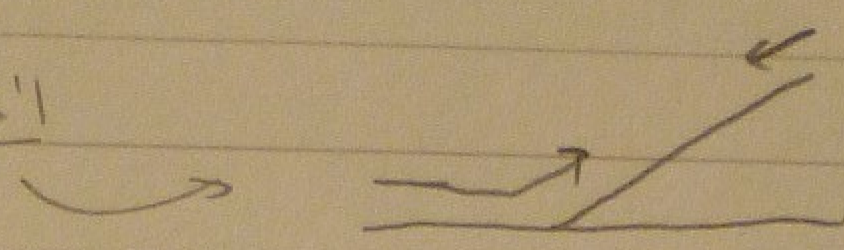
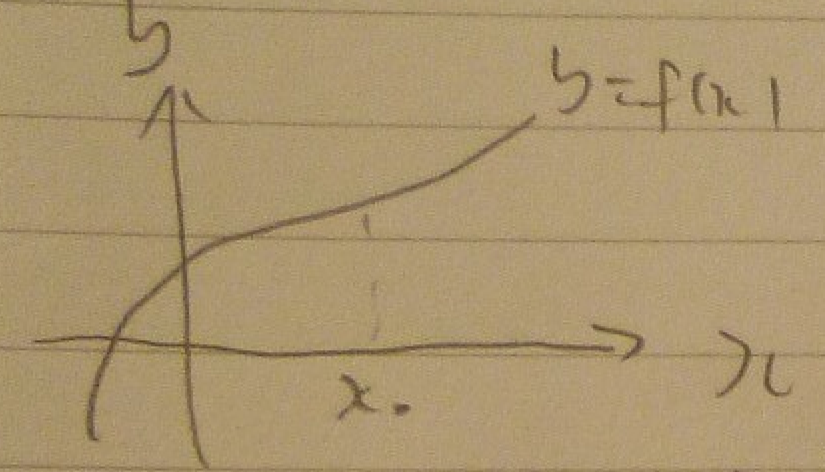
No. Date 11 · 11 · 16 つくば

表の微分学 裏の微分学

天上 地上
kepler Galileo
三法則 慣性の法則



⇒ ニュートン力学 (17C)



$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ … 19C以降

17, 18C

$\boxed{h f'(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0)}$

h が十分小さければ成立 ~ $h^2 = 0$
無限小

$D = \{d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0\}$

$f(x_0+d) - f(x_0) = \underset{\text{唯一個}}{a}\, d \quad (\forall d \in D)$

$a = f'(x_0)$

Q. 19C以降
… $y = f(x)$ という曲線 → 接線に近さ
(すこし接線になることが)

・17C - 18C … 接線

$(fg)' = f'g + fg'$ (Leibnizの公式)

$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$ ㊂ 分子 $-f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h)$

・Leibnizの証明

$\begin{cases} f(x_0+d) = f(x_0) + d f'(x_0) \\ g(x_0+d) = g(x_0) + d g'(x_0) \end{cases}$

かけると

$f(x_0+d)g(x_0+d) = f(x_0)g(x_0) + d\{f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\} + \underset{=0}{d^2} f(x_0)g'(x_0)$

合成関数の微分

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$$

〈今の証明〉

$$\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{\underbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}_{=H}} \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\longrightarrow g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad (h \to 0)$$

$$g(f(x_0+h)) = g(f(x_0)+H)$$

(分母)≠0 もあって あやしい

〈Leibniz流の証明〉 $\in D$ $(\because d \in D \to dd \in D)$

$$g(f(x_0+d)) = g(f(x_0) + f'(x_0)d)$$

$$= g(f(x_0)) + g'(f(x_0)) f'(x_0) d$$

17C ⇒ 19C ℝ

18C Leibniz …貴族に雇われ　手工業 → 大量生産

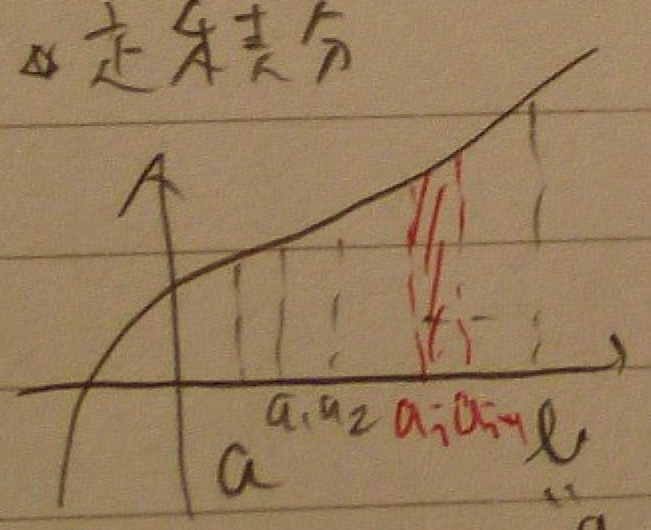
(天才)　技術者 ⇐ 数学・物理

(大学)…基礎論

⇒ manual な処理(積 → 微)

