの拡張ゲーム $\mathcal{G}$ の集合と同一視する．ゲーム $\mathcal{G}$ は，各 $K \in \Pi$ に対して $U^K(a, \omega) = U^K(b, \omega)$ なる $\omega \in \Omega$ が存在しないとき**一般的**（generic）であると呼ばれる．我々はすべてのゲームの集合 Θ のうち，一般的なゲームについてのみ考察する．

2.2 各プレイヤーの行動

グループ $K \in \Pi$ に属すプレイヤーが，状態 $\omega \in \Omega$ において持つ S 上の選好について，式 (1) から式 (4) に基づいて次の条件式が導かれる．

$$U^A(a,\omega) > U^A(b,\omega) \Leftrightarrow [\omega]_B > -\frac{1}{2k+1}[\omega]_A + \frac{1}{2k+1}\{(1-p)N + (2p-1) + kN^B\} \tag{5}$$

$$U^A(a,\omega) < U^A(b,\omega) \Leftrightarrow [\omega]_B < -\frac{1}{2k+1}[\omega]_A + \frac{1}{2k+1}\{(1-p)N + (2p-1) + kN^B\} \tag{6}$$

$$U^B(a,\omega) > U^B(b,\omega) \Leftrightarrow [\omega]_B > -(2k+1)[\omega]_A + qN - (2q-1) + kN^A \tag{7}$$

$$U^B(a,\omega) < U^B(b,\omega) \Leftrightarrow [\omega]_B < -(2k+1)[\omega]_A + qN - (2q-1) + kN^A \tag{8}$$

我々は，$[\omega]_A$ と $[\omega]_B$ が整数であるという条件を外し，これらを実変数として考察したい場合がある．そこでは利得関数 $U^K(s,\omega)$ の定義域を次のように拡張する．本来，利得関数の定義域は $S \times \Omega = S \times \{0,1,2,\ldots,N^A\} \times \{0,1,2,\ldots,N^B\}$ である．この定義域を拡張して，$S \times \{(\omega_A,\omega_B) \mid \omega_A \in \mathbb{R}, \omega_B \in \mathbb{R}\}$ とする．つまり定義域の整数格子点の集合 Ω を，実数の直積集合 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に拡張する．この拡張された利得関数 $\bar{U}^K : \big(s,(\omega_A,\omega_B)\big) \mapsto \mathbb{R}$ は，式 (1) から式 (4) より

$$\bar{U}^A(a,\omega) = (\omega_A + \omega_B - 1)p + k\omega_B$$

$$\bar{U}^A(b,\omega) = (N - \omega_A - \omega_B - 1)(1-p) + k(N^B - \omega_B)$$

$$\bar{U}^B(a,\omega) = (\omega_A + \omega_B - 1)(1-q) + k\omega_A$$

$$\bar{U}^B(b,\omega) = (N - \omega_A - \omega_B - 1)q + k(N^A - \omega_A)$$

である．ここで，変数 ω_K（$K \in \Pi$）は実数の範囲をとり，$\omega = (\omega_A,\omega_B)$ が $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の要素であることに注意する．

$$\bar{U}^K\big(a,(\omega_A,\omega_B)\big) = \bar{U}^K\big(b,\big(\omega_A,\omega_B\big)\big)$$

とおくとパラメータ p,q,k の値に関する仮定によって，関数 $\omega_A = \alpha^K(\omega_B)$，$\omega_B = \beta^K(\omega_A)$ が存在し，

$$\bar{U}^K\big(a,(\alpha^K(\omega_B),\omega_B)\big) = \bar{U}^K\big(b,(\alpha^K(\omega_B),\omega_B)\big)$$

$$\bar{U}^K\big(a,(\omega_A,\beta^K(\omega_A))\big) = \bar{U}^K\big(b,(\omega_A,\beta^K(\omega_A))\big)$$

が成り立つ．これらの関数 $\alpha^K(\omega_B),\beta^K(\omega_A)$ は，ω_A, ω_B の 1 次関数であり，$\omega_A - \omega_B$ 平面上でそれぞれ直線となる．

$K \in \Pi,\ s, s' \in S$ とする．このとき，Ω の部分集合 $\Omega^{K,s \succ s'}$ を，グループ $K \in \Pi$ のプレイヤーが戦略 $s \in S$ を $s' \in S$ より厳密に好む状態 $\omega \in \Omega$ の集合とする．すなわち，

$$\Omega^{K,s \succ s'} := \{\omega \in \Omega \mid U^K(s,\omega) > U^K(s',\omega)\}$$

である．そして $\Omega^{ss'} := \Omega^{A,s \succ s''} \cap \Omega^{B,s' \succ s'''}$ とする．つまり状態 $\omega \in \Omega^{ss'}$ では，プレイヤー A が戦略 s をもう一方の戦略よりも厳密に好んでおり，プレイヤー B が戦略 s' をもう一方の戦略よりも厳密に好んでいる．Neary (2012) の言語ゲームとは異なり，我々が拡張した（一般的な）言語ゲームの集合には，集合 $\Omega^{ba} \neq \phi$ となるゲーム $\mathcal{G}$ が存在する．次の図 1 はその例である．この図は横軸が $[\omega]_A$，縦軸が $[\omega]_B$ を表している．

例 1 $(N^A, N^B, p, q, k) = (8, 8, \frac{51}{100}, \frac{51}{100}, -0.4)$

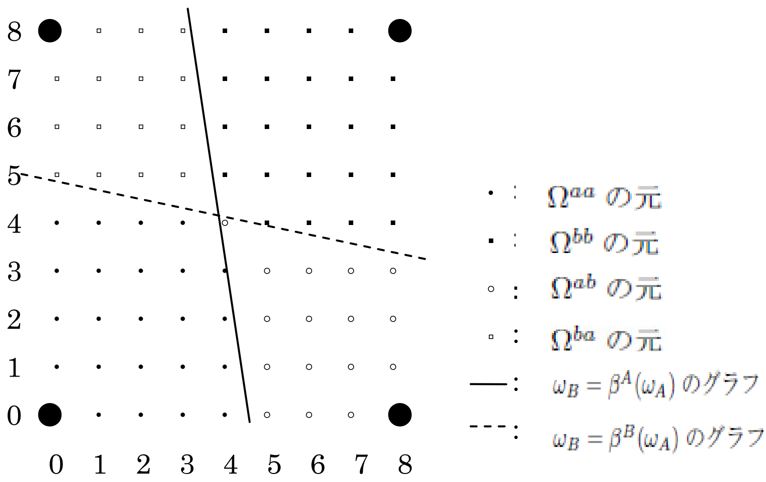

図 1：選好地図

この図 1 のように $(N^A+1)\times(N^B+1)$ 個の格子点からなる図で，各集合 $\Omega^{ss'}$ を示したものを，ゲーム $\mathcal{G}$ の Ω 上の**選好地図**（preference map）と呼ぶ．選好地図の特徴付けを行うために，この平面の $\omega_A-\omega_B$ 座標軸及び矩形 $[0,N^A]\times[0,N^B]$ と，各直線 $\alpha^K(\omega_B),\beta^K(\omega_A)$ との交点（切片）を次のように求めておく．下の図 2 はこれらを図示している．

$$\begin{aligned}
\beta^A(0) &= \frac{1}{2k+1}\{(1-p)N+(2p-1)+kN^B\}, & \beta^A(N^A) &= \frac{1}{2k+1}\{(1-p)N+(2p-1)+kN^B-N^A\}\\
\alpha^A(N^B) &= (1-p)N+(2p-1)-(1+k)N^B, & \alpha^A(0) &= (1-p)N+(2p-1)+kN^B\\
\alpha^B(N^B) &= \frac{1}{2k+1}\{qN-(2q-1)+kN^A-N^B\}, & \alpha^B(0) &= \frac{1}{2k+1}\{qN-(2q-1)+kN^A\}\\
\beta^B(0) &= qN-(2q-1)+kN^A, & \beta^B(N^A) &= qN-(2q-1)-(1+k)N^A
\end{aligned}$$

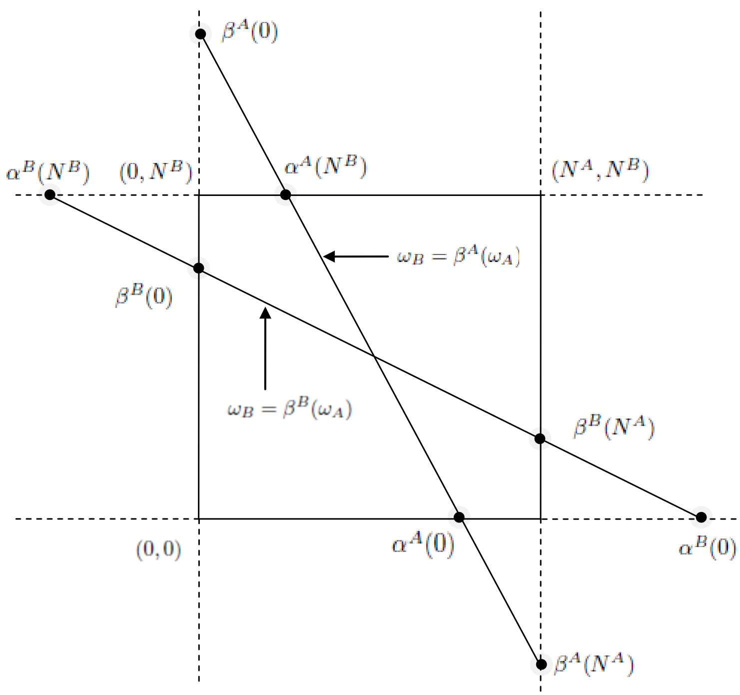

図 2：切片座標

これらと，次のガウス記号を以下では多用する．任意の $x \in \mathbb{R}$ について，

$$\lceil x \rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid x \leq n\},$$
$$\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid x \geq n\}.$$

とする．次の補題 1 と補題 2 は，選好地図の各軸における直線 $\alpha^K(\omega^{K'})$ と $\beta^K(\omega^{K'})$（$K, K' \in \Pi$）の切片座標に注意すれば容易に見て取れるであろう．

補題 1．次の条件が成り立つとき，$\Omega^{ab} \neq \phi$ である．

・$k \geq 0$ の場合

$$\alpha^B(N^B) > 0 \text{ ならば } \lceil \alpha^B(N^B) \rceil + 1 \leq \lceil \alpha^A(N^B) \rceil. \tag{9}$$

$$\alpha^B(N^B) < 0 \text{ ならば } \lceil \beta^B(0) \rceil + 1 \leq \lceil \beta^A(0) \rceil. \tag{10}$$

・$k < 0$ の場合

$$\alpha^B(0) < N^A \text{ ならば } \lceil \alpha^B(0) \rceil + 1 \leq \lceil \alpha^A(0) \rceil. \tag{11}$$

$$\alpha^B(0) > N^A \text{ ならば } \lceil \beta^B(N^A) \rceil + 1 \leq \lceil \beta^A(N^A) \rceil. \tag{12}$$

証明 (9) 式は，$[\omega]_B = N^B$ においてそれぞれのグループのプレイヤーが行動を決定する際の閾値に関する条件である．式 (9) が満たされるならば，ゲーム $\mathcal{G}$ の一般性から，ある状態 $([\omega]_A, N^B) \in \Omega$ が存在して $\alpha^B(N^B) < [\omega]_A < \alpha^A(N^B)$ を満たす．この状態においてグループ A と B のプレイヤーは，それぞれ b と a を好むので，$([\omega]_A, N^B) \in \Omega^{ba}$ となる．

以下，各条件式 (10),(11),(12) も同様に示される．■

補題 2．次の条件が成り立つとき，$\Omega^{ba} \neq \phi$ である．

・$k \geq 0$ のとき

$$\alpha^A(0) < N^A \text{ ならば } \lceil \alpha^A(0) \rceil + 1 \leq \lceil \alpha^B(0) \rceil. \tag{13}$$

$$\alpha^A(0) > N^A \text{ ならば } \lceil \beta^A(N^A) \rceil + 1 \leq \lceil \beta^B(N^A) \rceil. \tag{14}$$

・$k < 0$ のとき

$$\alpha^A(N^B) > 0 \text{ ならば } \lceil \alpha^A(N^B) \rceil + 1 \leq \lceil \alpha^B(N^B) \rceil. \tag{15}$$

$$\alpha^A(N^B) < 0 \text{ ならば } \lceil \beta^A(0) \rceil + 1 \leq \lceil \beta^B(0) \rceil. \tag{16}$$

証明 補題 1 と同様に示されるので省略する．■

Neary (2012) の言語ゲームでは，各グループのプレイヤーが自分の属するグループの不得意な戦略を好む状態は存在しない．つまり $\Omega^{ba} = \phi$ である．我々の拡張によって，この状態が存在するために必要なパラメータの大きさに関する条件を次の補題 3 は示している．

補題 3. $\Omega^{ba} \neq \phi$ のとき，$|k| > (p+q-1)\frac{N-2}{N}$.

