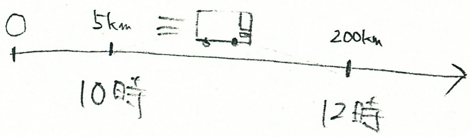
今日の名文

星は天国の光がもれている

微分

→ 瞬間の速さ

平均の速さ



$\frac{195km}{2時間} = 97.5km/h$

スピード違反

大御所

Newton（ニュートン）
Leibeniz（ライプニッツ）

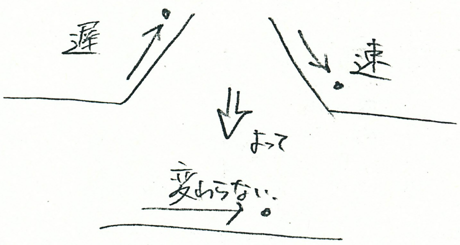
17C
（江戸くらい）

力学
重力 理論を作りたかった

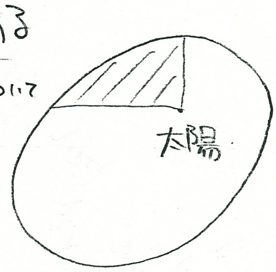
その前は → 天＝聖
地＝俗 別の法則

ガリレオ

単純な法則見抜く
しかし→ 時間あいまい
だから→ 思考実験



コペルニクス 地動説 16C前半
地球の回り方 同転円である
kepler（ケプラー）
⇓
隋円である

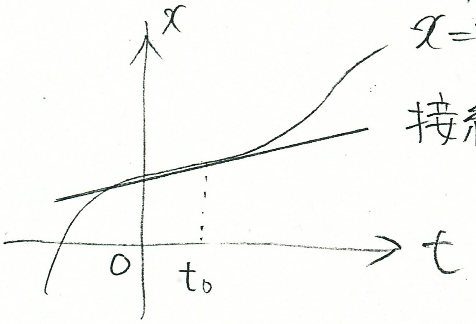


地について → ニュートンにつながる ← 天について
⇓
同じではないか？ 天＝地
⇓
重力が働いてるのでは。
⇓
瞬間の速さがわからなければならない
⇓
微分誕生

ニュートン
力学 の祖
微積分 の祖

実はロケットを飛ばす理論はできていた
が→ 技術不足

直線上の運動



曲線
$x=f(t)$

接線の傾き(=瞬間の速さ)

極限 ⇒ 微分

$$\boxed{f'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}}$$

平均の速さ ⇒ 19C以降に発見

↳ 曲線 → 接線

18C Eular(オイラー)
Lagrange
(ラグランジェ)

では その前は…

$$f(t_0+h)-f(t_0) \fallingdotseq f'(t_0)$$

$$\boxed{f(t_0+h)-f(t_0) \fallingdotseq f'(t_0)h}$$

一般に不正立

「巾零無限小」(べきれいむげんしょう)

hが十分小さければこの式は成り立つ

↳ どのくらい? $h^2=0$

インタビュアー「0しかないと思いますが…」

$$D=\{d\in\mathbb{R}\mid d^2=0\}=\{0\}$$

$\mathbb{R}$ ↓ 実数全体

ニュートン「ライプニッツ・・・(ノーコメント)」

産業革命 → 要 大量の技術者 → 数学者が著しく増加 → 能力がピンキリに…

↳ 要 数 物 → 要 大量の指導者

クリエイティブな人のコタエ

$$0=\{1+[(-1)\}+\{1]+[(-1)\}+\{1]+[(-1)\}+\cdots=1$$

「神は無から全てを作った」by 聖書

ありえません.

クリエイティブ「オレは聖書を証明したぜッ!」

Kock-Lawvereの公理

$$(\exists! a\in\mathbb{R})(\forall d\in D)(f(d)=f(0)+\underline{a}d)$$

$$d\in D\longmapsto g(x_0+d)\in\mathbb{R}$$

$$g(x_0+d)=g(x_0)+\underbrace{a}_{g'(x_0)}d$$

Leibnizの公式 天才!

