基礎数学

2009/03/06

前回のもう1回説明

Kock-Lawvere の公理

$D = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0 \}$

$f : D \to \mathbb{R}$ $\quad f(d) = f(0) + \underset{f'(0)}{?}\, d \quad (\forall d \in D)$

$f : D \to \mathbb{R}^n$

ただ1つ定まる

$$f(d) = \begin{pmatrix} f_1(d) \\ \vdots \\ f_n(d) \end{pmatrix}$$

$f_1 : D \to \mathbb{R}$

$\vdots$

$f_n : D \to \mathbb{R}$

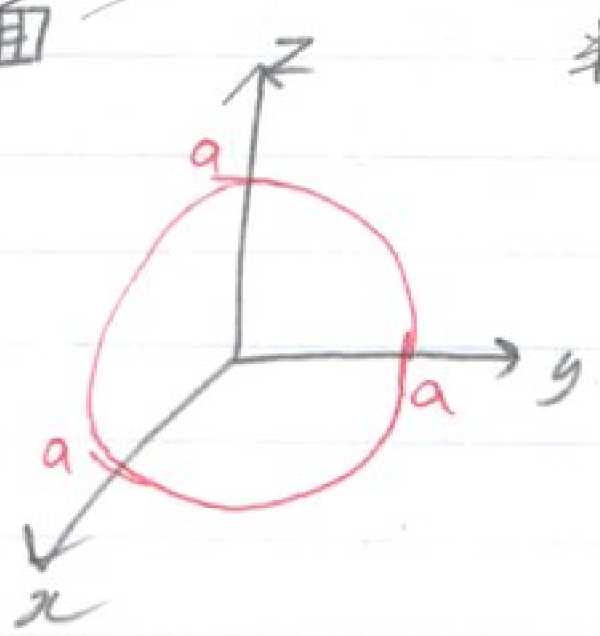
こういうことがいえる

$f(d) = f(0) + \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{f(0)}{?}}\, d$

曲面を考える

└ 曲面とは何か

例 球面 原点を中心として、半径 a



$\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \}$

局所的には平面

locally

平面だから、何か2つのパラメータで

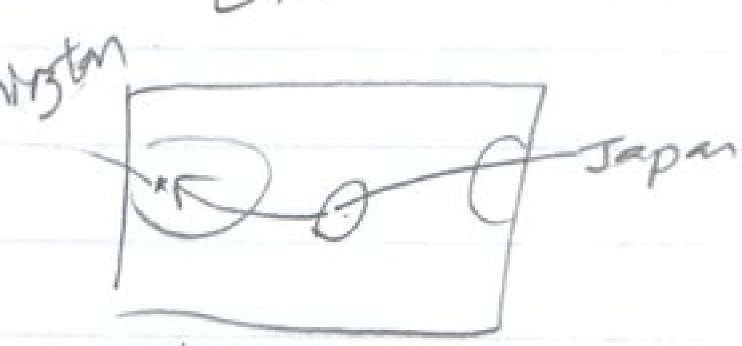
$\boxed{\text{座標がとれる.}}$

大域的 (globally) では

とれない ×

地図

└ 世界地図＝曲がったものを引き伸ばしている



└ 平面にしたから曲がっている

どこかxを固定する。

局所的にはパラメータがとれる。

$x \in M$ = 曲面

xにおけるMの接ベクトル

接ベクトルの定義 $= \ \gamma : D \longrightarrow M$
$\gamma(0) = x$

Dの中に x という点がある。

局所的には parameter がとれる

このxの十分近いところでは、何か二次元($\mathbb{R}^2$)的な部分集合があって、そことMのxの近くは対応している。

M

Mのxの近く

Dというパラメータに沿っている。

対応

部分集合 $\subset \mathbb{R}^2$

Mの近くでは座標がとれるから、

こういうベクトルがただ1つある。

(x, y)

$\exists!$

任意のd

$$\gamma(d) = \begin{pmatrix} x(d) \\ y(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} d \quad (\forall d \in D)$$