証明 $\Omega^{ba} \neq \phi$ ならば，ある $\omega \in \Omega$ が存在して式 (6),(7) を満たす．2 つの不等式を足し合わせて整理すると，次を得る．

$$2k[\omega]_B < 2k[\omega]_A + (1-p-q)(N-2) + k(N^B - N^A).$$

$k > 0$ の場合

上の式を $2k$ で割って整理すると，

$$[\omega]_B < [\omega]_A + \frac{1}{2k}\{(1-p-q)(N-2) + k(N^B - N^A)\}$$

を得る．この不等式を満たす $([\omega]_A, [\omega]_B)$ の集合は，傾き 1 の直線の下側の領域となる．この式を満たす $\omega \in \Omega$ があるとすれば状態 $(N^A, 0)$ もこの式を満たすので，$[\omega]_A = N^A, [\omega]_B = 0$ としてこの不等式を整理すると次を得る．

$$k > (p+q-1)\frac{N-2}{N}.$$

$k < 0$ の場合

上の式を $2k$ で割って整理すると，

$$[\omega]_B > [\omega]_A + \frac{1}{2k}\{(1-p-q)(N-2) + k(N^B - N^A)\}$$

を得る．この不等式を満たす $([\omega]_A, [\omega]_B)$ の集合は，傾き 1 の直線の上側の領域となる．この式を満たす $\omega \in \Omega$ があるとすれば状態 $(0, N^B)$ もこの式を満たすので，$[\omega]_A = 0, [\omega]_B = N^B$ としてこの不等式を整理すると次を得る．

$$k < -(p+q-1)\frac{N-2}{N}.$$

以上から求める結果が得られた．■

この補題 3 が示すように，取引費用やシナジー効果の絶対値 k が，本来の言語ゲーム $\mathcal{G}$ の利得に比べて小さいときは，両グループのプレイヤーがともに，本来好んでいない戦略の方を好むという状態は起こらない．[9]

[9] Neary (2012) のモデルは $k = 0$ の場合であるから，パラメーター p, q, N の値に関する仮定より，そのモデルでは必ず

2.3 拡張ゲーム $\mathcal{G}$ の均衡点

表記の簡単化のために，状態 $(0,0),(0,N^B),(N^A,0),(N^A,N^B)$ をそれぞれ $\omega_{bb},\omega_{ba},\omega_{ab},\omega_{aa}$ と書く．ゲーム $\mathcal{G}\in\Theta$ において $E(\mathcal{G})$ をゲーム $\mathcal{G}$ の狭義 Nash 均衡点（strict Nash equilibrium point）を構成する状態の集合とする．これらの均衡点は各局所ゲームの均衡点（戦略の組 (a,a),(b,b)）ではなく，ゲーム $\mathcal{G}$ の均衡点であることに注意する．次の定理によって，グループを問わずプレイヤー全員が同じ戦略を選ぶ状態が常に拡張された言語ゲームの均衡を構成することが示される．各グループにとって望ましくないほうの純粋戦略の組によって各グループ内で協調が成功している状態が，我々の拡張された言語ゲームでは均衡を構成してしまう必要十分条件も明らかになる．

定理 1．ゲーム $\mathcal{G}$ について次が成り立つ．

1. $\omega_{aa},\omega_{bb}\in E(\mathcal{G})$.
2. $\omega_{ab}\in E(\mathcal{G})\Leftrightarrow p>(1+k)\frac{N^B}{N-1}$ かつ $q>(1+k)\frac{N^A}{N-1}$.
3. $\omega_{ba}\in E(\mathcal{G})\Leftrightarrow p<-(1+k)\frac{N^B}{N-1}+1$ かつ $q<-(1+k)\frac{N^A}{N-1}+1$.
4. $\omega_{ba}\in E(\mathcal{G})\Rightarrow\omega_{ab}\in E(\mathcal{G})$.

証明 1 の証明．状態 ω_{aa} における利得と，そこから 1 人で逸脱するプレイヤーの利得は以下である．それらを比較して $\omega_{aa}\in E(\mathcal{G})$ を得る．

$$
\begin{aligned}
&U^A(a,\omega_{aa})=(N-1)p+kN^B>0,\\
&U^A(b,(N^A-1,N^B))=0.\\
&U^B(a,\omega_{aa})=(N-1)(1-q)+kN^A>0,\\
&U^B(b,(N^A,N^B-1))=0.
\end{aligned}
$$

状態 $\omega_{bb}\in E(\mathcal{G})$ についても同様．

2 の証明．$\omega_{ab}\in E(\mathcal{G})$ であることと $U^A(a,\omega_{ab})>U^A(b,(N^A-1,0))$ かつ $U^B(b,\omega_{ab})>U^B(a,(N^A,1))$ が成り立つことは同値である．よって条件式 (5),(8) から

$$
\begin{aligned}
U^A(a,\omega_{ab})>U^A(b,(N^A-1,0)) \quad&\Longleftrightarrow\quad (N^A-1)p>N^B(1-p)+kN^B\\
&\Longleftrightarrow\quad p>(1+k)\frac{N^B}{N-1}.\\
U^B(b,\omega_{ab})>U^B(a,(N^A,1)) \quad&\Longleftrightarrow\quad (N^B-1)q>N^A(1-q)+kN^A\\
&\Longleftrightarrow\quad q>(1+k)\frac{N^A}{N-1}.
\end{aligned}
$$

$\Omega^{ba}=\phi$ となる．

3 の証明．2 の証明と同様に，条件式 (6)，(7) 式から

$$
\begin{aligned}
U^A(b,\omega_{ba}) > U^A(a,(1,N^B)) &\iff (N^A-1)(1-p) > N^B p + kN^B \\
&\iff p < -(1+k)\frac{N^B}{N-1} + 1. \\
U^B(a,\omega_{ba}) > U^B(b,(0,N^B-1)) &\iff (N^B-1)(1-q) > N^A q + kN^A \\
&\iff q > -(1+k)\frac{N^A}{N-1} + 1.
\end{aligned}
$$

4 の証明．$p > \frac{1}{2}$ より，3 の必要十分条件が，2 の必要十分条件を含意する．■

上の定理 1 の 4 の待遇をとれば，各グループにとって望ましいほうの均衡で協調が成功する均衡状態が無い拡張言語ゲームでは，望ましくないほうの均衡で協調する均衡状態も無いこともわかる．

系

1. $q \leq -p + (1+k)\frac{N}{N-1}$ ならば，状態 ω_{ab} は狭義 Nash 均衡点を構成する状態ではない．
2. $q \geq -p + (1+k)\frac{N}{N-1} + 2$ ならば，状態 ω_{ba} は狭義 Nash 均衡点を構成する状態ではない．

証明 1 の証明．対偶を示す．定理 2 より $\omega_{ab} \in E(\mathcal{G})$ のとき $p > (1+k)\frac{N^B}{N-1}$ かつ $q > (1+k)\frac{N^A}{N-1}$ となる．これらの不等式を足し合わせて整理すると，

$$
q > -p + (1+k)\frac{N}{N-1}
$$

が得られる．2 の証明も同様．■

Neary (2012) で狭義ナッシュ均衡点を構成しなかった状態 ω_{ba} について，我々は関心がある．利得パラメータ p と q はともに 1 よりも小さいので，この系の 2 より，k が正値の場合は状態 ω_{ba} が狭義ナッシュ均衡点を構成しないことがわかる．

3 適応過程

3.1 適応過程の特定化

Ω 上の適応過程を写像 $\Psi : \Omega \to \Omega$ で表現する．この適応過程は $\Psi(\omega) = (\Psi^A(\omega), \Psi^B(\omega))$ というように，各グループ $K \in \Pi$ の適応過程 $\Psi^K : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots, [\omega]_K\}$ から成る．我々はこの適応過程 Ψ に，いずれのグループ $K \in \Pi$ でも各状態において各プレイヤーの利得がより高いほうの純粋戦略をとる人数が増加するという，直感的に許容されやすい特性を要請する．

定義 1. （グループ・ダーウィン的適応過程（Group-Darwinian adjustment process））

写像 $\Psi : \Omega \to \Omega$ が**グループ・ダーウィン的特性**（Group-Darwinian property）を持つとは，各グループ $K \in \Pi$ に対して次が成り立つことを言う．

1. 各 $\omega \notin \{\omega' \mid [\omega']_K = 0, N^K\}$ において，$\mathrm{sign}(\Psi^K(\omega) - [\omega]_K) = \mathrm{sign}\ (U^K(a,\omega) - U^K(b,\omega))$
2. ・$[\omega]_K = 0$ かつ $U^K(a,\omega) < U^K(b,\omega)$ ならば，$\Psi^K(\omega) = 0$,
   ・$[\omega]_K = N^K$ かつ $U^K(a,\omega) > U^K(b,\omega)$ ならば，$\Psi^K(\omega) = N^K$.

グループ・ダーウィン的特性に加えて，戦略を変更するプレイヤーの人数が各状態ごとに大きく異ならないという性質を適応過程 Ψ に要請する．これを形式的に表現するために，Ω 上の順序 $\geq_a \subset \Omega \times \Omega$ を次のように定義する．任意の $\omega, \omega' \in \Omega$ に対して，$[\omega]_A \geq [\omega']_A$ かつ $[\omega]_B \geq [\omega']_B$ であるとき，またその場合に限り $\omega \geq_a \omega'$ とする．この順序 $\geq_a \subset \Omega \times \Omega$ によって，状態 ω と状態 ω' が比較可能であるとき $\omega \perp_a \omega'$，比較不可能であるとき $\omega \parallel_a \omega'$ とそれぞれ書く．

定義 2.　（単調適応過程（Monotonic adjustment process））

写像 $\Psi : \Omega \to \Omega$ が**単調**（monotonic）であるとは，任意の状態の組 $\omega, \omega' \in \Omega$ に対して，次が成り立つことを言う．

$$\omega' \geq_a \omega \Rightarrow \Psi(\omega') \geq_a \Psi(\omega).$$

グループ・ダーウィン的特性を持つ単調な動学の 1 つとして，毎期各グループの一定数が適応をする**定速度動学**（constant rate dynamic）を，我々は適応過程として採用する．それは $t = 0, 1, 2, \ldots$ を時間とする離散的な動学であり，グループ A,B それぞれの各期の調整人数を一定数 ξ_A，ξ_B とする．形式的には次のようにこの動学は定義される．[10]

定義 3. グループ $K \in \Pi$ が**定速度**（constant rate) ξ_K で適応するとは，ある $\xi_K \in \{1, \cdots, N^K\}$ が存在して，任意の状態 $\omega \in \Omega$，任意の期 $t \in \mathbb{N}$ に対して，次が成り立つことをいう．

$$\Psi^K(\omega_t) = [\omega_{t+1}]_K = \begin{cases} \max\{0, [\omega_t]_K - \xi_K\} & \text{if}\ \ U^K(a,\omega_t) < U^K(b,\omega_t), \\ \min\{[\omega_t]_K + \xi_K, N^K\} & \text{if}\ \ U^K(a,\omega_t) > U^K(b,\omega_t). \end{cases}$$

各グループの適応速度を明示して動学を表記するときは，$\Psi = (\Psi^A_{\xi_A}, \Psi^B_{\xi_B})$ と書く．

3.2　経路依存性と吸引流域（basin of attraction）

ある状態 ω から何期間かを経て定速度動学 Ψ が到達する状態を表すために，$\Psi^1(\omega) = \Psi(\omega)$，$n \geq 2$ なる自然数 n に対して $\Psi^2(\omega) = \Psi(\Psi(\omega)), \cdots, \Psi^n(\omega) = \Psi(\Psi^{n-1}(\omega))$ という記法 $\Psi^n(\omega)$ を帰納的に定義する．ある状態に動学 Ψ が一度到達した後，必ずその同じ状態に適応過程が戻ってくるよう

[10] 調整人数が一定であるというこの制約は，状況を狭く限定している。各プレイヤーの戦略変更に関する制度的な制約や，各プレイヤーの意思決定の特性などミクロ的な基礎付けが必要であろう．

な状態の集合は，$\Omega_0 := \{\omega \in \Omega \mid \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \Psi^n(\omega) = \omega\}$ と表現することができる．この集合 Ω_0 は，この動学が再びその状態に戻る期間によって，2 つの集合 $\Omega_1 := \{\omega \in \Omega \mid \Psi(\omega) = \omega\}$ と $\Omega_2 := \{\omega \in \Omega \mid \Psi^2(\omega) = \omega, \Psi(\omega) \neq \omega\}$ に分割される．[11] これを用いて動学 Ψ の定常的な状態の集合を次のように分けて表記する．

$$\Omega_a := \{\{\omega\} \mid \omega \in \Omega_1\}$$

$$\Omega_r := \{\{\omega, \omega'\} \mid \omega, \omega' \in \Omega_2,\ \Psi(\omega) = \omega'\}.$$

Ω_a は，動学 Ψ に従うプロセスが到達すれば，ずっとそこに留まる状態の集合である．Ω_r は，そこに含まれる状態にプロセスが到達すれば，プロセスは Ω_r のもう一方の状態との間を行き来する．
動学 Ψ の仮定から，各状態 $\omega \in \Omega$ に対して $\hat{\hat{m}}(\omega) \in \mathcal{N}$ が存在し，任意の自然数 $m \geq \hat{\hat{m}}(\omega)$ に対して $\Psi^m(\omega) \in \Omega_0$ となる．そこで $\hat{m} := \max_{\omega \in \Omega} \hat{\hat{m}}(\omega)$ と置く．[12]