• 微積分学の基本定理

◦ 定積分



$$a_{i+1} - a_i = d_i \in D$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \underline{\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx}$$

$$= \frac{1}{2} d_i \{f(a_i) + f(a_{i+1})\}$$

$$= \frac{1}{2} d_i \{f(a_i) + f(a_i) + f'(a_i)d_i\}$$

$$= \frac{1}{2} d_i \cdot 2f(a_i) = d_i f(a_i)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} d_i f(a_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \{F(a_{i+1}) - F(a_i)\}$$

◦ 基本定理

$F' = f$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$F'(a_i)dx = F(a_{i+1}) - F(a_i)$

‖

$f(a_i)dx$ 微分の定義 … 基本定理の証

• 電磁気学 19C

Faraday・Maxwellの方程式

電場 ⟺ 磁場

電磁波

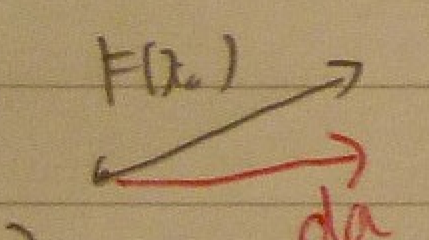
• ベクトル解析

ベクトル場 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 力、流れ

スカラー場 温度 気圧

platonic な立場、pragmatic な立場

☆力の場



仕事 $F(x_0)\cdot da$

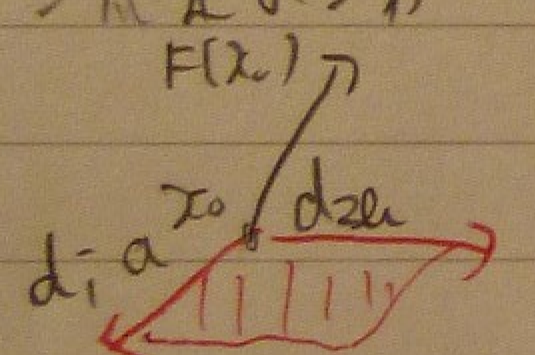
$= (F(x_0)\cdot a)d$

$a \in \mathbb{R}^3 \longmapsto F(x_0)\cdot a$

線型写像

1次の微分形式 -- 空間の各点に線型写像を対応させる

☆流れの場

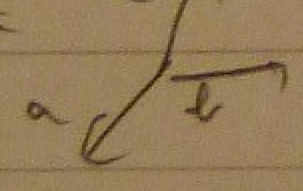


$(d_1, d_2 \in \mathbb{R})$

の外を単位時間に横切っていく水の量

= 平行六面体の体積 $\underbrace{V(d_1a, d_2b, F(x_0))}_{\Phi}$

一般に



$V(a, b, c)$ 符号

平面 $S(a,b)$ $S(\lambda a, b) = \lambda S(a,b)$

$S(a, b_1+b_2) = S(a,b_1) + S(a,b_2)$

$V(a_1+a_2, b, c) = V(a_1,b,c) + V(a_2,b,c)$

$a = a_1e_1 + a_2e_2$ $\left(e_1 = \binom{1}{0}, e_2 = \binom{0}{1}\right)$

$b = b_1e_1 + b_2e_2$

より

$S(a,b)$

$= a_1b_1S(e_1,e_1) + a_1b_2S(e_1,e_2)$

$+ a_2b_1S(e_2,e_1) + a_2b_2S(e_2,e_2)$

$= a_1b_2 - a_2b_1$

$\Phi = d_1d_2V(a, b, F(x_0))$

$(a,b) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longmapsto V(a, b, F(x_0))$

二重線形、交代(2次の交代形式)