何かベクトル

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\gamma \longleftrightarrow a}$$

点xにおけるMの接ベクトル

2次の多ベクトル

線形構造が入っている

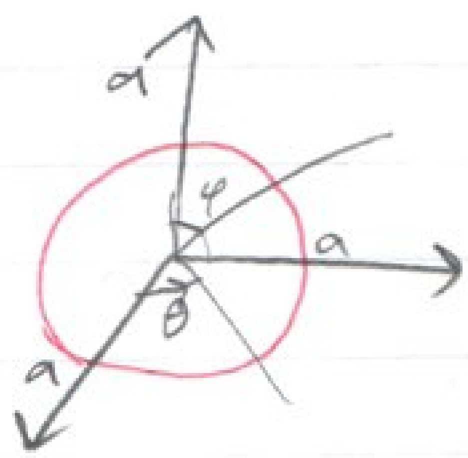
足し算とスカラー倍

こっちにもっていける。

一通りではない

色々な parameter のとり方がある.

↳ 球面の話しにもどると,



北極の近く (赤道から上) 上半

正射影をおろすと,

xy平面では xy座標で表せるし,

θとφの二つで表すことができる.

別の parameter $\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$ すると,

また別の構造が出てくるかもしれないから,

確認する必要がある.

x $\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ で表わされている.

この関数の微分

$$x = x(\xi, \eta) \qquad dx = \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta$$

$$y = y(\xi, \eta) \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta$$

$$a = \begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix} \begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta}\\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix} \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}}$$

線形変換でむすばれている.

M の x における接ベクトル空間

Maxwellの方程式

微分形式による定式化

$$
\begin{cases}
① \nabla \times \mathbb{E} + \dfrac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} = 0 \\
② \nabla \times \mathbb{H} - \dfrac{\partial \mathbb{D}}{\partial t} = \mathbb{J} \\
③ \nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \\
④ \nabla \cdot D = \rho
\end{cases}
$$

$\mathbb{E}$: 電解極度

$\mathbb{H}$: 磁界強度

$\mathbb{D}$: 電束密度

$\mathbb{B}$: 磁気誘導

$\mathbb{J}$: 電流密度

ρ : 電荷屋度

x, y, z, t — 時刻.

$\mathbb{E} = (E_1, E_2, E_3)$

$\mathbb{H} = (H_1, H_2, H_3)$

$$\omega_E = E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz$$

$$\omega_H = H_1 dx + H_2 dy + H_3 dz$$

$$\omega_D = D_1 dy \wedge dz + D_2 dz \wedge dx + D_3 dx \wedge dy$$

$$\omega_B = B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy$$

$$\omega_J = J_1 dy \wedge dz + J_2 dz \wedge dx + J_3 dx \wedge dy$$

$$\omega_\rho = \rho \, dx \wedge dy \wedge dz$$

2次の微分形式

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \omega_E \wedge dt + \omega_B \\
&= (E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz) \wedge dt + B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy \\
&= E_1 dx \wedge dt + E_2 dy \wedge dt + E_3 dz \wedge dt \\
&\quad + B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy
\end{aligned}
$$

ポートⅣ

さっきの α の式の
外微分を計算しておって,

$\boxed{d\alpha = 0}$ とおく

外微分

すると, $d\alpha = 0 \longleftrightarrow$ ①と③に対応している。

$\beta = -\omega_H \wedge dt + \omega_D$

$\gamma = \omega_J \wedge dt - \omega_P$

$\boxed{d\beta + \gamma = 0} \Longleftrightarrow$ ②と④が出てくる
対応

ゆっくりくつろいで解く :)

