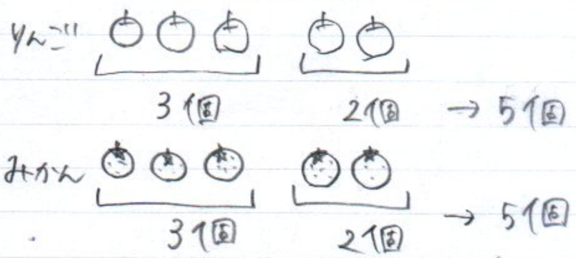
基礎数学ノート

ノート：鈴木

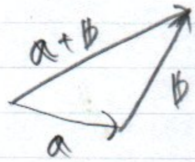
2008/06/13　出席者 80人

抽象化（数学では 公理化）

数の概念



平面ベクトル



足し算

スカラー倍

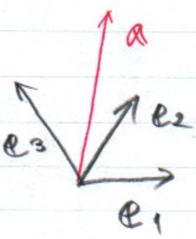
λ：実数

$$a+b=b+a$$
$$a+(b+c)=(a+b)+c$$
$$a+0=a$$
$$(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$$
$$(\lambda\mu)a=\lambda(\mu a)$$
$$1a=a$$

ベクトル空間
線形空間

足し算
スカラー倍 が定義され、
上のような法則満たす

ベクトル空間の大きさ



自由度が2

$$a=\lambda e_1+\mu e_2$$

次元
基底の数は一定

$$a=\lambda e_1+\mu e_2+\eta e_3$$ 一意的

V, W：2つの線形空間

φ：$V \longrightarrow W$　線形写像　線形構造を保つ（足し算、スカラー倍）

$$\begin{cases} \varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y) \\ \varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x) \end{cases}$$

□が成り立つ（定義）

VからWへの線形写像の全体
… 線形空間

$$(\varphi+\psi)(x)=\varphi(x)+\psi(x)$$
$$(\lambda\varphi)(x)=\lambda\varphi(x)$$

思考実験

線形写像ではない　3人の人の集合　対応関係

0でなかったら何でもいい

$a \in \mathbb{R}$（実数の全体）

足し算　1次元の線形空間

λa　　$a = a\,1$
基底

写像 = 関数

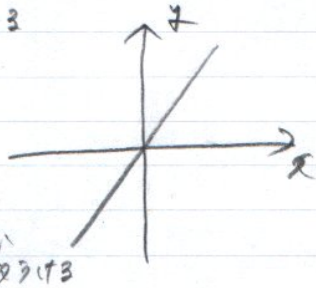
$W = V = \mathbb{R}$

1というベクトルのスカラー（x）倍

$y = \varphi(x)$
$= \varphi(x1)$
$= x\varphi(1)$　数 a

傾き
$y = ax$　原点を通る直線

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の線形写像



$\cancel{y = x^2}$
$\cancel{y = \sin x}$　線形写像でない　すごい制約うける

傾きを決めれば線形写像が1つ決まる

$\varphi(x) = ax \quad \psi(x) = bx$

$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) = ax + bx = (a+b)x$

$(\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x) = \lambda ax = (\lambda a)x$

2次の交代形式

yを固定… $V_1 \to W$
x 〃 $V_2 \to W$

写像 $V_1 \times V_2 \longrightarrow W$

$\varphi(x, y)$　二重線形性

$\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$　交代性

$\varphi(1,1) = -\varphi(1,1)$
$2\varphi(1,1) = 0$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$　0次元

$\varphi(x, y) = \varphi(x1, y1)$
x固定→ $= x\varphi(1, y1)$
y 〃→ $= xy\underbrace{\varphi(1,1)}_{=0}$

No.

Date

$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ 線形写像　　　$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$　$e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

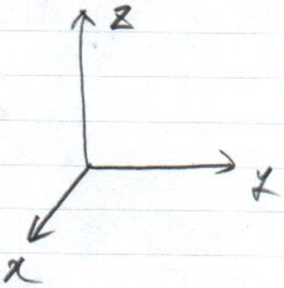
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = xe_1 + ye_2$

$$z = \varphi\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \varphi(xe_1 + ye_2)$$

$$= x\varphi(e_1) + y\varphi(e_2)$$

$\boxed{\begin{aligned}\varphi(e_1) &= a\\ \varphi(e_2) &= b\\ &\text{とおく}\end{aligned}}$ $\rightarrow$ $= ax + by$

原点を通るような平面



$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ 交代形式　　　$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$　$e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} = x_1e_1 + y_1e_2$