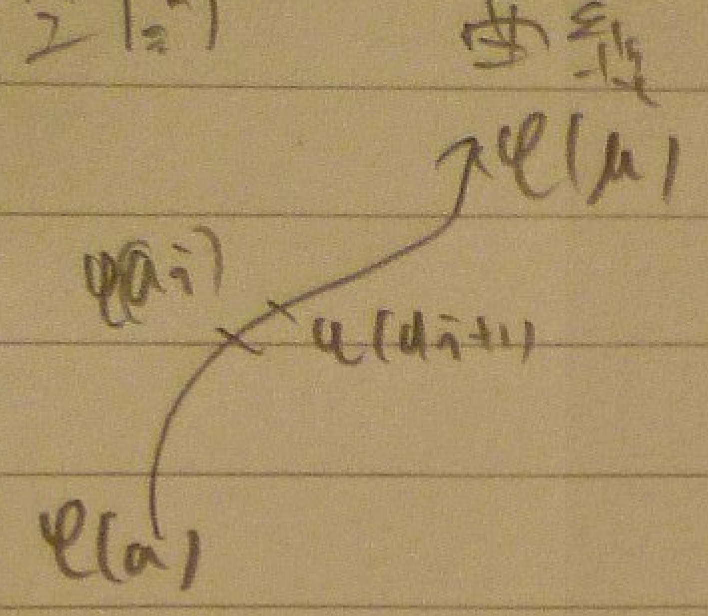
$a = e_1,\ b = e_2$ … z成分

$\quad e_2 \quad\ \ e_3$ … x成分

$\quad e_3 \quad\ \ e_1$ … y成分

2次の微分形式

空間

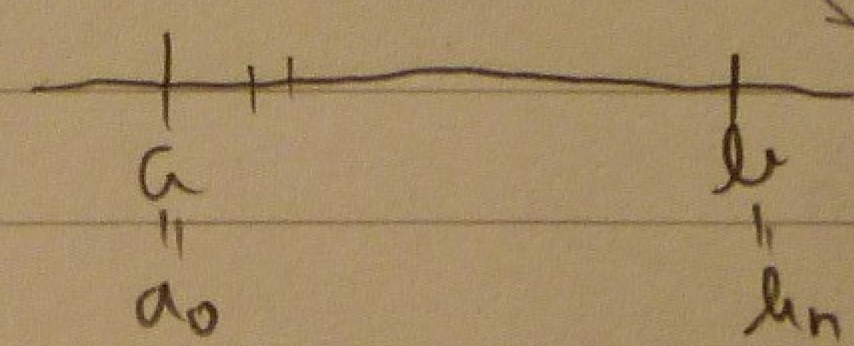


$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^3$

1次の微分形式 ω

$\int_\varphi \omega$ … ωのφに沿っての線積分

定義



$\varphi(a_{i+1}) - \varphi(a_i) = c_i d_i$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega(\varphi(a_i))(c_i d_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \omega(\varphi(a_i))(c_i)\, d_i$$

微分積分学の基本定理の高次元への一般化

0次の微分形式 $\xrightarrow{d}$ 1次の 〃 $\xrightarrow{d}$ 2次の 〃

スカラー場

f: スカラー場

$$\int_\varphi \underbrace{df}_{\text{1次の微分形式}} = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))$$

dfをどう決めるか
無限小の曲線で定める.

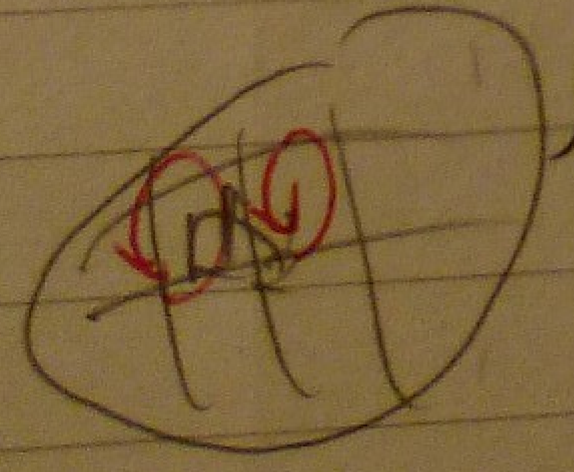
ストークスの定理

$$\underbrace{d}_{\text{定義}} f(x_0)(b d) = f(x_0 + b d) - f(x_0)$$

$\omega \to d\omega$

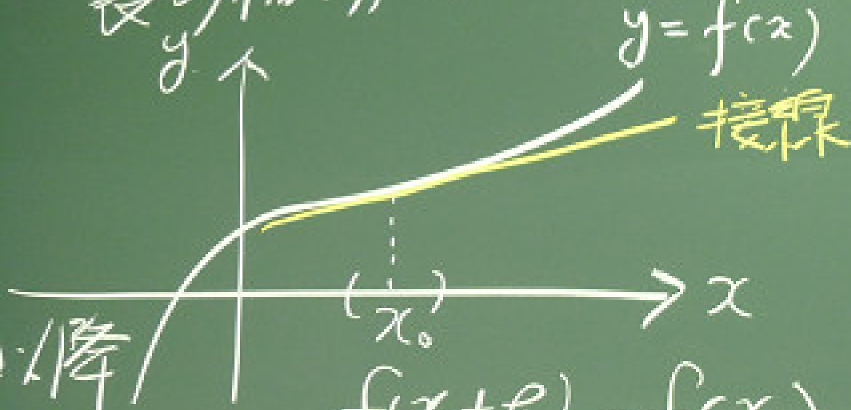
曲面 $\int_\varphi \omega$

無限小の曲面



$$\int_\varphi d\omega = \sum_{i,j} \int_{\varphi_{ij}} d\omega$$

表の微分学
裏の微分学



...降

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

極限 ⇒ 微分

天上	地上
Kepler	Galileo
三法則	慣性の法則
(思考)	実験

ニュートン 17C

Leibniz 力学

18C Euler

Lagrange ...