定義 4. 定常的な状態の集合 $D \in \Omega_a \cup \Omega_r$ の**吸引流域**（basin of attraction）$\mathcal{V}(D) \subset \Omega$ を，次のように定義する．

$$\mathcal{V}(D) := \{\omega \in \Omega \mid \forall m \geq \hat{m}, \Psi^m(\omega) \in D\}.$$

吸引流域 $\mathcal{V}(D)$ に属する状態 ω を初期状態とすれば，有限の期間を経た後，定速度動学 Ψ に従うプロセスは定常的な状態の集合 D に到達する．それ以後は，この状態の集合 D から動学プロセスが抜け出すことはない．

狭義ナッシュ均衡点を構成する状態が ω_{aa} と ω_{bb} のみから成るゲーム $\mathcal{G}$ の例について，その選好地図と吸引流域 $\mathcal{V}(\omega_{aa})$，$\mathcal{V}(\omega_{bb})$ をそれぞれ図 3.1 と図 3.2 に示す．以降，混乱の恐れがない限り，状態の単体集合 $\{\omega_{ss'}\}$ と状態 $\omega_{ss'}$ を同一視して表記する．すなわち $\mathcal{V}(\{\omega_{ss'}\})$ と $\mathcal{V}(\omega_{ss'})$ は同じ集合を指すとする．

[11] 分割であることは，定速度動学の下で 3 つ以上の状態を含む定常的な状態の集合があると仮定し，その矛盾を導くことで容易に了解されるであろう．
[12] Ω は有限集合なのでこの $\hat{m}$ は存在する．

例 2　$(N^A, N^B, p, q, k) = (8, 8, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 4)$，$\xi_A = \xi_B = 2$ とする．

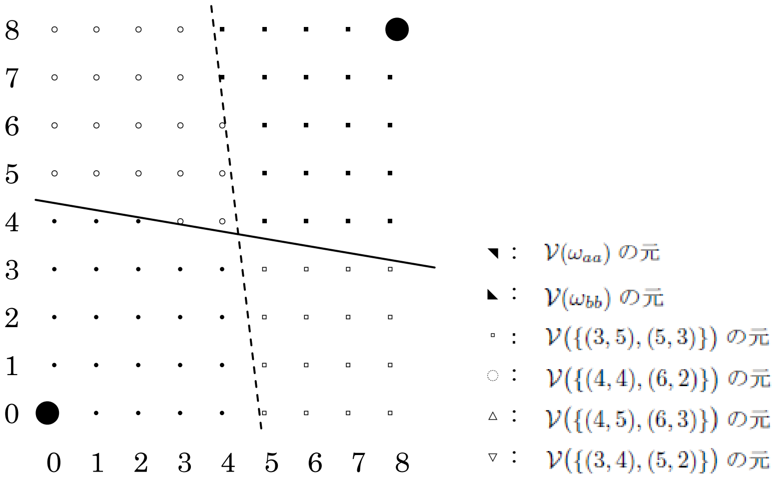

図 3.1：選好地図

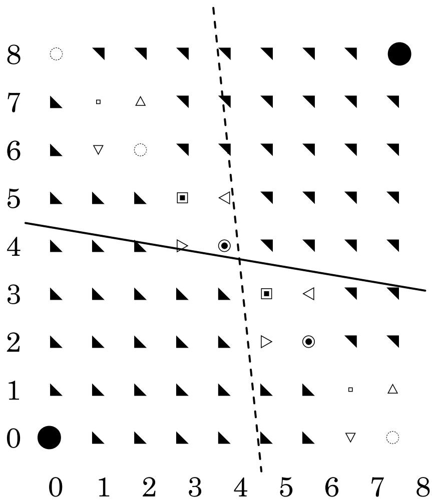

図 3.2：吸引流域

我々は各ゲーム $\mathcal{G}$ における Ψ の吸引流域 $\mathcal{V}(D)$ の特徴付けを，$\mathcal{G}$ の狭義ナッシュ均衡点を構成する状態の集合 $E(\mathcal{G})$ に関する場合分けに基づいて行う．我々は両グループで各期の調整人数が等しい定速度動学 $\Psi = (\Psi^A_\xi, \Psi^B_\xi)$ を仮定する．

$E(\mathcal{G}) = \{\omega_{aa}, \omega_{bb}, \omega_{ab}, \omega_{ba}\}$ のとき．

補題 4. 各狭義ナッシュ均衡点のみからなる集合の吸引流域は，その均衡点を含む選好地図の領域と一致する．すなわち，

$$\mathcal{V}(\omega_{aa}) = \Omega^{aa},\ \ \mathcal{V}(\omega_{bb}) = \Omega^{bb},$$
$$\mathcal{V}(\omega_{ab}) = \Omega^{ab},\ \ \mathcal{V}(\omega_{ba}) = \Omega^{ba}.$$

証明　$\omega \in \Omega^{bb}$ のとき $\omega' \leq_a \omega$ なる任意の $\omega\prime$ は Ω^{bb} の元である．ゆえに $\Psi(\omega) \in \Omega^{bb}$ となる．したがって $\Psi^{\hat{m}}(\omega) = \omega_{bb}$ となる．$\omega \in \Omega^{aa}$ のときも同様に $\Psi^{\hat{m}}(\omega) = \omega_{aa}$ となる．$\omega \in \Omega^{ba}$ のとき，$\Psi(\omega) = (\min\{[\omega]_A - \xi, 0\}, \max\{[\omega]_B + \xi, N^B\})$ である．関数 $\beta^A(\omega_A)$ の傾きが 1 より大きく，$\beta^B(\omega_A)$ の傾きは 1 より小さくなっているので $(\min\{[\omega]_A - \xi, 0\}, \max\{[\omega]_B + \xi, N^B\}) \in \Omega^{ba}$ となる．■

$E(\mathcal{G}) = \{\omega_{aa}, \omega_{bb}, \omega_{ab}\}$ のとき．

補題 5. 補題 1 の条件が満たされることで $\Omega^{ba} \neq \phi$ となる場合，次の 2 つのケースがある．

・補題 2 の (15) 式が満たされることで $([\omega]_A, N^B) \in \Omega^{ba}$ なる状態 ω が存在するとき，

$$\mathcal{V}(\omega_{aa}) = \Omega^{aa},\ \ \mathcal{V}(\omega_{bb}) = \Omega^{ba} \cup \Omega^{bb},\ \ \mathcal{V}(\omega_{ab}) = \Omega^{ab}.$$

・補題 2 の (16) 式が満たされることで $(0, [\omega]_B) \in \Omega^{ba}$ なる状態 ω が存在するとき，

$$\mathcal{V}(\omega_{aa}) = \Omega^{aa} \cup \Omega^{ba},\ \ \mathcal{V}(\omega_{bb}) = \Omega^{bb},\ \ \mathcal{V}(\omega_{ab}) = \Omega^{ab}.$$

証明　前半の証明．この場合明らかに $\beta^A(\omega_A)$ の傾きは 1 より小さく，$\beta^B(\omega_A)$ の傾きは 1 より大きい．ゆえに $\omega \in \Omega^{ba}$ とすると，ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $\Psi^n(\omega) \in \Omega^{bb}$ となる．$\omega \in \Omega^{bb}$ とすると，$\Psi^{\hat{m}}(\omega) = \omega_{aa}$．$\omega \in \Omega^{aa}$ とすると，$\Psi^{\hat{m}}(\omega) = \omega_{bb}$．$\omega \in \Omega^{ab}$ とすると，$\Psi^{\hat{m}}(\omega) = \omega_{ab}$ である．

後半の証明．$\omega \in \Omega^{ba}$ とすると，ある $m \in \mathbb{N}$ が存在して $\Psi^m(\omega) \in \Omega^{aa}$ となる．以下同様．■

補題 6. 補題 1 の条件が満たされず $\Omega^{ba}=\phi$ となる場合，次の 2 つのケースがある．

・$k \leq 0$ であるとき，各狭義ナッシュ均衡点のみを含む再帰的な集合の吸引流域は，その均衡点を含む選好地図の領域と一致する．すなわち，

$$\mathcal{V}(\omega_{aa})=\Omega^{aa},\ \ \mathcal{V}(\omega_{bb})=\Omega^{bb},\ \ \mathcal{V}(\omega_{ab})=\Omega^{ab}.$$

・$k>0$ であるとき，

$$\mathcal{V}(\omega_{aa})\supset\Omega^{aa},\ \ \mathcal{V}(\omega_{bb})\supset\Omega^{bb},\ \ \mathcal{V}(\omega_{ab})\subset\Omega^{ab}.$$

証明　前半の証明．$k \leq 0$ より明らか．

後半の証明．$k>0$ より $\beta^A(\omega_A)$ の傾きは 1 より小さく，$\beta^B(\omega_A)$ の傾きは 1 より大きい．ゆえに適当な $\mathcal{G}$ において，ある $\omega\in\Omega^{ab}$ が存在して，$\Psi(\omega)\in\Omega^{aa}$ または $\Psi(\omega)\in\Omega^{aa}$ となる．■

$E(\mathcal{G})=\{\omega_{aa},\omega_{bb},\omega_{ba}\}$ のとき．

定理 1 の 4 より，このような場合はない．

$E(\mathcal{G})=\{\omega_{aa},\omega_{bb}\}$ のとき．

$\Omega^{aa}\subset\mathcal{V}(\omega_{aa})$，$\Omega^{bb}\subset\mathcal{V}(\omega_{bb})$ は明らかである．ただし $\xi_A=\xi_B=\xi$ の大きさによっては $\Omega_r\neq\phi$ となる点に注意したい．必ずしも狭義ナッシュ均衡点ではない 2 つの状態を行き来するサイクルが定常的な性質を持ち，吸引流域を持つ場合がある．その場合に次の補題が成り立つ．ただし状態空間 Ω 全体を囲む境界領域の集合を $B^d:=\{\omega\in\Omega\mid[\omega]_K\neq 0,N^K,\ K\in\Pi\}$ とする．

補題 7. $\{\omega,\omega'\}\in\Omega_r$ とするとき，$\omega\in\Omega^{ab}$，$\omega'\in\Omega^{ba}$ とおく．

- $\omega\notin B^d$のとき

  $\mathcal{V}(\{\omega,\omega'\})\cap\Omega^{ba}=\{\omega''\in\Omega^{ba}\mid\exists\alpha\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ \ \omega''=([\omega']_A+\alpha\xi,[\omega']_B-\alpha\xi)\}.$

- $\omega\in B^d$のとき

  $[\omega]_A=0$

  $\mathcal{V}(\{\omega,\omega'\})\cap\Omega^{ba}=\{\omega''\in\Omega^{ba}\mid\tilde{\omega}\in\Omega^L,\ \exists\alpha\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ \omega''=([\tilde{\omega}]_A+\alpha\xi,[\tilde{\omega}]_B-\alpha\xi)\}$

  ただし，$\Omega^L:=\{\tilde{\omega}\in\Omega^{ba}\mid[\tilde{\omega}]_A\leq[\omega']_A,\ [\tilde{\omega}]_B=[\omega']_B\}.$

  $[\omega]_B=N^B$

  $\mathcal{V}(\{\omega,\omega'\})\cap\Omega^{ba}=\{\omega''\in\omega^{ba}\mid\tilde{\omega}\in\Omega^U,\ \exists\alpha\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ \omega''=([\tilde{\omega}]_A+\alpha\xi,[\tilde{\omega}]_B-\alpha\xi)\}$

  ただし，$\Omega^U:=\{\tilde{\omega}\in\Omega^{ba}\mid[\tilde{\omega}]_A=[\omega']_A,\ [\tilde{\omega}]_B\geq[\omega']_B\}.$

- $\omega' \notin B^d$のとき

  $\mathcal{V}(\{\omega,\omega'\} \cap \Omega^{ab} = \{\omega'' \in \Omega^{ab} \mid \exists\alpha \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ \ \omega'' = ([\omega']_A - \alpha\xi, [\omega']_B + \alpha\xi)\}.$

- $\omega' \in B^d$のとき

  $[\omega']_A = N^A$

  $\mathcal{V}(\{\omega,\omega'\}) \cap \Omega^{ab} = \{\omega'' \in \omega^{ab} \mid \tilde{\omega} \in \Omega^R,\ \exists\alpha \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ \omega'' = ([\tilde{\omega}]_A + \alpha\xi, [\tilde{\omega}]_B - \alpha\xi)\}$

  ただし，$\Omega^R := \{\tilde{\omega} \in \Omega^{ab} \mid [\tilde{\omega}]_A \geq [\omega']_A,\ [\tilde{\omega}]_B = [\omega']_B\}.$

  $[\omega']_B = 0$

  $\mathcal{V}(\{\omega,\omega'\}) \cap \Omega^{ab} = \{\omega'' \in \Omega^{ab} \mid \tilde{\omega} \in \Omega^D,\ \exists\alpha \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ \omega'' = ([\tilde{\omega}]_A + \alpha\xi, [\tilde{\omega}]_B - \alpha\xi)\}$

  ただし，$\Omega^D := \{\tilde{\omega} \in \omega^{ab} \mid [\tilde{\omega}]_A = [\omega]_A,\ [\tilde{\omega}]_B \leq [\omega]_B\}.$