レポート 9日まで

3月13日
3月7日
fax 029-853-6501
(共用)
西村
Kock-Lawvereの公理
R
D = { d∈R | d² = 0 }
f : D → R
f : D → Rⁿ
f(d) = (f₁(d), …, fₙ(d))
f₁ : D → R
fₙ : D → R
f′(0)
f(d) = f(0) + ? d (∀d∈D)
f(d) = f(0) + ? d
f′(0)
Rⁿ
z
y
x
a
曲面とは何か？
球面 原点中心 半径 a
{ (x, y, z) ∈ R³ | x² + y² + z² = a² }
局所的には 平面
locally
座標がとれる
大域的 (parameter)
globally
地図帳
China
London
Washington

3月13日

3月9日 //

fax 029-853-6501 //

(共用)

西村

Kock-Lawvereの公理

$$0 \in D = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0 \}$$

$$f : D \to \mathbb{R}$$

$$f : D \to \mathbb{R}^n$$

$$f(d) = \begin{pmatrix} f_1(d) \\ \vdots \\ f_n(d) \end{pmatrix}$$

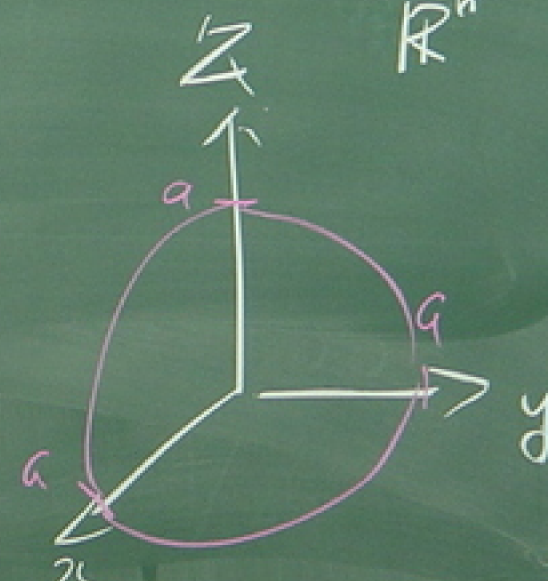
$$f_1 : D \to \mathbb{R}$$

$$\vdots$$

$$f_n : D \to \mathbb{R}$$

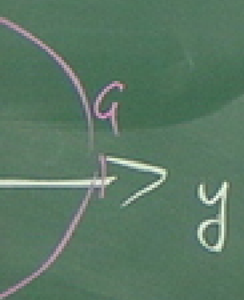
$$f(d) = f(0) + \underset{f'(0)}{?}\, d \quad (\forall d \in D)$$

$$f(d) = f(0) + \overset{f'(0)}{\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{?}}}\, d$$