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

アタマのイイ高校教師の証明

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

同じのを
足して引いた.

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h)\} + \{f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\,g(x_0+h) + \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}\,f(x_0)$$

$$\downarrow f'(x_0) \qquad \downarrow g(x_0) \qquad \downarrow g'(x_0) \qquad \downarrow f(x_0)$$

$$= f'g + fg'$$

⇩ライプニッツは↑のようにしなかった

オジサンでもできる証明

$$f(x_0+d) = f(x_0) + f'(x_0)d \quad (\forall d \in D)$$

$$f(x_0+d)g(x_0+d) = \{f(x_0) + f'(x_0)d\}\{g(x_0) + g'(x_0)d\}$$

$$= f(x_0)g(x_0) + \{f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\}d + f'(x_0)g'(x_0)\underbrace{d^2}_{=0}$$

$h^2 = 0$のハナシ

$D = \{0\}$ ―霊視→ $D \neq \{0\}$

ニュートン
ライプニッツ
↓
霊視
直感

この世　あの世

ニュートン・ライプニッツ → ~~正当化~~

20C半ば → 正当化　ガビーン

メンデル
19C半ば

遺伝子発見 → 相手にされず…
(実物ナシ)

今日の名文 Part 2

$\boxed{\text{いつか私の時代が来る。}}$

その後
ホントに時代が
やってきた.

合成関数の微分

$$(g\circ f)(x_0)=g(f(x_0))$$

例
$$f(x)=2x-1$$
$$g(t)=t^2=(2x-1)^2$$

$$(g\circ f)(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(f(x_0))}{h}$$

同じのをかけてわった。

例 $g(x)=(2x-1)^2$
$g'(x)=2(2x-1)\times(2x-1)'$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{f(x_0+h)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

0になるとは言ってはいけない

$$g'(f(x_0))\times f'(x_0)$$

例
$f(x)=\sin x$
$f(x+h)=\sin(x+h)$
$h=2\pi$のとき $\sin(x+h)-\sin x=0$ ‼

$$g(f(x_0+d))$$
$$=g(f(x_0)+\underbrace{f'(x_0)d}_{d'})$$
$$=g(f(x_0))+g'(f(x_0))d'$$

具体例) • $f(x)=C$(定数)

$f(x_0+d)-f(x_0)=0=0\cdot d$ → $f'(x_0)=0$

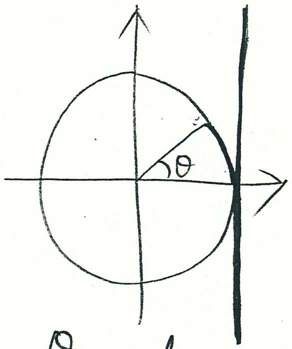
• $f(x)=x$

$f(x_0+d)-f(x_0)=(x_0+d)-x_0=d=1d$ → $f'(x_0)=1$

• $f(x)=x^2$

$f(x_0+d)-f(x_0)=(x_0+d)^2-x_0^2$
$=x_0^2+2x_0d+d^2-x_0^2$ ($d^2 \approx 0$ またまた登場)
$=2x_0d$ → $f'(x_0)=2x$

三角関数の微分



$\theta = d$

θが非常に小さいとき

$\cos\theta = 1$

$\sin\theta = d$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$d^2 + 1^2 = 1$

$d^2 \to 0$　で成り立ってしまう

$$\sin(x+d) = \sin x \underbrace{\cos d}_{} + \cos x \underbrace{\sin d}_{d}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$\cos(x+d) = \cos x \cos d - \sin x \underbrace{\sin d}_{d}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$\tan(x+d) = \frac{\tan x + \tan d}{1 - \tan x \tan d} \qquad \tan d = d$$