17, 18C

$\{0\} \neq D = \{d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0\}$

$$\boxed{h f'(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)}$$

$h = 0$

無限小

$f(x_0 + d) - f(x_0) = a\,d \quad (\forall d \in D)$

唯1個

$a = f'(x_0)$

19c以降

面

hが十分小さければ

$h^2 = 0 \Rightarrow h = 0$

$y = f(x)$ という曲線 $\Rightarrow$ 接線に近づく

しかし一般に接線になることはない

十分近づくと接線そのものになってしまう

C

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg' \quad (\text{Leibnizの公式})$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

分子 $-f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0 \ldots$

思いつく

Leibni…

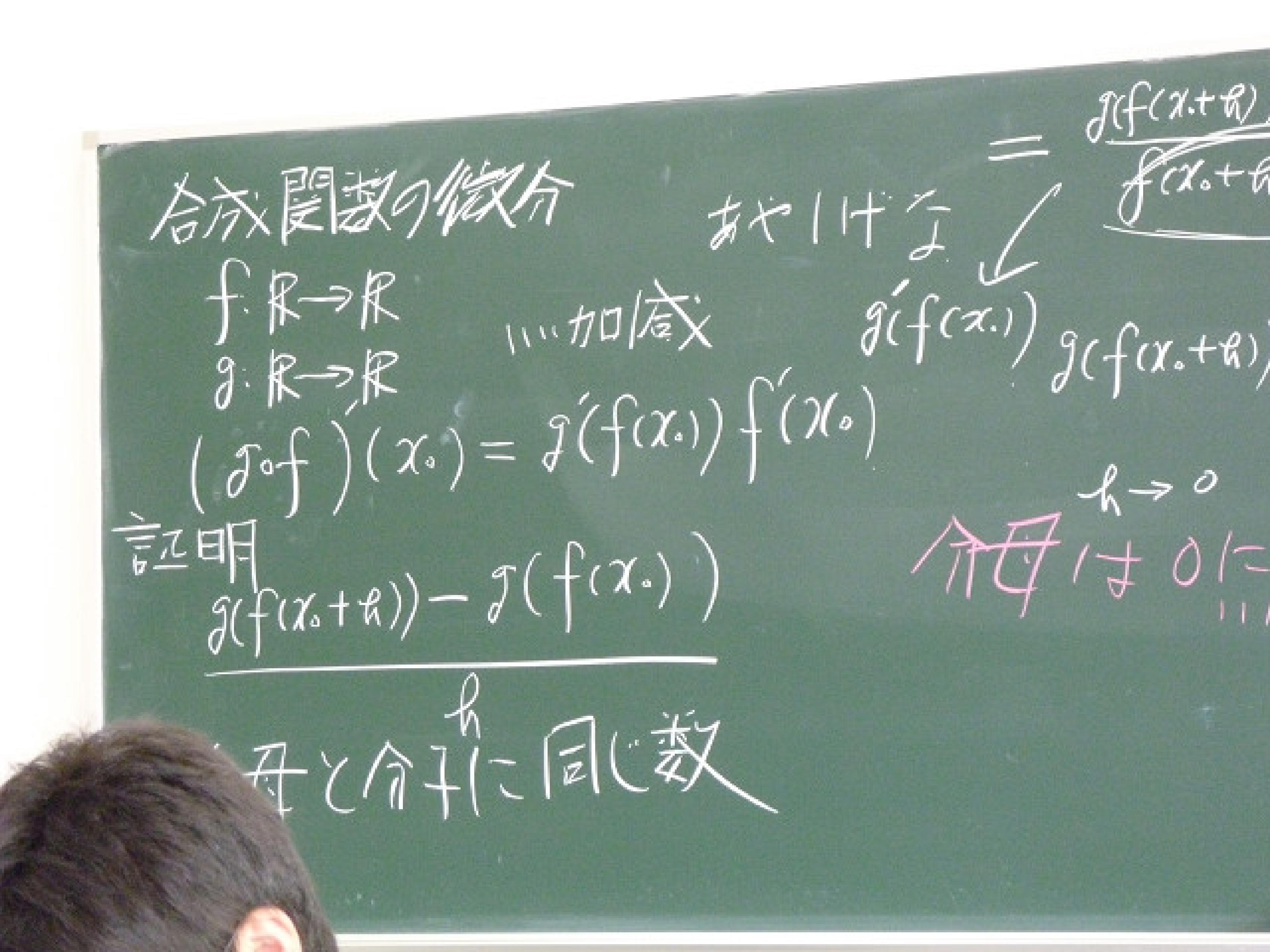
$f(x_0+\ldots$

$g(x_0+\ldots$

引…

$f(x_0\ldots$


Leibnizの証明 $(\forall d \in D)$
$f(x_0+d) = f(x_0) + d f'(x_0)$
$g(x_0+d) = g(x_0) + d g'(x_0)$
掛ける
$f(x_0+d)g(x_0+d) = f(x_0)g(x_0) + d\{f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\} + \underbrace{d^2}_{=0} f'(x_0)g'(x_0)$
Smith
展開しただけ
ただのオッサン