$\{(x, y,$

$f(0)$
? d
$\cap$
$\mathbb{R}^n$



曲面とは何か？

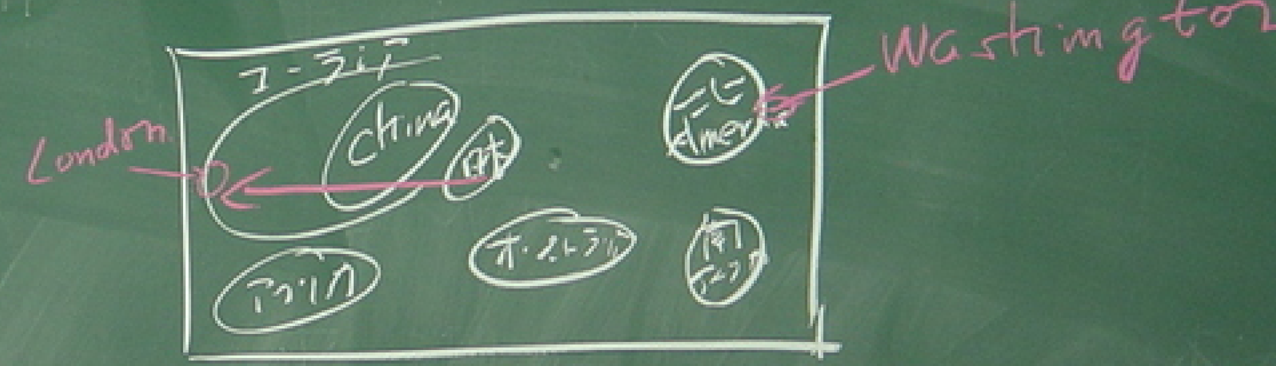
球面 原点中心
半径 a

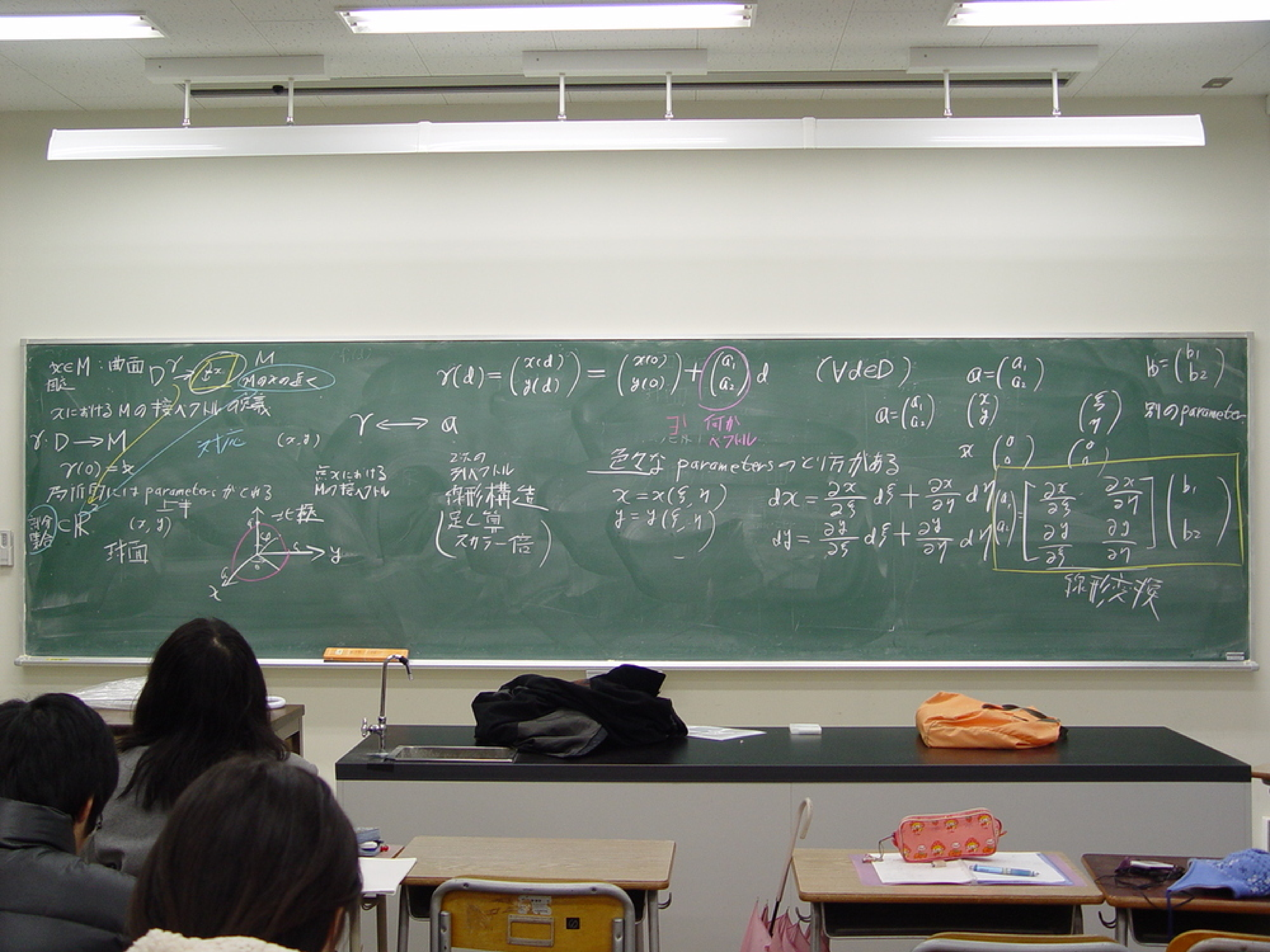
$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=a^2\}$$