$$= \frac{\tan x + d}{1 - d\tan x}$$

$$= \frac{(\tan x + d)(1 + d\tan x)}{(1 - d\tan x)(1 + d\tan x)}$$

$$= \frac{\tan x + d\tan^2 x + d}{1}$$

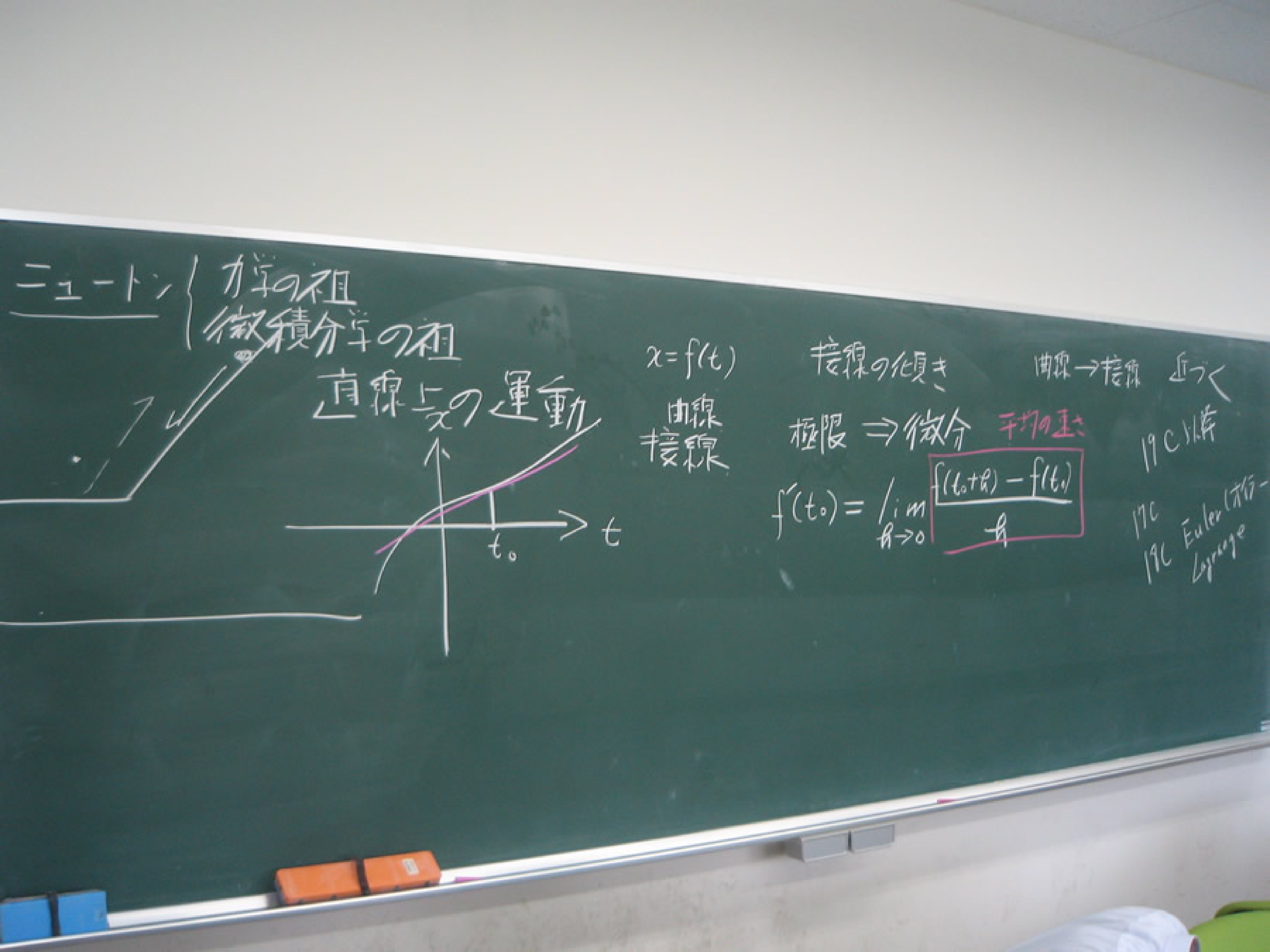
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \tan x + d(\tan^2 x + 1)$$

$$= \tan x + d\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

瞬間の速さ
200km
5km
120時
195km
2
近代の
夜明け
大御所
Newton (ニュートン)
Leibniz (ライプニッツ)
力学
重力
理論
思考実験
キリスト教
17C
天
地
俗
軌道
16C前半
コペルニクス
地動説
楕円
円
動力因
周転円
1
1000
誤差
ガリレオ
チコ・ブラーエ
kepler (ケプラー
太陽