$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} = x_2e_1 + y_2e_2$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)$$

$$= \varphi(x_1e_1 + y_1e_2,\ x_2e_1 + y_2e_2)$$

$$= x_1x_2\underbrace{\varphi(e_1, e_1)}_{=0} + x_1y_2\varphi(e_1, e_2) + y_1x_2\varphi(e_2, e_1) + y_1y_2\underbrace{\varphi(e_2, e_2)}_{=0}$$

$$= \underline{(x_1y_2 - y_1x_2)}\,\underbrace{\varphi(e_1, e_2)}_{a\,(\text{定数})}$$

← 基底

行列式という関数のスカラー倍

$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$

⇓

自由度は 1

⇓

1次元

$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ 線形写像　　　3次元

$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$　$e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$　$e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$W = \varphi\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \varphi(xe_1 + ye_2 + ze_3)$$

$$= x\underbrace{\varphi(e_1)}_{a} + y\underbrace{\varphi(e_2)}_{b} + z\underbrace{\varphi(e_3)}_{c}$$

$$= ax + by + cz$$

1次関数

$\boldsymbol{x} \to dx$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に関して x を対応させる関数を dx とする

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto x \qquad dx$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto y \qquad dy$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto z \qquad dz$

a と b と c をどう決めるか

↓

自由度 3

↓

3次元

$\varphi = a\,dx + b\,dy + c\,dz$

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ 交代形式

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \varphi(\underbrace{x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3}_{3}, \underbrace{y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3}_{3})$$

($3 \times 3 = 9$ 個 $(\varphi(e_1 e_1) = 0,\ \varphi(e_2 e_2) = 0,\ \varphi(e_3, e_3) = 0)$

↓

本当は 6 個 $\qquad \varphi(e_1, e_2)$

$\varphi(e_2, e_1) = -\varphi(e_1, e_2)$)

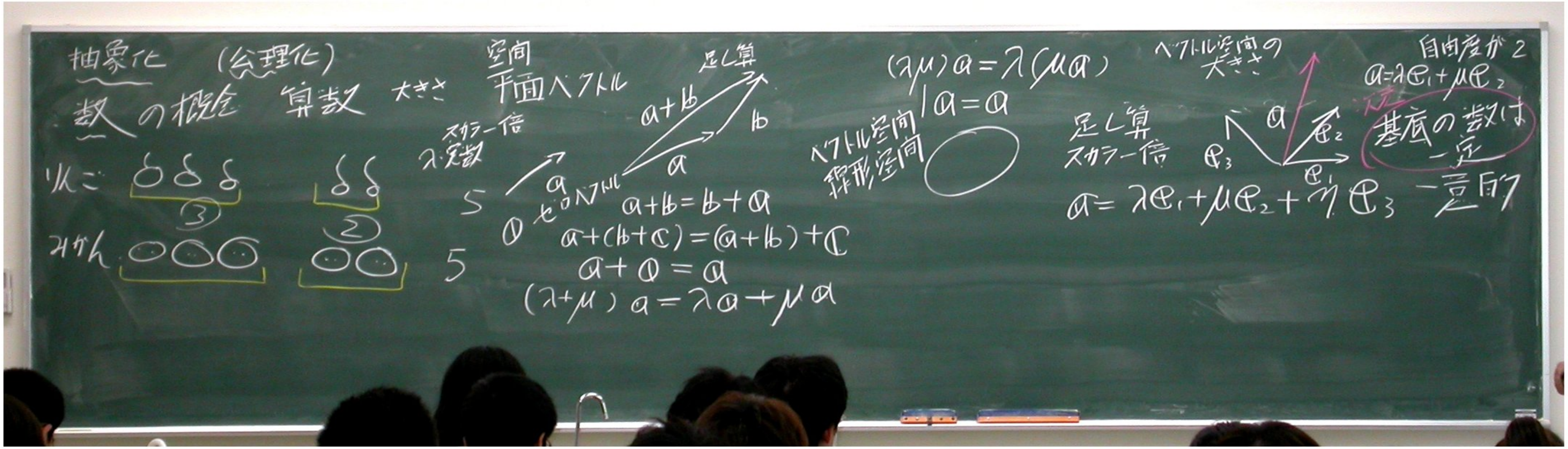
$$= x_1 y_2 \varphi(e_1, e_2) + x_2 y_1 \varphi(e_2, e_1) + x_2 y_3 \varphi(e_2, e_3) + x_3 y_2 \varphi(e_3, e_2) + x_3 y_1 \varphi(e_3, e_1) + x_1 y_3 \varphi(e_1, e_3)$$

$$= (x_1 y_2 - x_2 y_1)\varphi(e_1, e_2) \quad a$$
$$+ (x_2 y_3 - x_3 y_2)\varphi(e_2, e_3) \quad b$$
$$+ (x_3 y_1 - x_1 y_3)\varphi(e_3, e_1) \quad c$$