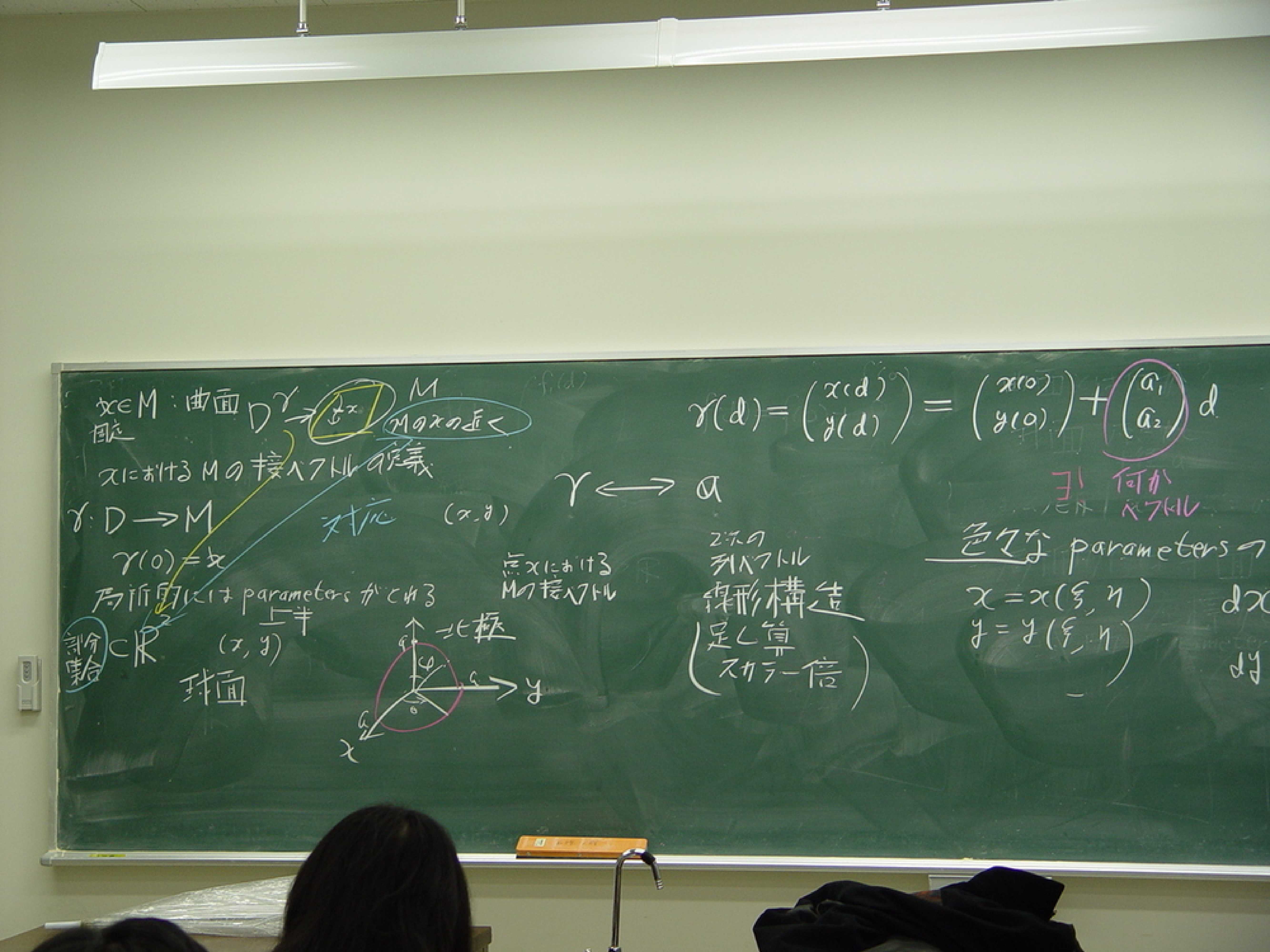
局所的には平面
locally
座標がとれる

大域的 (parameter)
globally

地図帳




x∈M : 曲面
x∈M : 曲面
xにおける M の接ベクトルの定義
γ : D → M
γ(0) = x
局所的には parameter で書ける
⊂ R²
(x, y)
球面
北極
y
点xにおける
Mの接ベクトル
対応
γ ⟷ a
2次の
列ベクトル
線形構造
足し算
スカラー倍
γ(d) = (x(d), y(d)) = (x(0), y(0)) + (a₁, a₂) d
(∀d∈D)
何か
ベクトル
a = (a₁, a₂)
b = (b₁, b₂)
別の parameter
色々な parametersのとり方がある
x = x(ξ, η)
y = y(ξ, η)
dx = ∂x/∂ξ dξ + ∂x/∂η dη
dy = ∂y/∂ξ dξ + ∂y/∂η dη
線形変換


x∈M : 曲面
固定
D γ→ 点x
M
Mのxの近く
xにおけるMの接ベクトルの定義
γ: D → M
対応
(x, y)
γ(0) = x
局所的にはparametersがとれる
上半
部分集合 ⊂ R
(x, y)
球面
北極
y
x
点xにおける
Mの接ベクトル
γ(α) = (x(α) y(α)) = (x(0) y(0)) + (a1 a2) α
γ ⟷ a
∃! 何かベクトル
2次の列ベクトル
線形構造
足し算
スカラー倍
色々なparametersの
x = x(ξ, η)
y = y(ξ, η)
dx
dy

$$= \begin{pmatrix} x(d) \\ y(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} d \qquad (\forall d \in D)$$

∃! 何か ベクトル

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ $\qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ 別のparameter

$x \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

クトル

構造

算

ラー倍)

色々な parametersのとり方がある

$$x = x(\xi, \eta)$$
$$y = y(\xi, \eta)$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta$$
$$dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\text{線形変換}} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}$$

Maxwellの方程式の
(1) $\nabla \times \mathbb{E} + \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} = 0$