証明　前半のみ証明する．後半は同様なので省略する．

$\omega \notin B^d$ のとき，$\Psi(\omega') = \omega$，$\alpha \in \mathbb{N}$ として，任意の $\omega'' = ([\omega']_A + \alpha\xi, [\omega']_A - \alpha\xi) \in \Omega^{ba}$ に対して $\Psi^{\alpha}(\omega'') = \omega'$ となる．またこれ以外に $\mathcal{V}(\{\omega,\omega'\}) \cap \Omega^{ab}$ の元 ω'' があるとする．このとき $\Psi(\omega'')$ は Ω^{aa}，Ω^{bb} のいずれの元でもないことは明らか．$\Psi(\omega'') \in \Omega^{ab}$ とすると，仮定から $\omega'' = ([\omega']_A + \alpha\xi, [\omega']_A - \alpha\xi)$ なる α は存在しないため，$\Psi(\omega'') \neq \omega'$ である．$\Psi(\omega'') \in \Omega^{ba}$ とすると，他の再帰類の吸引流域に入る．以上から矛盾である．

$[\omega]_A = 0$ のとき，$\tilde{\omega} \in \Omega^L$ とする．このとき明らかに $\Psi(\tilde{\omega}) = \omega$ となる．また，α ステップで Ω^L に入っていく状態も $\mathcal{V}(\{\omega,\omega'\}) \cap \Omega^{ba}$ の元である．すなわち，$\omega'' = ([\tilde{\omega}]_A + \alpha\xi, [\tilde{\omega}]_B - \alpha\xi)$ なる ω'' について，$\Psi^{\alpha}(\omega'') \in \Omega^L$，よって $\Psi^{\alpha+1}(\omega'') = \omega$ となる．以下 $\omega \notin B^d$ のケースと同様．

$[\omega]_B = N^B$ のとき，$\tilde{\omega} \in \Omega^U$ とする．このとき明らかに $\Psi(\tilde{\omega}) = \omega$ となる．また，α ステップで Ω^L に入っていく状態も $\mathcal{V}(\{\omega,\omega'\}) \cap \Omega^{ba}$ の元である．すなわち，$\omega'' = ([\tilde{\omega}]_A + \alpha\xi, [\tilde{\omega}]_B - \alpha\xi)$ なる ω'' について，$\Psi^{\alpha}(\omega'') \in \Omega^L$，よって $\Psi^{\alpha+1}(\omega'') = \omega$ となる．以下 $\omega \notin B^d$ のケースと同様．■

4　均衡選択

有限状態空間 Ω 上のマルコフ連鎖を考える．P をその推移行列，状態 ω から状態 ω' への推移確率を $P(\omega,\omega')$ と書く．つまり，各 $\omega \in \Omega$ に対し，$\sum_{\omega' \in \Omega} P(\omega,\omega') = 1, 0 \leq P(\omega,\omega') \leq 1$ である．我々が採用した適応過程である定速度動学 $\Psi : \Omega \to \Omega$ に対して，$\omega' = \Psi(\omega) \Leftrightarrow P(\omega,\omega') = 1$ とおけば，推移行列 P を持つ時間的に一様なマルコフ連鎖がこの動学 Ψ からうまく定義される．

$\Delta(\Omega)$ を Ω 上のすべての確率分布の集合とする．$\mu P = \mu$ を満たす行ベクトル $\mu \in \Delta(\Omega)$ を，推移行列 P を持つマルコフ連鎖の定常分布と呼ぶ．そのマルコフ連鎖のすべての定常分布の集合を $\Delta_0(\Omega)$ と書く．P^t をその推移行列 P の t 回の冪（べき）とし，$\mathrm{supp}(\mu)$ を μ のサポートとする．任意の $\omega \in \Omega$

と $\mathrm{supp}(\mu) \subset D$ なる任意の $\mu \in \Delta(\Omega)$ に対して，$[\lim_{t\to\infty} \mu P^t](\omega) > 0 \Leftrightarrow \omega \in D$ が成り立つとき，$D \subset \Omega$ は P を推移行列とするマルコフ連鎖の**再帰類**（recurrent class）と呼ばれる．Ψ が定めるマルコフ連鎖の再起類は，先に定義した集合 Ω_a, Ω_r に対応することに注意する．

任意のマルコフ連鎖は定常分布を少なくとも 1 つ持ち，マルコフ連鎖が**エルゴード的**（ergodic）であれば，定常分布は唯一となることが知られている．適応過程 Ψ に関して，次の仮定を置くことにより，定速度動学 Ψ が定めたマルコフ連鎖は，エルゴード的なマルコフ連鎖になる．

仮定． 突然変異：すべてのプレイヤーは，少なくとも小さな正の確率でいずれの戦略も選択する．

より具体的にこの突然変異の仮定を述べる．各 $t-1$ 期末に各プレイヤーが意思決定を済ませた後，翌 t 期首に小さな確率 $\varepsilon > 0$ で各プレイヤーが $t-1$ 期末での意思決定を変更し，確率 $1-\varepsilon$ でその意思決定を変更しないと仮定する．

定速度動学 Ψ にこうして毎期の各プレイヤーの突然変異確率 $\varepsilon > 0$ を付け加えた適応過程によって，新たに Ω 上のエルゴード的なマルコフ連鎖が定まる．その推移行列を P^ε，その唯一の定常分布を $\mu^\varepsilon \in \Delta(\Omega)$ と書く．すなわち各 $\varepsilon > 0$ に対して，$\mu^\varepsilon P^\varepsilon = \mu^\varepsilon$ が成り立つ．そこで突然変異の確率を限りなく小さくしていく場合の定常分布の極限 $\mu^* := \lim_{\varepsilon\to 0} \mu^\varepsilon$ を考える．すると $P = \lim_{\varepsilon\to 0} P^\varepsilon$ であるから $\mu^* P = \mu^*$，つまり，μ^* はもとの推移行列 P を定めた定速度動学 Ψ のマルコフ連鎖の定常分布の 1 つとなっていることがわかる．我々はこの分布 $\mu^* \in \Delta_0(\Omega)$ の $\mathrm{supp}(\mu^*)$ に含まれる状態に関心がある．

定義 5． $\mu^*(\omega) > 0$ である状態 ω は**確率安定的**（stochastically stable）であるという．確率安定的な状態の集合を Ω^* で表す．

確率安定状態の集合 Ω^* を見つけ出すために，状態空間 Ω の各状態を点とする有向グラフ Γ^* 考える．有向グラフ Γ^* の点 ω' から点 ω'' への枝を (ω', ω'') と書く．点 ω' から点 ω'' へのパス（path）は，枝の列 $\{(\omega_i, \omega_{i+1})\}_{i=0}^{m-1}$ である．ただし $\omega_0 = \omega'$, $\omega_m = \omega''$ であって，尚且つパスのすべての点は相異なるとする．点 ω' から点 ω'' へのパスを $h(\omega', \omega'')$ と書き，点 ω' から点 ω'' へのすべてのパスの集合を $H(\omega', \omega'')$ と書く．これを用いて，状態 ω から状態の集合 $Q \subset \Omega$（ただし $\omega \notin Q$）への，すべてのパスの集合 $H(\omega, Q)$ を $H(\omega, Q) := \bigcup_{\omega' \in Q} H(\omega, \omega')$ と定義する．

我々は各状態間の推移に必要なプレイヤーの人数を表記するために，Ω に L_1 距離 $\|\ ,\ \|: \Omega \times \Omega \to \{0, \ldots, N\}$ を導入する．つまり各 $\omega, \omega' \in \Omega$ に対して，$\| \omega, \omega' \| := \sum_{K=A,B} |[\omega]_K - [\omega']_K|$ とする．また任意の状態の組 ω', ω'' に対して，$c_\Psi(\omega', \omega'') := \| \Psi(\omega'), \omega'' \|$ と定義する．この値 $c_\Psi(\omega', \omega'')$ は，定速度動学 Ψ のもとで，ω' から ω'' へ**1 期で直接推移するときに必要であり，突然変異のために** Ψ **に従わないプレイヤーの最少数**を表している．

任意の写像 $\tau: \Omega \to \Omega$ を考える．この写像 τ の ω' から ω'' へのパスとは，Ω 上の有向グラフのパス

（枝の列）$\{(\omega_i, \omega_{i+1})\}_{i=0}^{m-1}$ で，$\omega_0 = \omega'$，$\omega_m = \omega''$，そして $\tau(\omega_i) = \omega_{i+1}$ $\forall i = 1, \ldots, m-1$ となっているものとする．このとき，ω-**ツリー**（ω-tree）とは，次の条件 (i) と (ii) を満たす写像 $\tau_\omega : \Omega \to \Omega$ のことである．(i) $\tau_\omega(\omega) = \omega$，(ii) 任意の $\omega' \in \Omega \setminus \{\omega\}$ に対して，ω' から ω'' への写像 τ_ω のパスがただ一つ存在する．

各 ω に対し，T_ω をすべての ω ツリーの集合とする．ツリー $\tau_\omega \in T_\omega$ のコストを，そのすべての枝のコストの合計，すなわち，

$$
\begin{aligned}
c_\Psi(\tau_\omega) &:= \sum_{\omega' \neq \omega} c_\Psi(\omega', \tau_\omega(\omega')) \\
&= \sum_{\omega' \neq \omega} \| \Psi(\omega'), \tau_\omega(\omega') \| \qquad (17)
\end{aligned}
$$

と定義する．

各状態 ω に対して，その ω ツリーの最小コストを達成するツリーを考える．その ω-ツリーのなかで，最もコストの小さいツリーを持つ状態の集合は，

$$\Xi(\mathcal{G}, c_\Psi) := \{\omega^* \mid \text{任意の } \omega \in \Omega \text{ に対して，} \min_{\tau_{\omega^*} \in T_{\omega^*}} c_\Psi(\tau_{\omega^*}) \leq \min_{\tau_\omega \in T_\omega} c_\Psi(\tau_\omega)\}$$

である．Freidlin and Wentzell (1998) の結果を我々のモデルに適用すると，次が成り立つ．[13]

補題 8. $\Omega^* = \Xi(\mathcal{G}, c_\Psi)$.

すなわち，我々が探し出したい確率安定的な状態 ω は，その ω-ツリーが最小コストを達成する状態である．そして Young (1993) の定理 4 により，確率安定状態は我々のモデルでは定速度動学 Ψ が定めるマルコフ連鎖の再起類に含まれることが知られている．したがって我々は，まず各再起類 $D \in \Omega_a \cup \Omega_r$ の状態 $\omega \in D$ から別の再起類 $D' \in \Omega_a \cup \Omega_r$ の状態 $\omega' \in D'$ への最小コストのパスを探す．このパスを $\omega \to \omega'$ というように $\to$ 記号を用いて表す．それらを組み合わせて最小コストの ω^*-ツリーの終点 ω^*，すなわち確率安定的な状態を見つけ出す．

次の補題は，確率安定状態 Ω^* を探すために有益である．選好地図上の領域 $\Omega^{ss'}$ 内にある状態 ω から，他の領域 $\Omega^{s''s'''}$（$s, s', s'', s''' \in S$）に入るパスには様々なものがあるであろう．パスの始点 ω を含む領域 $\Omega^{ss'}$ 内で ω 以外の状態を経由するパスが，一般にはいくつも存在するからである．しかしながら次の補題は，最小コストのパスを持つツリーを探すには，状態 ω から 1 つの枝で直接他の領域に入るツリーを考えればよく，その枝の終点は，始点を含んでいた領域 $\Omega^{ss'}$ と他の領域の境界上にあることを示している．

[13] この補題は Young (1993) の捕論を適用すれば明らかなので証明を省略する．

補題 9. Ψ を定速度動学とし，任意の $s, s' \in S$ と任意の $\omega \in \Omega^{ss'}$ に対して，パス h を $h \in H(\omega, \Omega \backslash \Omega^{ss'})$ とする．このとき，費用 $c_\Psi(h)$ を最小化するパスは，

$$h^1 := \{(\omega, \omega^1)\}$$

ただし，$\omega^1 \in \mathrm{argmin}_{\hat{\omega} \in \hat{\Omega}_1} \parallel \Psi(\omega), \hat{\omega} \parallel$, $\hat{\Omega}_1 := \{\omega \in \Omega \setminus \Omega^{ss'} \mid \exists \omega' \in \Omega^{ss'}, \parallel \omega, \omega' \parallel = 1\}$，である．

証明 $s = s' = b$ の場合のみ証明する．s, s' が他の戦略の場合の証明も同様であり，それらは省略する．

各パス $h' \in H(\omega, \Omega \setminus \Omega^{bb})$ に対して次を定義する．

$$g(h') := |\{\omega' \in \Omega^{bb} \mid \exists \omega'' \in \Omega, (\omega', \omega') \in h'\}|.$$

パス上の点は相異なるので，$1 \leq g(h') \leq \ |\Omega^{bb}|$ となる．また次を定義する．

$$C(\omega, \gamma) := \min\{c_\Psi(h') \mid h' \in H(\omega, \Omega \setminus \Omega^{bb}),\ g(h') \leq \gamma\}.$$