ニュートン
力学の祖
微積分学の祖
直線上での運動
t
t_0
$x=f(t)$
曲線
接線
接線の傾き
極限 ⇒ 微分
平均の速さ
$f'(t_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$
曲線→接線 近づく
19C以降
17C
Euler(オイラー)
18C
Lagrange

$$\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} = f'(t_0)$$

$$\boxed{f(t_0+h)-f(t_0) = f'(t_0)h}$$

一般に不成立

hが十分小さければこの式は成立つ

どのくらい小さければいいか？

$h = 0$

$D = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0 \} = \{0\}$

冪零無限小

無

聖書

$0 = \{1+(-1)\}+\{1+(-1)\}+\{1+(-1)\}+\cdots = 1+\{(-1)+1\}+\{(-1)+1\}+\cdots = 1$

産業革命

普及

大量の技術

物理 数学

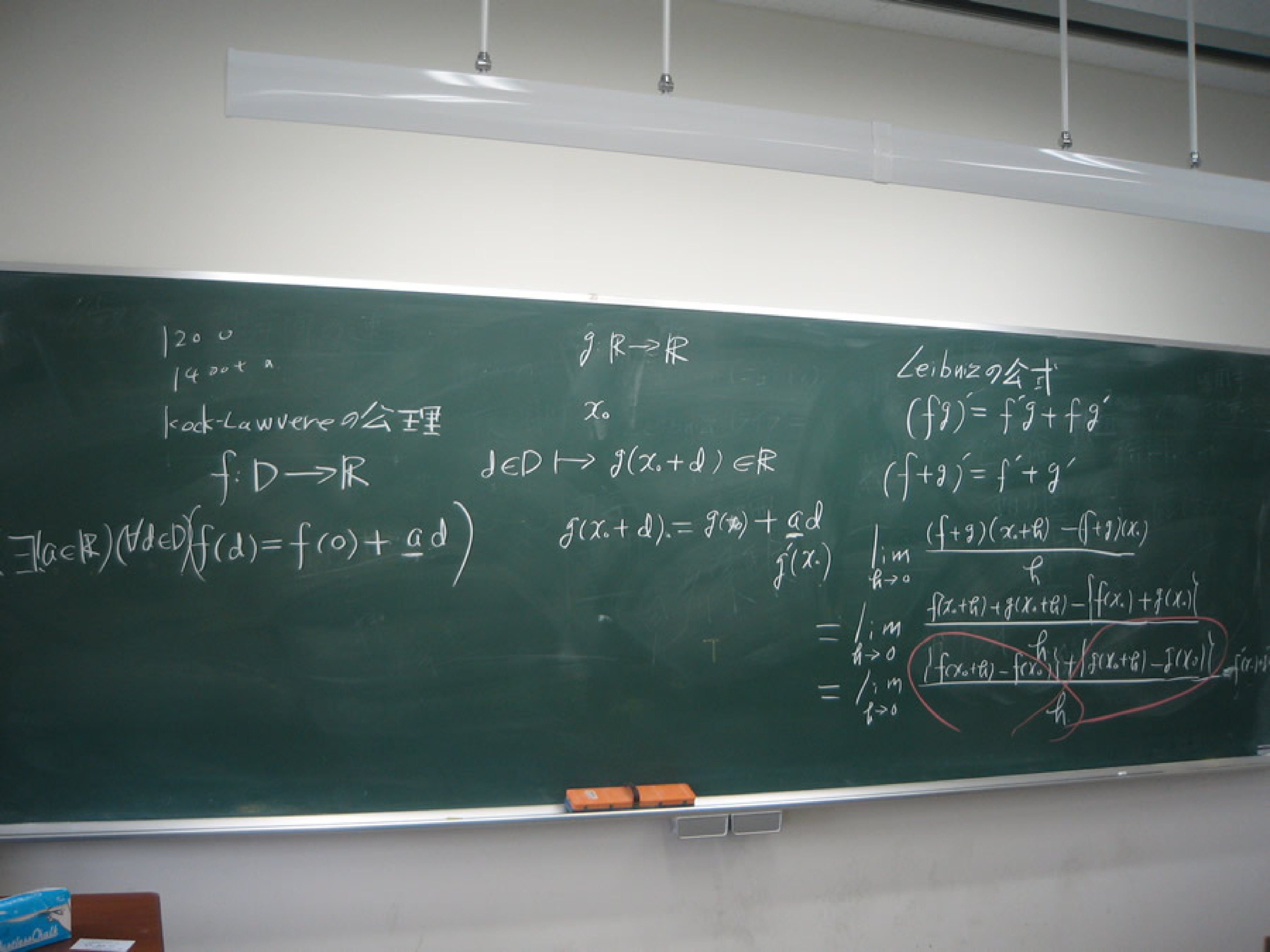
爆発化

数語の数が

激しく増える

大学

manual



Kock-Lawvereの公理
$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$
$\exists!(a \in \mathbb{R})(\forall d \in D)(f(d) = f(0) + \underline{a}d)$
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
x_0
$d \in D \mapsto g(x_0 + d) \in \mathbb{R}$
$g(x_0 + d) = g(x_0) + \underset{g'(x_0)}{\underline{a}}d$
Leibnizの公式
$(fg)' = f'g + fg'$
$(f+g)' = f' + g'$
$\lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h}$
$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - \{f(x_0) + g(x_0)\}}{h}$
$= \lim_{h \to 0} \frac{\{f(x_0+h) - f(x_0)\} + \{g(x_0+h) - g(x_0)\}}{h}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$$ 天才

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)\}+\{f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)}\underbrace{g(x_0+h)}_{g(x_0)}+\lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}_{g'(x_0)}f(x_0)$$

