

微分

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R} \quad d_1, d_2 \in D$$

$$f(x+d_1) = f(x) + f'(x)d_1$$

(Kock-Lawvere の公理)

$$\star f(x, +d_1+d_2) = f(x+d_1) + f'(x+d_1)d_2$$

$$= \{f(x) + f'(x)d_1\} + \{f'(x) + f''(x)d_1\}d_2$$

$$= f(x) + f'(x)(d_1+d_2) + f''(x)d_1d_2$$

$$= f(x) + f'(x)(d_1+d_2) + \frac{f''(x)}{2}(d_1+d_2)^2$$



$$d_1, d_2 \in D = D_1 \Rightarrow d_1+d_2 \in D_2$$

$$d_1d_2 = \frac{(d_1+d_2)^2}{2}, \quad d = d_1+d_2$$

$$= f(x) + f'(x)d + \frac{f''(x)}{2}d^2$$

$$f(d) = f(0) + f'(0)d + \frac{f''(0)}{2}d^2$$

(1次式)

Taylor

$$d \in D_2$$

Taylor

$$f(d) = f(0) + f'(0)d + \frac{f''(0)}{2}d^2 \quad (2次式)$$

(170-42)

$$d \in D_2$$

$$f(d) = f(0) + f'(0)d + \frac{f''(0)}{2}d^2 + \frac{f'''(0)}{3!}d^3 \quad (3次式)$$

$$\star \quad d_1, d_2, d_3 \in D$$

$$f(x+x_1+x_2+x_3) = f(x+x_1+x_2) + f'(x+x_1+x_2) d_3 + \dots$$

$$= f(x) + f'(x)(d_1+d_2) + f''(x)d_1d_2 + \{f'(x)+f''(x)(d_1+d_2) + f'''(x)d_1d_2\}d_3$$

$$= f(x) + f'(x)(d_1+d_2+d_3) + f''(x)(d_1d_2+d_1d_3+d_2d_3) + f'''(x)d_1d_2d_3$$

$$\left( \begin{array}{l} d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3 = \frac{(d_1+d_2+d_3)^2}{2} \\ d_1d_2d_3 = \frac{(d_1+d_2+d_3)^3}{6} \end{array} \right)$$

$$= f(x) + f'(x)(d_1+d_2+d_3) + f''(x) \frac{(d_1+d_2+d_3)^2}{2} + f'''(x) \frac{(d_1+d_2+d_3)^3}{6}$$

$$\star \quad \because d_1+d_2+d_3 = d \in D_3 \text{ とおくと}$$

$$= f(x) + f'(x)d + \frac{f''(x)}{2}d^2 + \frac{f'''(x)}{3!}d^3$$

## 多項式の微分

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (\text{n次多項式})$$

$$a_0 = f(0)$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}$$

$$a_1 = f'(0)$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

$$a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$$

$$a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!}$$

$$d \in D = D_1, n=1$$

$$\bullet f(d) = a_0 + a_1d = f(0) + f'(0)d \quad (\text{1次式})$$

$$d \in D_2, n=2$$

$$\bullet f(d) = f(0) + f'(0)d + \frac{f''(0)}{2}d^2 \quad (\text{2次式})$$

$$d \in D_3, n=3$$

$$\bullet f(d) = f(0) + f'(0)d + \frac{f''(0)}{2}d^2 + \frac{f'''(0)}{3!}d^3 \quad (\text{3次式})$$

Taylor

展開

(270-1)

## report V

$$f(x+d) = f(x) + f'(x)d + \frac{f''(x)}{2}d^2 + \frac{f'''(x)}{3!}d^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}d^n$$

数学的帰納法により証明する。

$$\text{整関数} \begin{cases} \cos x \\ \sin x \\ e^x \end{cases}$$



多項式ではない! 無限に微分できる  
(無限次の多項式)

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots$$

$$f(x) = e^x \text{ のとき}$$

$$\star e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$f(x) = \sin x \text{ のとき}$$

$$f'(x) = \cos x \quad f'(0) = 1$$

$$\star (5 \text{ 行目}) \quad f''(x) = -\sin x \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \quad f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \quad f^{(4)}(0) = 0$$

$$\star \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

奇数次の項(0, 2, 4, ...)!

$$f(x) = \cos x \text{ の } x \pm$$

同様に

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

← report

VI

証明終了!

今までは  $x$  を実数としていた。

↓

$x$  を複素数まで拡張する。

純虚数  $\dots ix$

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!}i + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$= \left\{ 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \right\} + i \left\{ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right\}$$

実数部分

虚数部分

↓

$\cos x$

↓

$\sin x$

$$= \cos x + i \sin x$$



オイラーの公式!

$$e^{i(x+y)}$$

$$= e^{ix+iy}$$

$$= \cos(x+y) + i \sin(x+y)$$

$$= \{\cos x + i \sin x\} \{\cos y + i \sin y\}$$

$$= \cos x \cos y + i \cos x \sin y + i \sin x \cos y - \sin x \sin y$$

$$= \{\cos x \cos y - \sin x \sin y\} + i \{\cos x \sin y + \sin x \cos y\}$$

$$= \cos(x+y) + i \sin(x+y)$$

## 4回目

西村先生・みなさま:

今日の4限、「基礎数学」(西村先生)の4回目を聴講しました。  
出席者は、**92名**+**TA1名**(桑田)+**教員1名**(私)です。ちなみに  
昨年度の「基礎数学」4回め講義の出席者は**46名**でした。

内容は、テーラー展開とオイラーの公式などです。

以下のレポート課題が出ました:

**V**  $n$ 次のテーラー展開の導出

**VI**  $\cos x$ のテーラー展開

教室は寿司詰めでしたが、居眠りや私語もほとんどなく、多くの  
学生が集中しているようでした。昨年度の受講生と思わしき学生も  
見かけられました。「リピーター」でしょうか?

また、西村先生の許可を頂いて、最後に授業アンケートをとりました。  
無記名の自由記述で、回答者数は**63名**です。コメントをざっくり  
まとめますと(重複含めて)、

- おもしろい、楽しい、驚いた、感動した、最高です、など: **21名**
- 次第にわかるようになってきた、など: **3名**
- わからない、さっぱりわからない、難しい、など: **8名**
- 板書が読みにくい(字が小さい、字が汚い、字の間隔が狭い、  
あちこちに飛ぶ、黒板を丁寧に消してほしい、前後の黒板  
を使うのはやめてほしい、など): **21名**
- **4/25**の授業がわからなかった: **2名**
- 三角関数と指数関数の関係がよくわからない: **2名**

その他、以下のようなコメントなどがありました(他にもいろいろ):

- 目的・定義を板書して欲しい。文章もまぜて板書してほしい。
- もうすこしゆっくりやってほしい
- テーラー展開が有限項に適用できるのはわかったが、すぐに  
 $e^x$ などに適用したのでとまどった。
- 脱線が好き
- 教室が狭い
- レポート課題が難しい。
- 数学わからなくても西村**world**を楽しんでいます。
- 「あの世」というのは「**about**の世界」ですか?

--

奈佐原 顕郎 (旧姓西田)  
筑波大学農林工学系

---

Copyright 2007, by the Contributing Authors.

4回目. (2008, June 02). Retrieved June 26, 2013, from 筑波大学 OCW Web site: <http://ocw.tsukuba.ac.jp/25a0-iv-2-751f72698cc76e905b66985e/57fa790e65705b66-1/456de76ee>.  
All Rights Reserved.