合成関数の微分
f: R→R
g: R→R
……加減
(g∘f)'(x₀) = g'(f(x₀)) f'(x₀)
証明
g(f(x₀+h)) − g(f(x₀))
h
母と分子に同じ数
あやしげな
g'(f(x₀))
g(f(x₀+h))
h→0
分母は0に

$$-\, g(f(x_0)) \qquad\qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\cdots}{-\, f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad d \in D \Rightarrow \alpha d \in D$$

$$(\alpha d)^2 = \alpha^2 \underline{d^2} = 0$$

とおく

$$\downarrow$$

$$= g(f(x_0) + H) \qquad f'(x_0)$$

$$\to H \to 0$$

Leibniz 達の証明

$$g(f(x_0+d)) = g(f(x_0) + f'(x_0)\underline{d}) \quad \in D$$

ってはない

$$= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))\, f'(x_0)\, d$$

11:25〜12:15　19C 産業革命　$1 = 1 + (-$

17C
18C
のどかな
時代
タニマチ

手工業 ⇒ 工場
大量生産
大量

定

Leibniz
貴族
天才

技術者 ⇐ 数学
物理

大学

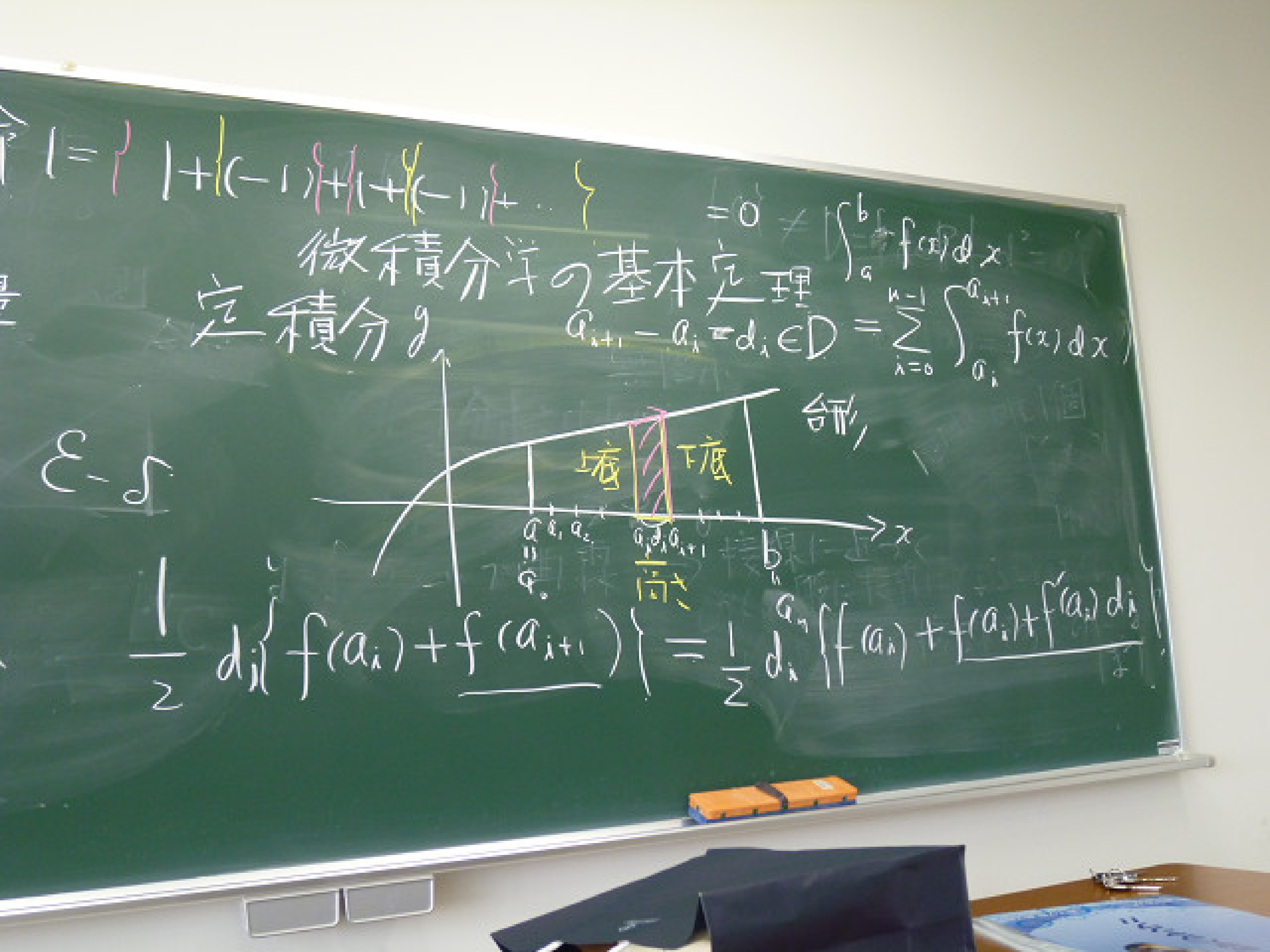
ε-δ

$h^2 = 0 \Rightarrow h = 0$

[illegible]

manual
極 ⇒ 微

$\frac{1}{2}$ d



$= 0 \neq \int_a^b f(x)\,dx$
微積分学の基本定理
定積分
$a_{i+1} - a_i = d_i \in D = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,dx$
台形
上底
下底
高さ
$a = a_0$
a_1
a_2
a_i
d_i
a_{i+1}
b
x
ε-δ
$\frac{1}{2} d_i \{ f(a_i) + f(a_{i+1}) \} = \frac{1}{2} d_i \{ f(a_i) + f(a_i) + f'(a_i) d_i \}$