$$f(x_0+d)=f(x_0)+f'(x_0)d \quad (\forall d\in D) \quad A$$

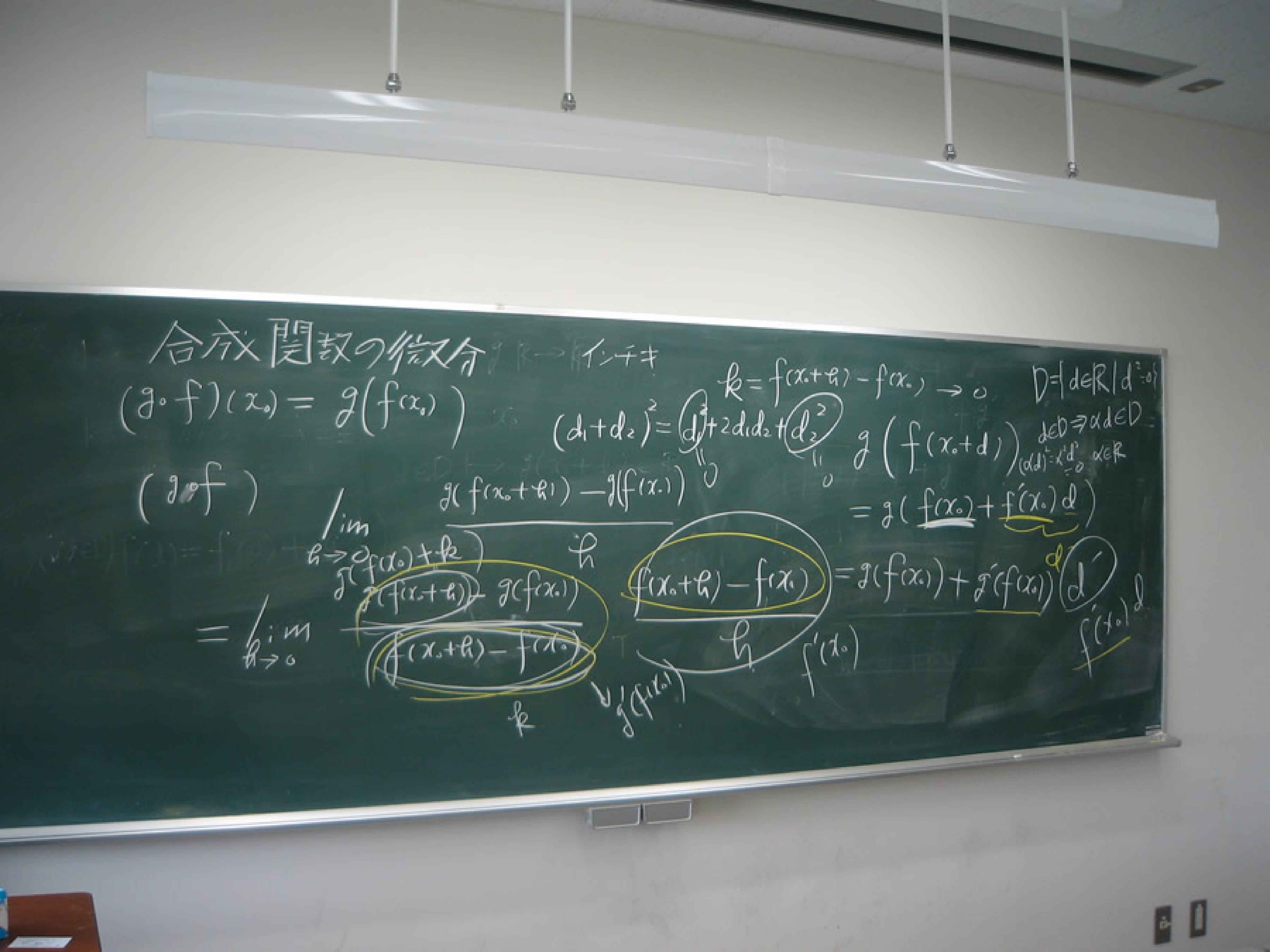
for all

$$f(x_0+d)g(x_0+d)=\{f(x_0)+f'(x_0)