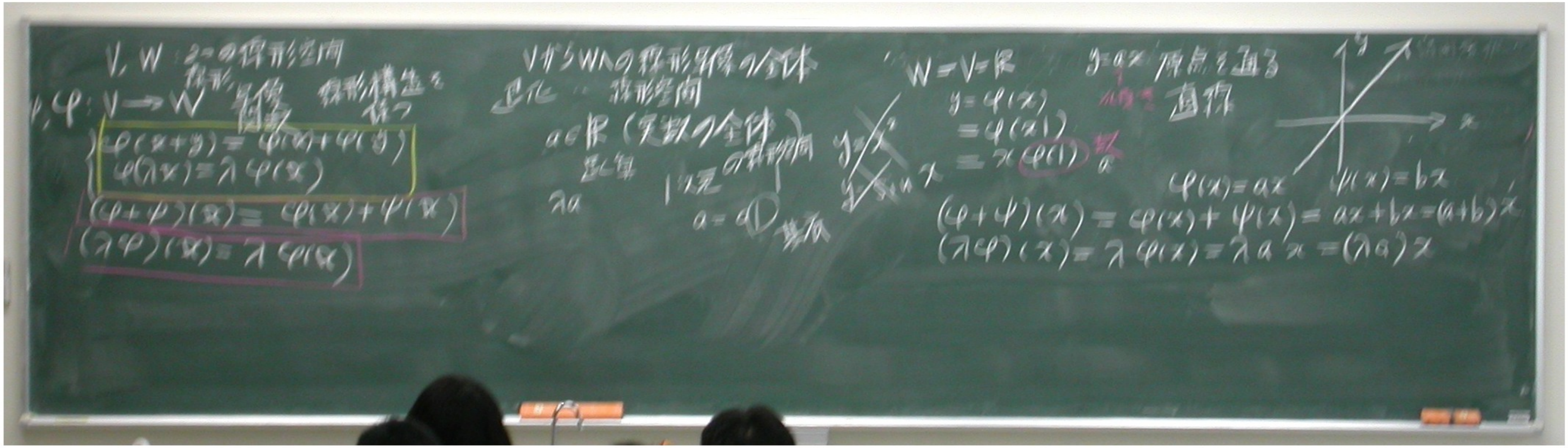
$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$

→ 3次元

$dx(\boldsymbol{x})dy(\boldsymbol{y}) - dy(\boldsymbol{x})dx(\boldsymbol{y})$



抽象化 (公理化)
数の概念 算数 大きさ
空間
平面ベクトル
足し算
スカラー倍
λ:実数
りんご ③
みかん ②
5
5
ゼロベクトル
a+b=b+a
a+(b+c)=(a+b)+c
a+0=a
(λ+μ)a=λa+μa
(λμ)a=λ(μa)
1a=a
ベクトル空間
線形空間
ベクトル空間の大きさ
足し算
スカラー倍
自由度が2
a=λe1+μe2
基底の数は一定
a=λe1+μe2+νe3
一意的


V, W：2つの線形空間
ψ, φ : V → W 線形写像
φ(x+y) = φ(x)+φ(y)
φ(λx) = λφ(x)
(φ+ψ)(x) = φ(x)+ψ(x)
(λφ)(x) = λφ(x)
VからWへの線形写像の全体
線形空間
a∈R (実数の全体)
λa
1次元の線形空間
a = φ(1)
基底
W = V = R
y = φ(x)
= φ(x1)
= xφ(1)
y = ax 原点を通る
直線
φ(x) = ax
ψ(x) = bx
(φ+ψ)(x) = φ(x)+ψ(x) = ax+bx = (a+b)x
(λφ)(x) = λφ(x) = λax = (λa)x

2次の交代形式 $\varphi(1,1) = -\varphi(1,1)$

$2\varphi(1,1) = 0$

写像 $V_1 \times V_2 \longrightarrow W$

$\varphi(x, y)$ 二重線形性

$\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$ 交代性

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 0次元 $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ 線形写像

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \varphi(x1, y1)\\ &= x\varphi(1, y1)\\ &= xy\underbrace{\varphi(1,1)}_{=0}\end{aligned}$$

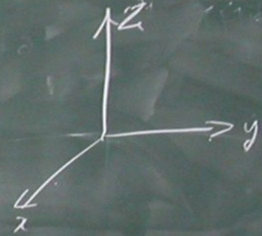
$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$

$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\varphi\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) &= \varphi(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2)\\ &= x\varphi(\mathbf{e}_1) + y\varphi(\mathbf{e}_2)\\ &= ax + by\end{aligned}$$