$C(\omega, \gamma)$ は h^1 によって得られることを帰納法を用いて証明する．

まず $\gamma = 1$ の場合を考える．ω の直後の元 ω^0 は $\Omega \setminus \Omega^{bb}$ の元である．このとき ω^1 は $\hat{\Omega}^1$ の元である．実際，$\omega' \in \Omega^{bb}$ に対して $\parallel \omega', \omega^0 \parallel = 0$ のとき $\omega^0 \in \Omega^{bb}$ である．また任意の $\omega' \in \Omega^{bb}$ に対して $\prime\omega', \omega^0 \parallel \geq 2$ のとき，ある $\omega'' \in \Omega \setminus \Omega^{bb}$ が存在して，$\parallel \omega', \omega'' \parallel = 1$, $\omega'' <_a \omega'$ となり，したがって $\parallel \Psi(\omega), \omega^0 \parallel > \parallel \Psi(\omega), \omega'' \parallel$ が成り立つ．ω'' を ω^1 とよべば，$\omega^1 \in \hat{\Omega}^1$ となる．

ここで $c_\Psi(h^1) = C(\omega, 1)$ ならば $\Psi(\omega) <_a \omega^1$ が成り立つことを示す．$\Psi(\omega) <_a \omega^1$ が成り立たないと仮定する．$\Psi(\omega) \in \Omega^{bb}$, $\omega^1 \in \Omega \setminus \Omega^{bb}$ より $\Psi(\omega) \geq_a \omega^1$ は成立しない．したがって $\Psi(\omega) \parallel_a \omega^1$ の場合を考えればよい．一般性を失うことなく $\Psi^A(\omega) > [\omega^1]_A$, $\Psi^B(\omega) < [\omega^1]_B$ とする．このとき $([\omega^1]_A, \Psi^B(\omega)) \in \Omega \setminus \Omega^{bb}$ なる ω' が存在して，$\parallel \Psi(\omega), \omega^1 \parallel > \parallel \Psi(\omega), \omega' \parallel$ となる．これは $c_\Psi(h^1) = C(\omega, 1)$ に矛盾する．また明らかに $(\Psi^A(\omega),)$ 最小コストは $c_\Psi(h^1) = \min\{[\omega]_A - \Psi^A(\omega), [\omega]_B - \Psi^B(\omega)]\}$ となる．ここで集合 $\mathcal{D}(\omega) := \{\omega' | \ \omega' \in \mathrm{argmin}_{\hat{\omega} \in \hat{\Omega}_1} \parallel \hat{\omega}, \Psi(\omega) \parallel\}$ を定義する．$2 \leq \gamma \leq |\Omega^{bb}| - 1$ とする．任意の $\omega \in \Omega^{bb}$ に対して $c_\Psi(h^1) = C(\omega, \gamma)$ と仮定する．$\omega \in \Omega^{bb}$ として，$c_\Psi(h^0) = C(\omega, \gamma + 1)$ とする．この h^0 上で ω の直後の元を ω^0 とすると，$\omega^0 \in \Omega^{bb} \cup \hat{\Omega}^1$ である．実際そうでなければ，$c_\Psi(h^0) \geq \parallel \omega^0, \Psi(\omega) \parallel > \min \parallel \hat{\omega}, \Psi(\omega) \parallel = c_\Psi(h^1)$. である．

$\omega^0 \in \mathcal{D}(\omega)$ のとき $c_\Psi(h^0) = c_\Psi(h^1)$ であるから，$\omega^0 \in \Omega^{bb}$ の場合を考える．帰納法の仮定から $\tilde{h} = \{(\omega^0, \tilde{\omega})\}$ は $c_\Psi(\tilde{h}) = C(\omega^0, \gamma)$ を満たす．ただし $\tilde{\omega} \in \mathcal{D}(\omega^0)$ である．$\tilde{h}$ に枝 (ω, ω^0) を加えて $\tilde{h_0}$ とよぶ．すなわち $\tilde{h_0} = \{(\omega, \omega^0), (\omega^0, \tilde{\omega})\}$ である．このとき $c_\Psi(\tilde{h_0}) \geq c_\Psi(h_1)$，すなわち $\parallel \Psi(\omega), \omega^0 \parallel + \parallel \Psi(\omega^0), \omega^{**} \parallel \geq \parallel \Psi(\omega), \omega^* \parallel$ を，以下，ω と ω_0 が比較可能である場合とそうではない場合に分けて示す．

$1.\omega \perp_a \omega^0$.

$\omega \geq_a \omega^0$.

単調性より $\Psi(\omega) \geq_a \Psi(\omega^0)$ である．

$$\begin{aligned} c_\Psi(\tilde{h}_0) &= \| \Psi(\omega), \omega^0 \| + \| \omega^{**}, \Psi(\omega^0) \| \\ &\geq \| \omega{**}, \Psi(\omega) \| \\ &\geq \| \omega^*, \Psi(\omega) \| \quad = c_\Psi(h^1). \end{aligned}$$

$\omega <_a \omega^0$.

単調性より $\Psi(\omega^0) \leq_a \Psi(\omega) <_a \omega^0$ である．

$$\begin{aligned} c_\Psi(\tilde{h}_0) &= ([\omega^0]_A - \Psi^A(\omega)) + ([\omega^0]_B - \Psi^B(\omega)) + ([\omega^{**}]_A - \Psi^A(\omega^0)) + ([\omega^{**}]_B - \Psi^B(\omega^0)) \\ &= ([\omega^0]_A - \Psi^A(\omega^0)) + ([\omega^0]_B - \Psi^B(\omega^0)) + ([\omega^{**}]_A - \Psi^A(\omega)) + ([\omega^{**}]_B - \Psi^B(\omega)) \\ &= \| \omega^0, \Psi(\omega^0) \| + \| \omega^{**}, \Psi(\omega^{**}) \| \\ &\geq \| \omega^{**}, \Psi(\omega^{**}) \| \quad = c_\Psi(h^1). \end{aligned}$$

$2.\omega \parallel_a \omega^0$.

$\omega^0 \leq_a \Psi(\omega)$

$\omega, \omega^0 \in \Omega^{bb}$ であるから，$\Psi(\omega) \leq_a \omega$ かつ $\Psi(\omega^0) \leq_a \omega^0$ となる．ゆえに $\omega^0 \leq_a \Psi(\omega) \leq_a \omega$ となり，矛盾．このような状態 ω, ω^0 は存在しない．

$\omega^0 \ < \Psi(\omega)$

先に示した $\omega <_a \omega^0$ の場合と同様．

$\omega^0 \parallel_a \Psi(\omega)$

一般性を失うことなく，$\Psi^A(\omega) < [\omega^0]_A$，$\Psi^B(\omega) < [\omega^0]_B$ とする．$\Psi(\omega^0)$ と $\Psi(\omega)$ が比較可能である場合とそうでない場合に分けて示す．

$\Psi(\omega^0) \parallel_a \Psi(\omega)$

$$\begin{aligned} c_\Psi(\tilde{h}_0) &= ([\omega^0]_A - \Psi^A(\omega)) + (\Psi^B(\omega) - [\omega^0]_B) + ([\omega^{**}]_A - \Psi^A(\omega^0)) + ([\omega^{**}]_B - \Psi^B(\omega^0)) \\ &> ([\omega^0]_A - \Psi^A(\omega^0)) + ([\omega^0]_B - \Psi^B(\omega^0)) + ([\omega^{**}]_A - \Psi^A(\omega)) + ([\omega^{**}]_A - \Psi^A(\omega)) \\ &= \| \omega^0, \Psi(\omega^0) \| + \| \omega^{**}, \Psi(\omega) \| \\ &\geq \| \omega^*, \Psi(\omega) \| \quad = c_\Psi(h^1). \end{aligned}$$

$\Psi(\omega^0) \leq_a \Psi(\omega)$ または $\Psi(\omega^0) >_a \Psi(\omega)$

先に示した $\Psi(\omega^0) \parallel_a \Psi(\omega)$ の場合と同様.

以上より $c_\Psi(\tilde{h_0}) \geq c_\Psi(h_1)$ が示された. ■

ここから，定速度動学 Ψ を与えたときの，各ゲーム $\mathcal{G}$ に対する確率安定状態の集合 Ω^* を特徴付ける．それは最小コストの ω^*-ツリーの状態 ω^* の集合 $\Xi(\mathcal{G}, c_\Psi)$ を同定することに他ならない．我々は，ゲーム $\mathcal{G}$ をその狭義ナッシュ均衡点を構成する状態の集合 $E(\mathcal{G})$ によって分類して結果を整理する．

$E(\mathcal{G}) = \{\omega_{aa}, \omega_{bb}, \omega_{ab}, \omega_{ba}\}$ のとき.

最小コストを達成する ω-ツリーを調べるために有益な補題を 2 つ示す.

補題 10. $E(\mathcal{G}) = \{\omega_{aa}, \omega_{bb}, \omega_{ab}, \omega_{ba}\}$ のとき，次が成り立つ.

1. N^A が偶数のとき，$\lceil\alpha^A(N^B)\rceil + \lfloor\alpha^A(N^B)\rfloor < N^A$.
2. N^A が奇数のとき，$\lceil\alpha^A(N^B)\rceil + \lfloor\alpha^A(N^B)\rfloor \leq N^A$.
3. N^B が偶数のとき，$\lceil\beta^B(0)\rceil + \lfloor\beta^B(0)\rfloor < N^B$.
4. N^B が奇数のとき，$\lceil\beta^B(0)\rceil + \lfloor\beta^B(0)\rfloor \leq N^B$.

証明 1,2 のみ証明する．他の場合も同様である．

1 の証明．N^A が偶数のとき，$\omega' = (\frac{N^A}{2}, N^B)$ について調べる.

$$\begin{aligned} U^A(a,\omega') - U^A(b,\omega') &= (\frac{N^A}{2} + N^B - 1)p + kN^B - (N - \frac{N^A}{2} - N^B - 1)(1-p) \\ &= (N^A - 2)(p - \frac{1}{2}) + (p+k)N^B > 0 \end{aligned}$$

したがって $\omega\prime \in \Omega^{aa}$ となる．ゆえに $\lceil\alpha^A(N^B)\rceil \leq \frac{N^A}{2}$ かつ $N^A - \lfloor\alpha^A(N^B)\rfloor < \frac{N^A}{2}$ となり，$\lceil\alpha^A(N^B)\rceil < N^A - \lfloor\alpha^A(N^B)\rfloor$ となる.

2 の証明．N^A が奇数のとき，$\omega'' = (\frac{N^A+1}{2}, N^B)$ について調べる.

$$\begin{aligned} U^A(a,\omega'') - U^A(b,\omega'') &= (\frac{N^A+1}{2} + N^B - 1)p + kN^B - (N - \frac{N^A+1}{2} - N^B - 1)(1-p) \\ &= (N^A - 2)(p - \frac{1}{2}) + (p+k)N^B + \frac{1}{2} > 0 \end{aligned}$$

したがって $\omega'' \in \Omega^{aa}$ となる．ゆえに $\lceil\alpha^A(N^B)\rceil \leq \frac{N^A+1}{2}$ かつ $N^A - \lfloor\alpha^A(N^B)\rfloor \geq \frac{N^A}{2}$ となり，$\lceil\alpha^A(N^B)\rceil \leq N^A - \lfloor\alpha^A(N^B)\rfloor$ となる．■

この補題 10 は選好地図と吸引流域を描く際に有益な情報をもたらす．状態空間 Ω は整数格子点の集合 $\{0,1,\ldots,N^A\}\times\{0,1,\ldots,N^B\}$ である．そこで選好地図を考える際に，実数軸による ω_A-ω_B 平面上の $[0,N^A]\times[0,N^B]$ からなる矩形を利用する．補題 10 の 1 と 2 は，直線 $\alpha^A(\omega_B)$ とその長方形の上側水平線との交点は，その水平線のほぼ中点（正確には点 $(\frac{N^A+1}{2},N^B)$）より右側には位置しないことを示している．補題 10 の 3 と 4 は，直線 $\beta^B(\omega_A)$ とその長方形の左側垂直線との交点は，その垂直線のほぼ中点（正確には点 $(0,\frac{N^B-1}{2})$）より下側には位置しないことを示している．

補題 11. $E(\mathcal{G})=\{\omega_{aa},\omega_{bb},\omega_{ab},\omega_{ba}\}$ のとき，次が成り立つ．

1. $\min_{\hat\omega\in\Omega^{aa}}\parallel\omega_{bb},\hat\omega\parallel\geq\max\{\lceil\alpha^A(0)\rceil,\lceil\beta^B(0)\rceil\}$.
2. $\min_{\hat\omega\in\Omega^{bb}}\parallel\omega_{aa},\hat\omega\parallel\geq\max\{N^A-\lfloor\alpha^A(N^B)\rfloor,N^B-\lfloor\beta^B(N^A)\rfloor\}$.
3. $\min_{\hat\omega\in\Omega^{ab}}\parallel\omega_{ba},\hat\omega\parallel>\max\{\lceil\alpha^A(N^B)\rceil,N^B-\lfloor\beta^B(0)\rfloor\}$.
4. $\min_{\hat\omega\in\Omega^{ba}}\parallel\omega_{ab},\hat\omega\parallel>\max\{N^A-\lfloor\alpha^A(0)\rfloor,\lceil\beta^B(N^A)\rceil\}$.