d\}\{g(x_0)+g'(x_0)d\}$$

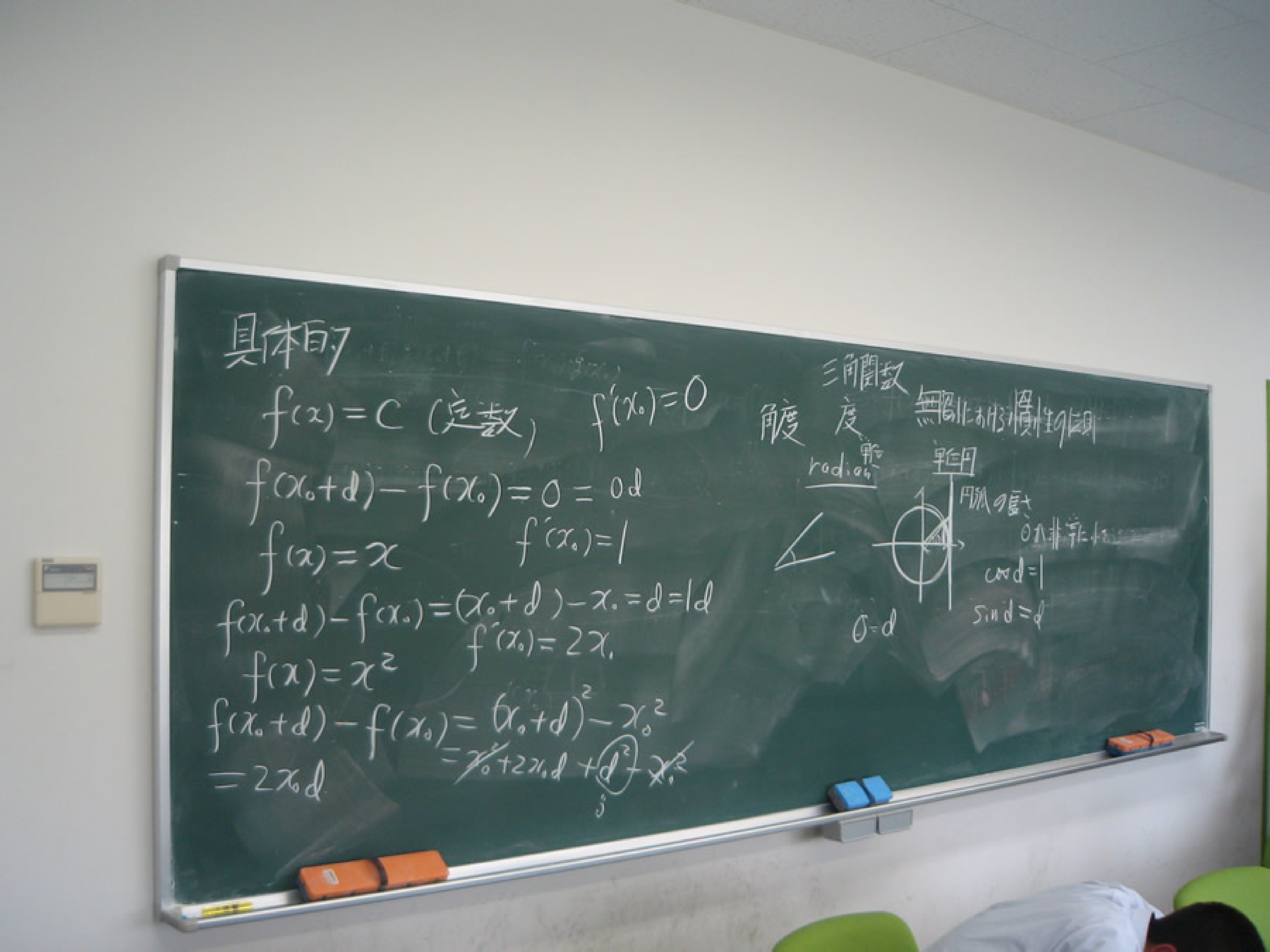
$$=f(x_0)g(x_0)+\{f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)\}d$$