$= \frac{1}{\cancel{2}} d_i \cancel{2} f(a_i)$

$F' = f$

$= d_i f(a_i)$

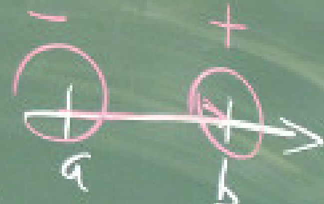
論理

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} d_i f(a_i)$$

基本定理 $= \sum_{i=0}^{n-1} \{F(a_{i+1}) - F(a_i)\}$

$F' = f$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$



境界

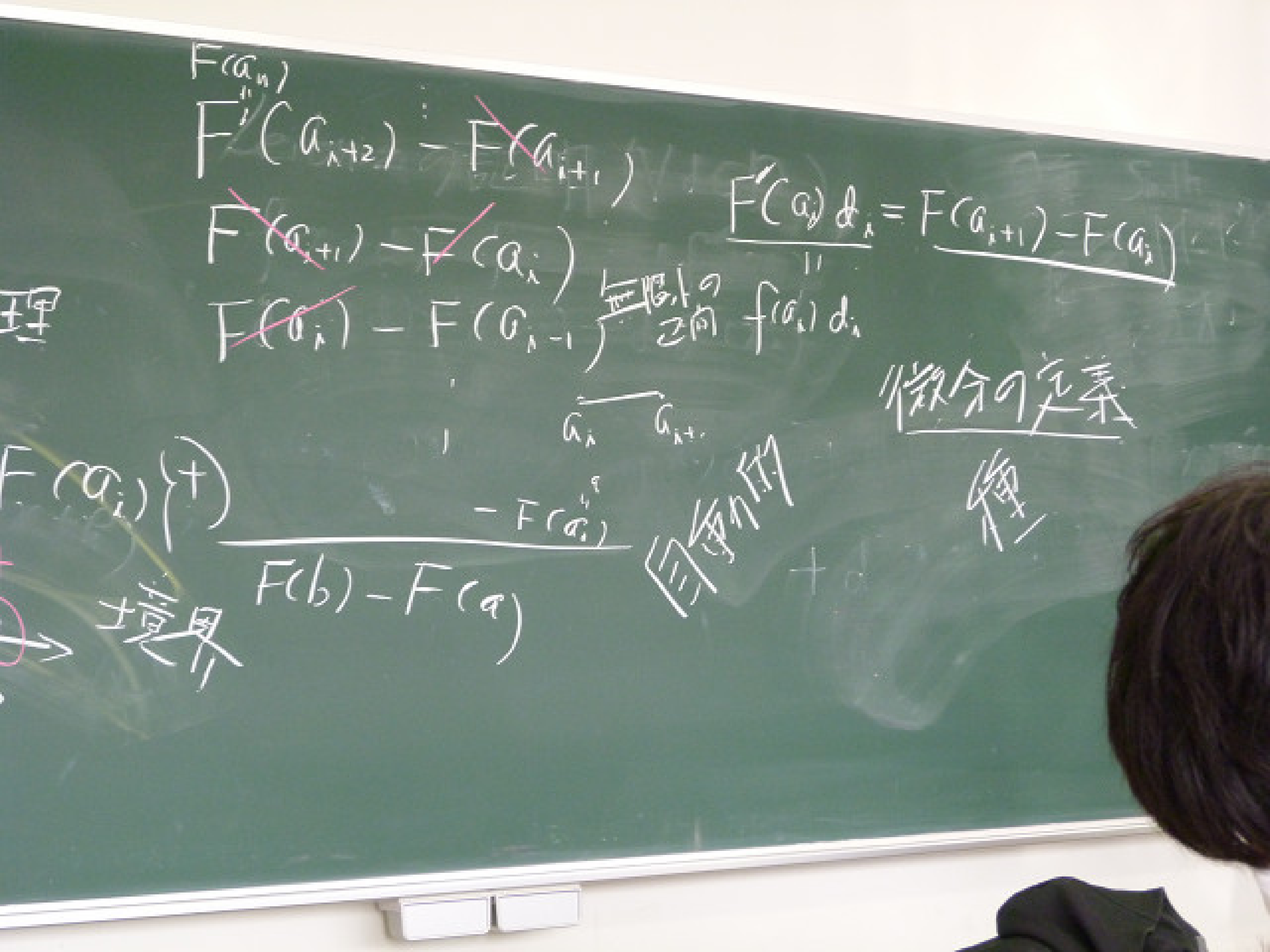
$F(a_n)$

$F'(a$

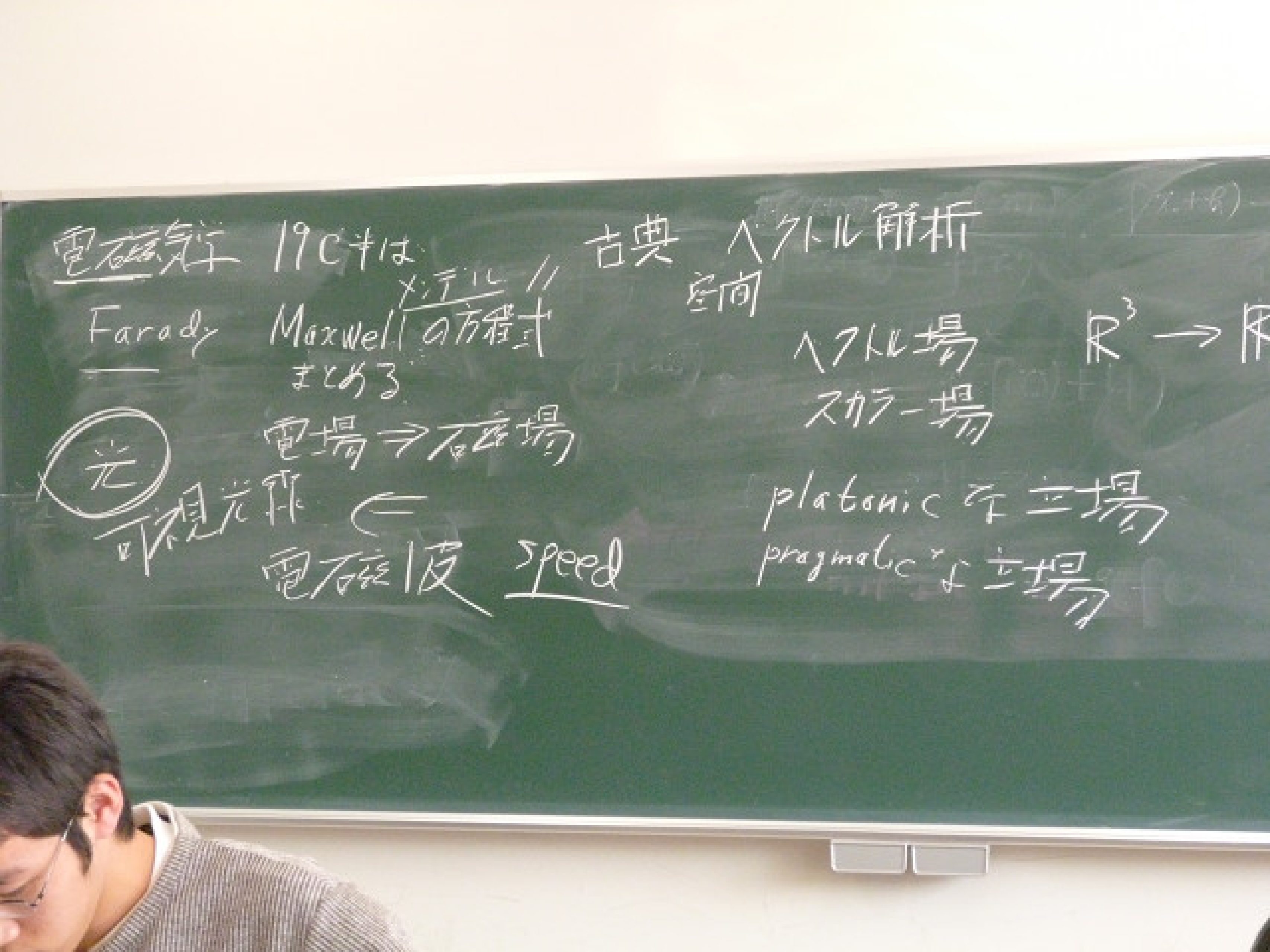
$\cancel{F(a_{i+}}$

$\cancel{F(a_i}$

$F($



F(a_n)
F(a_{i+2}) - F(a_{i+1})
F(a_{i+1}) - F(a_i)
F(a_i) - F(a_{i-1})
無限小の
F'(a_i) d_i = F(a_{i+1}) - F(a_i)
f(a_i) d_i
微分の定義
a_i
a_{i+1}
F(b) - F(a)
境界



電磁気学
19C末は
古典
ベクトル解析
空間
Faraday
Maxwellの方程式
まとめる
ベクトル場
$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
スカラー場
電場 ⇒ 磁場
光
可視光線
電磁波
speed
platonicな立場
pragmaticな立場

計測

$d \in D$　　$F(x_0)$

仕事　x_0　$d\,a$

$a = a_1 + a_2$　$F(x_0)\cdot d\,a$

$= (F(x_0)\cdot a)\,d$

$$\boxed{a \in \mathbb{R}^3 \longmapsto F(x_0)\overset{\text{内積}}{\cdot} a}$$

線型写像　1次の交代形式

1次の微分形式

空間の各点に
1次の交代形式
（線型写像）を
対応させる

$a_1, a_2 \in$

$a = e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$　$e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$　$e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