証明 1,3 のみ証明する．他も同様である．

1 の証明．$\min_{\hat\omega\in\Omega^{aa}}\parallel\omega_{bb},\hat\omega\parallel<\lceil\alpha^A(0)\rceil$ と仮定する．$\bar\Omega:=\{\omega'\in\Omega\mid\ \parallel\omega_{bb},\omega'\parallel=\lceil\alpha^A(0)\rceil-1\}$ とする．明らかに $(\lceil\alpha^A(0)\rceil-1,0)\in\bar\Omega\cap\Omega^{A,b\succ a}$ となる．$\bar\Omega$ の任意の状態において (6) 式の条件が満たされる．さらに任意の $\omega\in\bar\Omega$ に対して，$\omega'\leq_a\omega$ なる ω' も明らかに (6) 式の条件を満たす．したがって $\parallel\omega_{bb},\omega\parallel<\lceil\alpha^A(0)\rceil$ を満たす任意の $\omega\in\Omega$ に対して $\omega\notin\Omega^{aa}$ となる．これは $\min_{\hat\omega\in\Omega^{aa}}\parallel\omega_{bb},\hat\omega\parallel<\lceil\alpha^A(0)\rceil$ に矛盾する．

3 の証明．$\omega\prime\in\arg\min_{\hat\omega\in\Omega^{ab}}\parallel\omega_{ba},\hat\omega\parallel$ とする．このとき $[\omega\prime]_A+(N^B-[\omega']_B)\geq\lceil\alpha^A(N^B)\rceil+(N^B-\lfloor\beta^B(0)\rfloor)$ となる．$\omega_{ab}\in E(\mathcal{G})$ より，$\lfloor\alpha^A(N^B)\rfloor>0,\ N^B-\lfloor\beta^B(N^A)\rfloor>0$ となるので，$[\omega']_A+(N^B-[\omega']_B)>\lceil\alpha^A(N^B)\rceil$ かつ $[\omega']_A+(N^B-[\omega']_B)>N^B-\lfloor\beta^B(0)\rfloor$ となる．■

この補題 11 は，各再起類の状態 ω_{ss} から，矩形 $[0,N^A]\times[0,N^B]$ において対角上に位置する別の再起類の状態 $\omega_{s''s'''}$ に推移するために必要な突然変異のプレイヤー数の最小値を考察するには，その長方形の辺上にある状態数を数えればよいことを示唆している．

再起類 $\{\omega_{ss'}\}\subset\Omega_a$（$s,s'\in S$）の状態 $\omega_{ss'}$ から，別の再起類 $\{\omega_{s''s'''}\}\subset\Omega_a$（$s'',s'''\in S$）の状態 $\omega_{s''s'''}$ への最小コストのパスを $\omega_{ss'}\to\omega_{s''s'''}$ と書く．次に吸引流域 $\mathcal{V}(\omega_{ss'})$ 上の $\omega_{ss'}$-ツリーを定速度動学 Ψ にしたがって作り，パス $\omega_{ss'}\to\omega_{s''s'''}$ の始点に接続する．吸引流域 $\mathcal{V}(\omega_{s''s'''})$ 上の $\omega_{s''s'''}$-ツリーを定速度動学 Ψ によって作り，パス $\omega_{ss'}\to\omega_{s''s'''}$ の終点に接続する．こうして $\mathcal{V}(\omega_{ss'})\cup\mathcal{V}(\omega_{s''s'''})$ 上の $\omega_{s''s'''}$-ツリーを作ることができる．このツリーを $(\omega_{ss'}\to\omega_{s''s'''})$ というように，パス $\omega_{ss'}\to\omega_{s''s'''}$ に括弧を付けて表す．ツリーの枝が定速度動学に従うものである限り，その始点から終点への推移コ

ストは 0 である．よって，まずここで述べた手続きによって再起類の状態と別の再起類の状態をパスでつなぎ，最後にそれらを組み合わせることで作られる ω-ツリーだけに注目しても，最小コストの ω-ツリーを探す目的からすれば十分である．今後，混乱の恐れがない限り，このようにして構成される ω-ツリーのみを，ω-ツリーと我々は呼ぶ．このようにツリー $(\omega \to \omega')$ とツリー $(\omega'' \to \omega')$ から，Ω 上の ω'-ツリーが作られるとき，そのツリーを $((\omega \to \omega'), (\omega'' \to \omega'))$ と，部分ツリーを括弧で括って表記する．また各 ω に対して，その最小コストを達成する ω-ツリーを τ^*_ω と表す．

$E(\mathcal{G}) = \{\omega_{aa}, \omega_{bb}, \omega_{ab}, \omega_{ba}\}$ の場合，例えば ω_{aa}-ツリーは次のように 16 通りある．

$$\tau^1_{\omega_{aa}} = ((\omega_{ab} \to \omega_{aa}), (\omega_{ba} \to \omega_{aa}), (\omega_{bb} \to \omega_{ab})),\ \tau^2_{\omega_{aa}} = ((\omega_{ab} \to \omega_{aa}), (\omega_{ba} \to \omega_{aa}), (\omega_{bb} \to \omega_{ba})),$$
$$\tau^3_{\omega_{aa}} = ((\omega_{ab} \to \omega_{aa}), (\omega_{ba} \to \omega_{bb}), (\omega_{bb} \to \omega_{ab})),\ \tau^4_{\omega_{aa}} = ((\omega_{ab} \to \omega_{bb}), (\omega_{ba} \to \omega_{aa}), (\omega_{bb} \to \omega_{ba})),$$
$$\tau^5_{\omega_{aa}} = ((\omega_{ab} \to \omega_{bb}), (\omega_{ba} \to \omega_{bb}), (\omega_{bb} \to \omega_{aa})),\ \tau^6_{\omega_{aa}} = ((\omega_{ab} \to \omega_{aa}), (\omega_{ba} \to \omega_{aa}), (\omega_{bb} \to \omega_{aa})),$$
$$\tau^7_{\omega_{aa}} = ((\omega_{ab} \to \omega_{aa}), (\omega_{ba} \to \omega_{ab}), (\omega_{bb} \to \omega_{aa})),\ \tau^8_{\omega_{aa}} = ((\omega_{ab} \to \omega_{aa}), (\omega_{ba} \to \omega_{ab}), (\omega_{bb} \to \omega_{ab})),$$
$$\tau^9_{\omega_{aa}} = ((\omega_{ab} \to \omega_{aa}), (\omega_{ba} \to \omega_{ab}), (\omega_{bb} \to \omega_{ba})),\ \tau^{10}_{\omega_{aa}} = ((\omega_{ab} \to \omega_{aa}), (\omega_{ba} \to \omega_{bb}), (\omega_{bb} \to \omega_{aa})),$$
$$\tau^{11}_{\omega_{aa}} = ((\omega_{ab} \to \omega_{ba}), (\omega_{ba} \to \omega_{aa}), (\omega_{bb} \to \omega_{aa})),\ \tau^{12}_{\omega_{aa}} = ((\omega_{ab} \to \omega_{ba}), (\omega_{ba} \to \omega_{aa}), (\omega_{bb} \to \omega_{ab})),$$
$$\tau^{13}_{\omega_{aa}} = ((\omega_{ab} \to \omega_{ba}), (\omega_{ba} \to \omega_{aa}), (\omega_{bb} \to \omega_{ba})),\ \tau^{14}_{\omega_{aa}} = ((\omega_{ab} \to \omega_{ba}), (\omega_{ba} \to \omega_{bb}), (\omega_{bb} \to \omega_{aa})),$$
$$\tau^{15}_{\omega_{aa}} = ((\omega_{ab} \to \omega_{bb}), (\omega_{ba} \to \omega_{aa}), (\omega_{bb} \to \omega_{aa})),\ \tau^{16}_{\omega_{aa}} = ((\omega_{ab} \to \omega_{bb}), (\omega_{ba} \to \omega_{ab}), (\omega_{bb} \to \omega_{aa})).$$

各組 $s, s' \in S$ の $\omega_{ss'}$-ツリーも，この ω_{aa} と同様に 16 通りある．拡張された言語ゲーム $\mathcal{G}$ が $E(\mathcal{G}) = \{\omega_{aa}, \omega_{bb}, \omega_{ab}, \omega_{ba}\}$ であるとき，$\omega_{ss'}$-ツリーに応じて 16 通りあるツリーのコストの値のうち，最小コストの $\omega^*_{ss'}$-ツリーのコストの値 $c_\Psi(\tau^*_{\omega_{ss'}})$ は，次の定理が示す 5 通りに絞り込まれる．

定理 3. 両グループで各期の調整人数が等しい定速度動学 $\Psi = (\Psi^A_\xi, \Psi^B_\xi)$ を仮定する．$E(\mathcal{G}) = \{\omega_{aa}, \omega_{bb}, \omega_{ab}, \omega_{ba}\}$ のとき，次が成り立つ．

1. $c_\Psi(\tau^*_{\omega_{aa}}) = \min_{i \in \{1,\cdots,5\}} c_\Psi(\tau^i_{\omega_{aa}})$

   ただし，

$$\tau^1_{\omega_{aa}} = ((\omega_{ab} \to \omega_{aa}), (\omega_{ba} \to \omega_{aa}), (\omega_{bb} \to \omega_{ab}))$$
$$\tau^2_{\omega_{aa}} = ((\omega_{ab} \to \omega_{aa}), (\omega_{ba} \to \omega_{aa}), (\omega_{bb} \to \omega_{ba}))$$
$$\tau^3_{\omega_{aa}} = ((\omega_{ab} \to \omega_{aa}), (\omega_{ba} \to \omega_{bb}), (\omega_{bb} \to \omega_{ab}))$$
$$\tau^4_{\omega_{aa}} = ((\omega_{ab} \to \omega_{bb}), (\omega_{ba} \to \omega_{aa}), (\omega_{bb} \to \omega_{ba}))$$
$$\tau^5_{\omega_{aa}} = ((\omega_{ab} \to \omega_{bb}), (\omega_{ba} \to \omega_{bb}), (\omega_{bb} \to \omega_{aa}))$$

2. $c_\Psi(\tau^*_{\omega_{bb}}) = \min_{i\in\{1,\cdots,5\}} c_\Psi(\tau^i_{\omega_{bb}})$

ただし，

$$\tau^1_{\omega_{bb}} = ((\omega_{aa}\to\omega_{ab}),(\omega_{ab}\to\omega_{bb}),(\omega_{ba}\to\omega_{aa}))$$

$$\tau^2_{\omega_{bb}} = ((\omega_{aa}\to\omega_{ab}),(\omega_{ab}\to\omega_{bb}),(\omega_{ba}\to\omega_{bb}))$$

$$\tau^3_{\omega_{bb}} = ((\omega_{aa}\to\omega_{ba}),(\omega_{ab}\to\omega_{aa}),(\omega_{ba}\to\omega_{bb}))$$

$$\tau^4_{\omega_{bb}} = ((\omega_{aa}\to\omega_{ba}),(\omega_{ab}\to\omega_{bb}),(\omega_{ba}\to\omega_{bb}))$$

$$\tau^5_{\omega_{bb}} = ((\omega_{aa}\to\omega_{bb}),(\omega_{ab}\to\omega_{aa}),(\omega_{ba}\to\omega_{aa}))$$

3. $c_\Psi(\tau^*_{\omega_{ab}}) = \min_{i\in\{1,\cdots,5\}} c_\Psi(\tau^i_{\omega_{ab}})$

ただし，

$$\tau^1_{\omega_{ab}} = ((\omega_{aa}\to\omega_{ab}),(\omega_{ba}\to\omega_{bb}),(\omega_{bb}\to\omega_{aa}))$$

$$\tau^2_{\omega_{ab}} = ((\omega_{aa}\to\omega_{ab}),(\omega_{ab}\to\omega_{bb}),(\omega_{ba}\to\omega_{bb}))$$

$$\tau^3_{\omega_{ab}} = ((\omega_{aa}\to\omega_{ba}),(\omega_{ab}\to\omega_{aa}),(\omega_{ba}\to\omega_{bb}))$$

$$\tau^4_{\omega_{ab}} = ((\omega_{aa}\to\omega_{ba}),(\omega_{ab}\to\omega_{bb}),(\omega_{ba}\to\omega_{bb}))$$

$$\tau^5_{\omega_{ab}} = ((\omega_{aa}\to\omega_{bb}),(\omega_{ab}\to\omega_{aa}),(\omega_{ba}\to\omega_{aa}))$$

4. $c_\Psi(\tau^*_{\omega_{ba}}) = \min_{i\in\{1,\cdots,5\}} c_\Psi(\tau^i_{\omega_{ba}})$