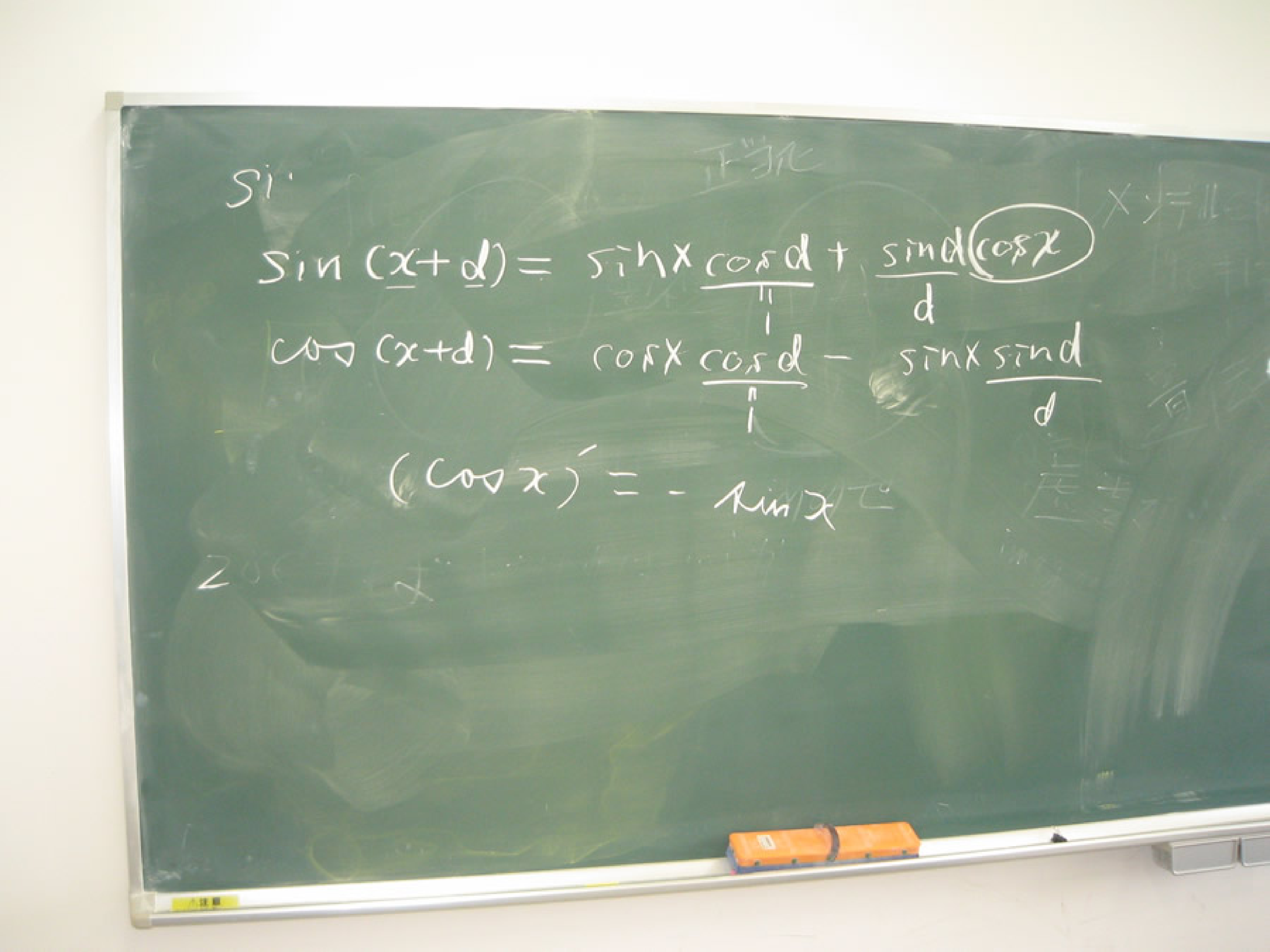
ただのオマケ $+f'(x_0)g'(x_0)\underbrace{d^2}_{=0}$


正当化
D={0}
霊視
D≠{0}
この世
あの世
c半ば
メンデル
19c半ば
遺伝子
メンデレーエフ
周期表
化学
sense
元素
予測
現象論
imaginary



合成関数の微分
インチキ
(g∘f)(x₀) = g(f(x₀))
k = f(x₀+h) − f(x₀) → 0
D = {d∈R | d² = 0}
(d₁+d₂)² = d₁² + 2d₁d₂ + d₂²
d∈D ⇒ αd∈D
g(f(x₀+d))
= g(f(x₀) + f′(x₀)d)
= g(f(x₀)) + g′(f(x₀)) f′(x₀)d
lim h→0 (g(f(x₀+h)) − g(f(x₀)))/h
= lim h→0 (g(f(x₀+h)) − g(f(x₀)))/(f(x₀+h) − f(x₀)) · (f(x₀+h) − f(x₀))/h
g′(f(x₀))
f′(x₀)


具体例
f(x) = C (定数)
f'(x₀) = 0
f(x₀+d) − f(x₀) = 0 = 0d
f(x) = x
f'(x₀) = 1
f(x₀+d) − f(x₀) = (x₀+d) − x₀ = d = 1d
f'(x₀) = 2x₀
f(x) = x²
f(x₀+d) − f(x₀) = (x₀+d)² − x₀²
= x₀² + 2x₀d + d² − x₀²
= 2x₀d
三角関数
角度
radian
単位円
円弧の長さ
cos d = 1
sin d = d
θ = d


$\sin(x+d) = \sin x \cos d + \sin d \cos x$
$\cos d = 1$, $\sin d = d$
$\cos(x+d) = \cos x \cos d - \sin x \sin d$
$\cos d = 1$, $\sin d = d$
$(\cos x)' = -\sin x$