形式

に

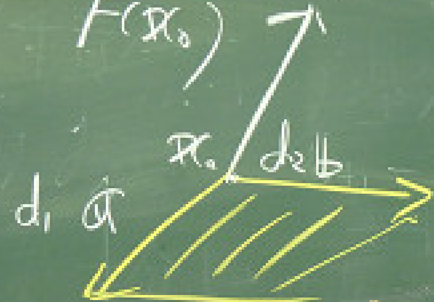
写

式

を

$d_1, d_2 \in \mathbb{R}$　水 流れの場

平



2次の微分形式

平を単位時間に横切っていく水の量

$a = e_1 \quad e_2 \quad e_3$

$b = e_2 \quad e_3 \quad e_1$

$\quad z \quad x \quad y$

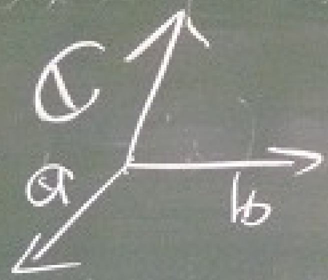
平行六面体の体積 $\Longrightarrow V(d_1 a, d_2 b, F(x_0))$

$d_1 d_2 V(a, b, F(x_0))$

$(a, b) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longmapsto V(a, b, F(x_0))$

二重線形，交代 $\Big\}$ 2次の交代形式

$\left(\frac{\partial}{\partial}\right)$



平面

$\underline{S(a, b)}$

$S(\alpha a, b$

$S(a, b) = -S(b, a)$ $S(a, b_1 +$

平行四辺形; $a = b$

$S(a, a) = 0$

$a \to b$ 反時計 $+$

時計 $-$

交代

$\underline{V(a, b, c)}$

符号 右わ(　$+$

$V(\alpha a, b, c) = \alpha V(a, b, c)$

$V(a_1 + a_2, b, c) = V(a_1, b, c) + V(a_2, b, c)$

$$\ldots b) = \alpha S(a, b)$$

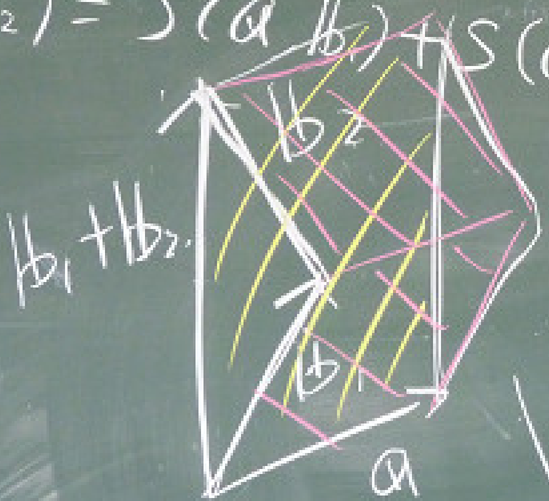
$$\ldots + b_2) = S(a, b_1) + S(a, b_2)$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_1 e_1 + b_2 e_2$$

$$S(e_1, e_2) = 1$$



$$S(a, b) = a_1 b_1 - a_2 b_2$$

$$S(a_1 e_1 + a_2 e_2,\ b_1 e_1 + b_2 e_2)$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_1 S(e_1, e_1) + a_1 b_2 S(e_1, e_2) + a_2 b_1 S(e_2, e_1) + a_2 b_2 S(e_2, e_2)$$

$$= |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$


1次の微分形式 ω
空間
曲線
$\varphi(b)$
$\varphi(a_{i+1})$
$\varphi(a_i)$
$\mathbb{C}_i d_i$
$\varphi(a)$
$\varphi:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^3$
$a_{i+1}-a_i=d_i\in D$
$\int_\varphi \omega$
ωのφに沿っての積分
定義
$a = a_0$, a_1, a_2, $b = b_n$
$\varphi(a_{i+1})-\varphi(a_i)=\mathbb{C}_i d_i$
$=\sum_{i=0}^{n-1}\omega(\varphi(a_i))(\mathbb{C}_i d_i)$
$=\sum_{i=0}^{n-1}\omega(\varphi(a_i))(\mathbb{C}_i)\,d_i$

deo

微積分学の基本定理の高次元への一般化

bd

0次の微分形式 $\xrightarrow{d}$ 1次の微分形式 $\xrightarrow{d}$ 2次の微分形式

= スカラー場

f: スカラー場(0次の微分形式)

φ 曲線

$[a,b] \to \mathbb{R}^3$

ストークスの定理

$$\int_{\varphi} \underbrace{df}_{\text{1次の微分形式}} = f(\varphi(b)) - f(\varphi($$

dfをとう決めれば……か？

無限小の曲率

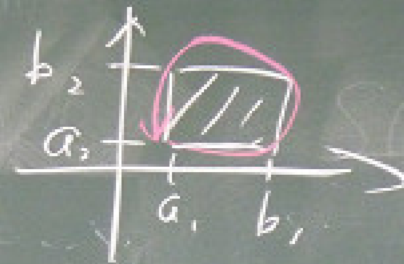
$$df(x_0)(hd) = f(x_0 + hd) - f(x_0)$$

定義

$f(\varphi(a))$

$\omega \longrightarrow d\omega$

1次の微分形式 → 2次の微分形式



曲面 $\varphi \quad [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\int_{\varphi} d\omega = \int_{\partial\varphi} \omega.$$

無限小の曲面

$\partial \varphi_{ij}$

$$\int_{\varphi} d\omega = \sum_{i,j} \int_{\varphi_{ij}} d\omega = \sum_{i,j} \int_{\partial \varphi_{ij}} \omega$$