ただし，

$$\tau^1_{\omega_{ba}} = ((\omega_{aa}\to\omega_{ab}),(\omega_{ab}\to\omega_{bb}),(\omega_{ba}\to\omega_{aa}))$$

$$\tau^2_{\omega_{ba}} = ((\omega_{aa}\to\omega_{ab}),(\omega_{ab}\to\omega_{bb}),(\omega_{ba}\to\omega_{bb}))$$

$$\tau^3_{\omega_{ba}} = ((\omega_{aa}\to\omega_{ba}),(\omega_{ab}\to\omega_{aa}),(\omega_{ba}\to\omega_{bb}))$$

$$\tau^4_{\omega_{ba}} = ((\omega_{aa}\to\omega_{ba}),(\omega_{ab}\to\omega_{bb}),(\omega_{ba}\to\omega_{bb}))$$

$$\tau^5_{\omega_{ba}} = ((\omega_{aa}\to\omega_{bb}),(\omega_{ab}\to\omega_{aa}),(\omega_{ba}\to\omega_{aa}))$$

証明 1 のみ示す．補題 10,11 から $c_\Psi(\tau^6_{\omega_{aa}}) \geq c_\Psi(\tau^1_{\omega_{aa}})$, $c_\Psi(\tau^7_{\omega_{aa}}) > c_\Psi(\tau^1_{\omega_{aa}})$, $c_\Psi(\tau^8_{\omega_{aa}}) > c_\Psi(\tau^2_{\omega_{aa}})$, $c_\Psi(\tau^9_{\omega_{aa}}) > c_\Psi(\tau^2_{\omega_{aa}})$, $c_\Psi(\tau^{10}_{\omega_{aa}}) \geq c_\Psi(\tau^3_{\omega_{aa}})$, $c_\Psi(\tau^{11}_{\omega_{aa}}) \geq c_\Psi(\tau^1_{\omega_{aa}})$, $c_\Psi(\tau^{12}_{\omega_{aa}}) > c_\Psi(\tau^1_{\omega_{aa}})$, $c_\Psi(\tau^{13}_{\omega_{aa}}) > c_\Psi(\tau^2_{\omega_{aa}})$, $c_\Psi(\tau^{14}_{\omega_{aa}}) > c_\Psi(\tau^5_{\omega_{aa}})$, $c_\Psi(\tau^{15}_{\omega_{aa}}) \geq c_\Psi(\tau^4_{\omega_{aa}})$, $c_\Psi(\tau^{16}_{\omega_{aa}}) > c_\Psi(\tau^5_{\omega_{aa}})$
がいえる．よって $c_\Psi(\tau^j_{\omega_{aa}})(j = 6,\cdots,16)$ は最小コスト $c_\Psi(\tau^*_{\omega_{aa}})$ よりも小さくなることはない．■

このように各組 $s, s' \in S$ の最小コストの $\omega_{ss'}$ ツリーを絞り込むことで，次の 2 つの結果が示される．

定理 4. 両グループで各期の調整人数が等しい定速度動学 $\Psi = (\Psi^A_\xi, \Psi^B_\xi)$ を仮定する．$E(\mathcal{G}) = \{\omega_{aa}, \omega_{bb}, \omega_{ab}, \omega_{ba}\}$ かつ N^A, N^B がともに偶数のとき，$\omega_{ba} \notin \Omega^*$.

証明 補題 6,7 より，$c_\Psi(\tau^1_{\omega_{ba}}) > c_\Psi(\tau^3_{\omega_{aa}})$，$c_\Psi(\tau^2_{\omega_{ba}}) > c_\Psi(\tau^2_{\omega_{bb}})$，$c_\Psi(\tau^3_{\omega_{ba}}) > c_\Psi(\tau^1_{\omega_{aa}})$，$c_\Psi(\tau^4_{\omega_{ba}}) > c_\Psi(\tau^3_{\omega_{bb}})$，$c_\Psi(\tau^5_{\omega_{ba}}) > c_\Psi(\tau^4_{\omega_{bb}})$ となる．■

定理 5. N^A, N^B を奇数とする．次の条件が満たされないとき，$\omega_{ba} \notin \Omega^*$.

$$k < \min\Big\{\frac{N^A-1}{2N^B} - \frac{N-2}{N^B}p\ ,\ \frac{N^B-1}{2N^A} - \frac{N-2}{N^A}q\Big\}.$$

証明 $\omega_{ba} \in \Xi(\mathcal{G}, c_\Psi)$ となることがあるのは，補題 10 の 2,4 の条件が等号で成立するとき，すなわち

$$\begin{aligned}
&U^A\big(a, (\frac{N^A-1}{2}, N^B)\big) < U^A\big(b, (\frac{N^A-1}{2}, N^B)\big),\\
&U^A\big(a, (\frac{N^A+1}{2}, N^B)\big) > U^A\big(b, (\frac{N^A+1}{2}, N^B)\big).\\
&\text{または,}\\
&U^B\big(a, (0, \frac{N^B-1}{2})\big) < U^B\big(b, (0, \frac{N^B-1}{2})\big),\\
&U^B\big(a, (0, \frac{N^B-1}{2})\big) > U^B\big(b, (0, \frac{N^B+1}{2})\big).
\end{aligned}$$

が成立するときである．このうち 2 番目，3 番目の条件は補題 10 で示したように常に満たされる．よって，1 番目，4 番目の条件を k について整理すると，

$$\begin{aligned}
k &< \frac{N^A-1}{2N^B} - \frac{N-2}{N^B}p,\\
k &< \frac{N^B-1}{2N^A} - \frac{N-2}{N^A}q.
\end{aligned}$$

となる．この 2 条件が満たされなければ，補題 10 の 2,4 の条件は厳密に成立する．したがって $\omega_{ba} \notin \Xi(\mathcal{G}, c_\Psi)$．補第 8 より $\Omega^* = \Xi(\mathcal{G}, c_\Psi)$ であるから，この定理を得る．■

2 番目，3 番目の条件も定理 5 の条件に加えると次式を得る．

$$\frac{N^A-3}{2N^B} - \frac{N-2}{N^B}p < \quad k \quad < \frac{N^A-1}{2N^B} - \frac{N-2}{N^B}p, \tag{18}$$

$$\frac{N^B-3}{2N^A} - \frac{N-2}{N^A}q < \quad k \quad < \frac{N^B-1}{2N^A} - \frac{N-2}{N^A}q. \tag{19}$$

式 (18)，(19) を満たす k に許される範囲はそれぞれ $\frac{1}{N^B}$，$\frac{1}{N^A}$ となる．$E(\mathcal{G}) = \{\omega_{aa}, \omega_{bb}, \omega_{ab}, \omega_{ba}\}$ である拡張言語ゲーム $\mathcal{G}$ では，k の下限はこれらの式よりも大きい値なので，定理 5 の条件を満たす k の範囲はより狭くなる．したがって，各グループの人口 N^A, N^B がともに十分大きくなると，定理 5

の条件を満たすような k の範囲は非常に狭くなる．N^A, N^B が奇数であっても，ω_{ba} が確率安定性をもつようなゲーム $\mathcal{G} \in \Theta$ は限定的なものとなる．

$E(\mathcal{G}) = \{\omega_{aa}, \omega_{bb}, \omega_{ab}\}$ のとき．

各 $\omega_{aa}, \omega_{bb}, \omega_{ab}$-ツリーは，それぞれ次の 3 通りである．

$$\tau^1_{\omega_{aa}} = \{(\omega_{ab} \to \omega_{aa}), (\omega_{bb} \to \omega_{aa})\},\ \tau^2_{\omega_{aa}} = \{(\omega_{ab} \to \omega_{aa}), (\omega_{bb} \to \omega_{ab})\},$$
$$\tau^3_{\omega_{aa}} = \{(\omega_{ab} \to \omega_{bb}), (\omega_{bb} \to \omega_{aa})\}.$$
$$\tau^1_{\omega_{bb}} = \{(\omega_{aa} \to \omega_{ab}), (\omega_{ab} \to \omega_{bb})\},\ \tau^2_{\omega_{bb}} = \{(\omega_{aa} \to \omega_{bb}), (\omega_{ab} \to \omega_{bb})\},$$
$$\tau^3_{\omega_{bb}} = \{(\omega_{aa} \to \omega_{bb}), (\omega_{ab} \to \omega_{bb})\}.$$
$$\tau^1_{\omega_{ab}} = \{(\omega_{aa} \to \omega_{ab}), (\omega_{bb} \to \omega_{aa})\},\ \tau^2_{\omega_{ab}} = \{(\omega_{aa} \to \omega_{ab}), (\omega_{bb} \to \omega_{ab})\},$$
$$\tau^3_{\omega_{ab}} = \{(\omega_{aa} \to \omega_{bb}), (\omega_{bb} \to \omega_{ab})\}.$$

各組 $s, s' \in S$ の最小コストの $\omega_{\omega^{ss'}}$ ツリー $\tau^*_{ss'}$ は，選好地図において $\Omega^{ba} = \phi$ となるとき，パラメータ k の符号によって次の定理 6.1 と定理 6.2 に分けて整理することができる．

定理 6.1． $\Omega^{ba} = \phi$ かつ $k > 0$ ならば，

1. $c_\Psi(\tau^*_{\omega_{aa}}) = c_\Psi(\{(\omega_{ab} \to \omega_{aa}), (\omega_{bb} \to \omega_{ab})\})$,

2. $c_\Psi(\tau^*_{\omega_{ab}}) = c_\Psi(\{(\omega_{aa} \to \omega_{ab}), (\omega_{ab} \to \omega_{bb})\})$,

3. $c_\Psi(\tau^*_{\omega_{bb}}) = c_\Psi(\{(\omega_{aa} \to \omega_{ab}), (\omega_{bb} \to \omega_{ab})\})$,

証明 $k > 0$ より，$\omega_B = \beta^B(\omega_A)$ の傾きの絶対値が 1 より大きく，$\omega_B = \beta^A(\omega_A)$ の傾きの絶対値が 1 より小さい．したがって $\omega \in \mathcal{V}(\omega_{bb})$ とすると，状態 $(N^A, \lceil \beta^B(N^A) \rceil)$ は枝 $\omega_{bb}, \omega')$ の最小コストを達成する．ゆえに $c_\Psi((\omega_{bb} \to \omega aa)) = N^A + \lceil \beta^B(N^A) \rceil$ となる．また，$\omega \in \mathcal{V}(\omega_{bb})$ とすると，状態 $(\lfloor \alpha^A(0) \rfloor, 0)$ は枝 (ω_{aa}, ω') の最小コストを達成する．ゆえに $c_\Psi((\omega_{aa} \to \omega_{bb}) = N^B + N^A - \lfloor \alpha^A(0) \rfloor$ となる．また $\omega_{ab} \in E(\mathcal{G})$ より，$\alpha^A(0) < N^A$, $\beta^B(N^A) > 0$ である．各枝のコストは次のようになる．

$$c_\Psi\big((\omega_{aa} \to \omega_{ab})\big) = \min_{\omega' \in \mathcal{V}(\omega_{ab})} c_\Psi((\omega_{aa}, \omega')), \qquad c_\Psi\big((\omega_{aa} \to \omega_{bb})\big) = N^A + \lceil \beta^B(N^A) \rceil,$$
$$c_\Psi\big((\omega_{ab} \to \omega_{aa})\big) = \lceil \beta^B(N^A) \rceil \qquad , c_\Psi\big((\omega_{ab} \to \omega_{bb})\big) = N^A - \lfloor \alpha^A(0) \rfloor,$$
$$c_\Psi\big((\omega_{bb} \to \omega_{aa})\big) = N^B + (N^A - \lfloor \alpha^A(0) \rfloor), \qquad c_\Psi\big((\omega_{bb} \to \omega_{ab})\big) = \min_{\omega'' \in \mathcal{V}(\omega_{ab})} c_\Psi((\omega_{bb}, \omega')).$$

それぞれのコストは

$$
\begin{aligned}
c_\Psi(\tau^1_{\omega_{aa}}) &= \lceil \beta^B(N^A) \rceil + \big(N^A + \lceil \beta^B(N^A) \rceil\big) \\
c_\Psi(\tau^2_{\omega_{aa}}) &= \min_{\omega'' \in \mathcal{V}(\omega_{ab})} c_\Psi\big((\omega_{aa}, \omega'')\big) + \lceil \beta^B(N^A) \rceil \\
c_\Psi(\tau^3_{\omega_{aa}}) &= (N^A - \lfloor \alpha^A(0) \rfloor) + \big(N^A + \lceil \beta^B(N^A) \rceil\big).
\end{aligned}
$$

である．$\lceil \beta^B(N^A) \rceil + \big(N^A + \lceil \beta^B(N^A) \rceil\big) > N^A + \lceil \beta^B(N^A) \rceil$，$\min_{\omega'' \in \mathcal{V}(\omega_{ab})} c_\Psi\big((\omega_{aa}, \omega'')\big) + \lceil \beta^B(N^A) \rceil \leq N^A + \lceil \beta^B(N^A) \rceil$，$(N^A - \lfloor \alpha^A(0) \rfloor) + \big(N^A + \lceil \beta^B(N^A) \rceil\big) > N^A + \lceil \beta^B(N^A) \rceil$ であるから，$c_\Psi(\tau^1_{\omega_{aa}}) > c_\Psi(\tau^2_{\omega_{aa}})$，$c_\Psi(\tau^3_{\omega_{aa}}) > c_\Psi(\tau^2_{\omega_{aa}})$. となる．■

定理 6.2 $\Omega^{ba} = \phi$ かつ $k \leq 0$ ならば,

1. $c_\Psi(\tau^*_{\omega_{aa}}) = \min\{c_\Psi(\tau^2_{\omega_{aa}}),\ c_\Psi(\tau^3_{\omega_{aa}})\}$,

2. $c_\Psi(\tau^*_{\omega_{bb}}) = \min\{c_\Psi(\tau^1_{\omega_{bb}}),\ c_\Psi(\tau^2_{\omega_{bb}})\}$,

3. $c_\Psi(\tau^*_{\omega_{ab}}) = c_\Psi(\tau^2_{\omega_{ab}})$.