$\varphi(\mathbf{e}_1) = a$

$\varphi(\mathbf{e}_2) = b$



$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 交代形式

$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{e}_1 + y_1 \mathbf{e}_2$

$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_2 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \varphi(x_1 \mathbf{e}_1 + y_1 \mathbf{e}_2,\ x_2 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2)$$

$$= x_1 x_2 \underbrace{\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)}_{0} + x_1 y_2 \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + y_1 x_2 \varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + y_1 y_2 \underbrace{\varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)}_{0}$$

$$= (x_1 y_2 - y_1 x_2) \underbrace{\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)}_{a\ (定数)}$$

1次元

$$\left| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right|$$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 線形写像 3次元

$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$w = \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \varphi(x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3)$$

$$= x \underbrace{\varphi(\mathbf{e}_1)}_{a} + y \underbrace{\varphi(\mathbf{e}_2)}_{b} + z \underbrace{\varphi(\mathbf{e}_3)}_{c}$$

$$= ax + by + cz$$ 1次関数

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x$ dx

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto y$ dy

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto z$ dz

$\varphi = a\,dx + b\,dy + c\,dz$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 交代形式

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ $\quad 3 \times 3 = 9$ 本当は6

$\varphi(e_1, e_1) = 0$

$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \quad = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$

$$\varphi(x, y) = \varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,\ y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3)$$

$$= x_1 y_2 \varphi(e_1, e_2) + x_2 y_1 \varphi(e_2, e_1)$$
$$+ x_2 y_3 \varphi(e_2, e_3) + x_3 y_2 \varphi(e_3, e_2)$$

$\varphi(e_1, e_2)$

$\varphi(e_2, e_1) = -\varphi(e_1, e_2)$

3次元

$$= x_3 y_1 \varphi(e_3, e_1) + x_1 y_3 \varphi(e_1, e_3)$$
$$= \boxed{(x_1 y_2 - x_2 y_1)} \varphi(e_1, e_2) \quad a$$
$$+ (x_2 y_3 - x_3 y_2) \varphi(e_2, e_3) \quad b$$
$$+ (x_3 y_1 - x_1 y_3) \varphi(e_3, e_1) \quad c$$

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$dx(x)\, dy(y)$

$- dy(x)\, dx(y)$

9回目

西村先生・みなさま:

先週金曜(6/13)の4限、「基礎数学」(西村先生)の9回めを聴講しました。
出席者は、80名＋TA1名(桑田)＋教員1名(私)です。ちなみに昨年度の
「基礎数学」9回め講義の出席者は44名でした。

今回の内容は、前回の復習が中心でした。数学において抽象化(公理化)とは
どういうものか、という話から入って、
- 平面ベクトルの性質
- ベクトル空間の公理
- ベクトル空間の大きさ(基底と次元)
- 線型写像の定義
- RからRへの線型写像はy=ax。このとき、写像に和とスカラー倍を
  定義すると、RからRへの線型写像の作る空間は線型空間になる。
- 2次の交代形式:V×VからWへの写像で、二重線形性と交代性を満たすもの。
- R×RからRへの交代形式は0のみ。これは0次元の線型空間。
- R^2×R^2からRへの交代形式は、行列式のスカラー倍。これは1次元の線型空間。
- R^3×R^3からRへの交代形式は、x1y2-x2y1, x2y3-x3y2, x3y1-x1y3という3つの
  基底で表されるから(これらがwedge product)、3次元の線型空間。

などでした。話のロジックの流れをひとつづつ関連させながらフォローする
ことができていない学生がいます。彼らは、数学の論理の積み重ねの「空気」
が読めていません。定義や公理のシリアスさがわかっていません。漠然とした
態度で数学を「お話」として概要的に聞いているのかもしれません。

写像や集合という概念も、漠然としか捉えていない学生が多いです。漠然は
数学の敵である、という認識を、持たせることが必要かと思います。

板書された式のひとつひとつの由来や互いの関連、つまり体系性が、伝わって
いません。例えば、線型写像の定義は、板書されたにもかかわらず、それが
線型写像の定義である、ということを認識できない学生がいます。板書にも
体系性がわかるようなコメントを記入することが必要ではないでしょうか。
例えば定義や公理を板書されたら、それが定義や公理であることを口頭で説明
するだけではなく、それが定義や公理である、ということまで、explicitに
板書してあげる必要があると思います。彼らは極端に板書を重視します。
板書は懸命にノートしますが、口頭での説明の間は、居眠りをはじめます。
板書はノートして見直しますが、口頭で話されたことはほとんどノートせず、
すぐに忘れてしまいます。そういう学生が質問に来ると、西村先生は大事な
ことは口頭で力説されて板書されないことがあるので、話をよく聞いて、
板書されないこともノートしなさい、と指導しています。

--
奈佐原　顕郎 （旧姓西田）
筑波大学農林工学系
〒305-8572　つくば市天王台1-1-1