証明 $k \leq 0$ より，$\omega_B = \beta^A(\omega_A)$ の傾きの絶対値が 1 より大きく，$\omega_B = \beta^B(\omega_A)$ の傾きの絶対値が 1 より小さい．ゆえにパス $\{(\omega_{bb}, \lceil \alpha^A(0) \rceil)\}$ は $H(\omega_{bb}, \Omega \setminus \Omega^{bb})$ の中で最小コストを達成する．またパス $\{(\omega_{aa}, \lfloor \beta^B(N^B) \rfloor)\}$ は $H(\omega_{aa}, \Omega \setminus \Omega^{aa})$ の中で最小コストを達成する．したがって，$c_\Psi\big((\omega_{bb} \to \omega_{ab})\big) \leq c_\Psi\big((\omega_{bb} \to \omega_{aa})\big)$，$c_\Psi\big((\omega_{aa} \to \omega_{bb})\big) \leq c_\Psi\big((\omega_{aa} \to \omega_{ab})\big)$ となる．これから $c_\Psi(\tau^1_{\omega_{aa}}) \geq c_\Psi(\tau^2_{\omega_{aa}})$，$c_\Psi(\tau^3_{\omega_{bb}}) \geq c_\Psi(\tau^1_{\omega_{bb}})$，$c_\Psi(\tau^1_{\omega_{ab}}) \geq c_\Psi(\tau^2_{\omega_{ab}})$，$c_\Psi(\tau^3_{\omega_{ab}}) \geq c_\Psi(\tau^3_{\omega_{ab}})$ が得られる．■

選好地図において $\Omega^{ba} \neq \phi$ となるとき，領域 Ω^{ba} が，その選好地図の状態空間 Ω を表す長方形の上側水平辺と左側垂直線のいずれを含むかにより，最小コストのツリーを次の定理 6.3 と定理 6.4 に分けて整理することができる．

定理 6.3. $\Omega^{ba} \neq \phi$ かつ，ある状態 ω が存在して $([\omega]_A, N^B) \in \Omega^{ba}$ であれば,

1. $c_\Psi(\tau^*_{\omega_{aa}}) = \min\{c_\Psi(\tau^2_{\omega_{aa}}),\ c_\Psi(\tau^3_{\omega_{aa}})\}$,

2. $c_\Psi(\tau^*_{\omega_{bb}}) = \min\{c_\Psi(\tau^1_{\omega_{bb}}),\ c_\Psi(\tau^2_{\omega_{bb}}),\ c_\Psi(\tau^3_{\omega_{bb}})\}$,

3. $c_\Psi(\tau^*_{\omega_{ab}}) = \min\{c_\Psi(\tau^2_{\omega_{ab}}),\ c_\Psi(\tau^3_{\omega_{ab}})\}$.

証明 $\Omega^{A, b \succ a} = \mathcal{V}(\omega_{bb})$ であり，また $\omega_B = \beta^A(\omega_A)$ の傾きの絶対値が 1 より大きいので,

$c_\Psi\big((\omega_{bb} \to \omega_{aa})\big) \geq c_\Psi\big((\omega_{bb} \to \omega_{ab})\big)$ これにより $c_\Psi(\tau^1_{\omega_{aa}}) \geq c_\Psi(\tau^2_{\omega_{aa}})$，$c_\Psi(\tau^1_{\omega_{ab}}) \geq c_\Psi(\tau^2_{\omega_{ab}})$ が得られる．■

定理 6.4. $\Omega^{ba} \neq \phi$ かつ，ある状態 ω が存在して $(0, [\omega]_B) \in \Omega^{ba}$ であれば，

1. $c_\Psi(\tau^*_{\omega_{aa}}) = \min\{c_\Psi(\tau^1_{\omega_{aa}}),\ c_\Psi(\tau^2_{\omega_{aa}}),\ c_\Psi(\tau^3_{\omega_{aa}})\}$,

2. $c_\Psi(\tau^*_{\omega_{bb}}) = \min\{c_\Psi(\tau^1_{\omega_{bb}}),\ c_\Psi(\tau^2_{\omega_{bb}})\}$,

3. $c_\Psi(\tau^*_{\omega_{ab}}) = \min\{c_\Psi(\tau^1_{\omega_{ab}}),\ c_\Psi(\tau^2_{\omega_{ab}})\}$.

証明 定理 6.3 と同様．■

$E(\mathcal{G}) = \{\omega_{aa}, \omega_{bb}\}$ のとき．

$\Omega_r \neq \phi$ の場合を考察する．$\{\omega, \omega'\} \in \Omega_r$ とするとき $\omega \in \Omega^{ab}$, $\omega' \in \Omega^{ba}$ とする．ξ が各グループの人口 N^A, N^B に対して小さいとき，ある $\hat{\omega} \in \mathcal{V}(\omega_{aa}) \cup \mathcal{V}(\omega_{bb})$ が存在して，$\| \hat{\omega}, \omega \| = 1$ または $\| \hat{\omega}, \omega' \| = 1$ となる $\{\omega, \omega'\} \in \Omega_r$ が存在する．このとき $\mathcal{V}(\{\omega, \omega'\})$ から抜け出すために必要なコストは 1 である．したがって再帰類は確率安定性を持ちにくい．図 4.1 にそのようなゲーム $\mathcal{G}$ の例をあげる．

確率安定性をもつ例として，$\mathcal{G} = (8, 8, \frac{9}{10}, \frac{9}{10}, 10)$(図 4.2) がある．$k$ が非常に大きい値をとるのがその特徴である．この例でも再帰類は単独では安定性を持たないことがわかる．[14]

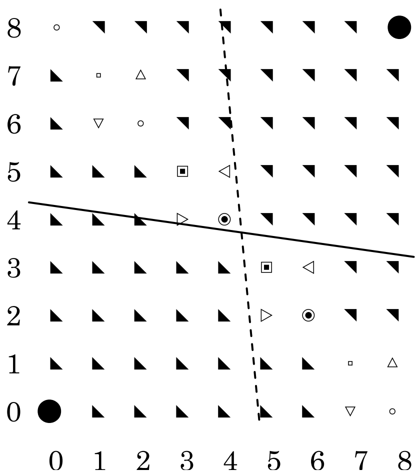

図 4.1：サイクルが確率安定性をもたない

[14] $E(\mathcal{G}) = \{\omega_{aa}, \omega_{bb}\}$ の場合の確率安定性に関する明解な条件付けは今後の課題である．

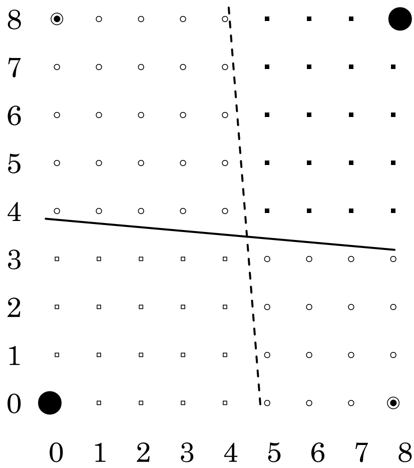

図 4.2：サイクルが確率安定性をもつ

5　結論と展望

拡張された言語ゲームは，$k = 0$ のとき Neary (2012) の言語ゲームと一致する．新たに導入したパラメータ k の符号別に Neary (2012) のモデルへの影響をまとめる．

k が正値の場合を述べる．k がある程度大きくなると，言語ゲームの静学的な均衡の多様性が減る．それぞれのグループが得意な戦略を採用し，グループ間の異なる慣習が消滅する．しかし k が大きくなると，経路依存性のある定速度動学に基づく適応プロセスの下で，グループを問わずすべてのプレイヤーが a，もしくはすべてのプレイヤーが b で協調する状態に向かう経路の他に，ある 2 つの状態間を行き来するサイクルに落ち込む経路と吸引流域も存在する．しかし経路依存性を取り除く確率進化の設定では，このサイクルは確率安定性を持ちにくい．

k が負値の場合を述べる．負値であって k の絶対値がある程度大きくなり取引費用が大きくなると，言語ゲームの静学的な均衡の多様性が増し非対称な均衡が成立しやすくなる．そこでは，それぞれのグループが不得意な戦略を採用する慣習すら存在し得る．定速度動学に基づく経路依存的な適応プロセスの下で，不得意な戦略でグループ内だけで協調に成功している状態に向かう経路が見つかる．しかし経路依存性を取り除く確率進化の設定では，この均衡状態が確率安定性をもつケースは殆ど存在し得ない．ひっきりなしの突然変異，つまり毎期，各プレイヤーが実験的行動を試みることで，両グループにとって最も非効率的な慣習に留まり続けることは非常に稀な現象となる．

今後の研究は，大別して 4 つの方向性が考えられよう．1 つ目の方向は，2 つのプレイヤー集団が交流するという言語ゲームの設定を維持しつつ，各局所ゲームを協調ゲームではない他の 2 人ゲームを想定するものである．例えば，各局所ゲームを 2×2 チキン・ゲームとしよう．それはプレイヤー間の分業のモデルと解釈することができる．ここで各グループに属するプレイヤーがそれぞれ得意とする戦略を異にしているとしよう．2 つのグループが交流し，我々が導入した取引費用が存在するとき，いかなる状態が確率安定性を持つのか明らかではない．グループごとに得意な戦略に各グループが特化する状態に到達可能な経路依存性を持つ適応過程の経路や，その状態の確率安定性が示されれば，国際貿易理論における比較優位の原理の基礎付けになるであろう．また，Nöldeke and Samuelson (1993) のように，完全情報の展開形ゲームをプレイする場合の確率安定性に関する研究は存在する．言語ゲームと同じマッチングの設定で選好の異なる 2 つのグループのプレイヤーどうしが交流しつつ，完全情報の展開形ゲームをプレイするモデルの確率安定性に関する研究は，我々の知る限り存在しない．

2 つ目の方向は，適応動学の一般化にある．定速度動学において，グループ間の調整速度の差の存在を我々は仮定していない．グループごとの調整速度の違いは，経路依存性のある適応動学の吸引流域に強く影響する．よって確率安定性を持つ状態の特定化にも強く影響するはずである．また，Bergin and Lipman (1996) や Pak (2006) のように，状態ごとに突然変異の確率 $\varepsilon > 0$ が変動する場合，我々の拡張した言語ゲームの均衡選択の結果が受ける影響は全く明らかではない．

3 つ目の方向は，グループ内外を問わず言語ゲームの総当りとは異なるマッチング構造を持つモデルの検討があり得よう．マッチングの構造は Ellison (1993) にあるように，確率的な適応プロセスの確率安定状態への収束スピードに強い影響を与える．Ellison (1993) もプレイヤー集団は 1 つの場合しか検討していない．言語ゲームの 2 集団の交流がある場合，グループ内外のマッチング構造が確率安定状態への収束スピードにどのような影響を与えるのかも全く明らかにはなっていない．

4 つ目の方向は，経済史の研究で時間的もしくは地理的なカテゴリーによって個別に議論されてきた経済的慣行・慣習に関し，拡張された言語ゲームに基づく統一的な視点からこれらを再検討する試みである．交流の取引費用の大きさやシナジー効果による利益増加の程度の違いという，とりわけシンプルなパラメータ値の違いが，プレイヤー集団の適応過程に与える影響を我々は調べた．いずれの社会も異文化どうしの接触を何度も経験してきた．異なる選好や技術を持った社会どうしの接触が，協調の成功に向かった事例，協調の失敗に陥った事例，それぞれの枚挙に暇はない．それぞれには複雑な歴史的経緯があろう．しかし，社会がその経緯を歩んだ原因の一端を，我々のモデルは提示しているのかもしれない．[15]

[15]経済史の研究に対するこのような応用の可能性に関して，高橋秀直氏（筑波大学大学院）から有益なコメントをいただいた．

参考文献

Bergin, J. Lipman, B., 1996. Evolution with state-dependent mutations. *Econometrica 64*, 943–956.

Ellison, G., 1993. Learning, local interaction, and coodination. *Econometrica.* 61, 1047–1071.

Freidlin, M.I., Wentzell, A.D., 1998. Random perturbations of dynamical systems. Springer-Verlag, New York.

Kandori, M., Mailath, G., Rob, R., 1993. Learning, mutations and long run equilibria in games. *Econometrica* 61, 29–56.

Neary, P.R., 2012. Competing conventions. *Games and Economic Behavior.* 76, 301–328.

Nöldeke, G., Samuelson, L., 1993. An evolutionary analysis of backward and forward induction. *Games and Economic Behavior.* 5, 425–454.

Pak, M., 2006. Stochastic stability and time-dependent mutations. *Games and Economic Behavior.* 64, 650–665.

Young, P., 1993. The evolution of conventions. *Econometrica* 61, 57–83.