(2) $\nabla \times \mathbb{H} - \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t} = \mathbb{J}$
(3) $\nabla \cdot \mathbb{B} = 0$
(4) $\nabla \cdot \mathbb{D} = \rho$
$\mathbb{E}$ 電界強度
$\mathbb{H}$: 磁界強度
$\mathbb{E} = (E_1, E_2, E_3)$
$\mathbb{H} = (H_1, H_2, H_3)$
$\mathbb{D}$: 電束密度
$\mathbb{J}$: 電流密度
ρ: 電荷密度
x, y, z, t 時刻
$\omega_E = E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz$
$\omega_H = H_1 dx + H_2 dy + H_3 dz$
$\omega_D = D_1 dy \wedge dz + D_2 dz \wedge dx + D_3 dx \wedge dy$
$\omega_B = B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy$
$\omega_J = J_1 dy \wedge dz + J_2 dz \wedge dx + J_3 dx \wedge dy$
$\omega_\rho = \rho\, dx \wedge dy \wedge dz$
$\beta = -\omega_H \wedge dt + \omega_D$
$\gamma = \omega_J \wedge dt - \omega_\rho$
V
$\boxed{d\beta + \gamma = 0}$ ⟺ (2)&(4)に対応
$\alpha = \omega_E \wedge dt + \omega_B$
$= (E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz) \wedge dt +$
$B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy$
$= E_1 dx \wedge dt + E_2 dy \wedge dt + E_3 dz \wedge dt$
$+$
IV
$d\alpha = 0$ ⟷ (1)&(3)に対応
外微分

Maxwellの方程式の
微分形式による表現

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad \nabla \times \mathbb{E} + \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} = 0 \\
&(2)\quad \nabla \times \mathbb{H} - \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t} = \mathbb{J} \\
&(3)\quad \nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \\
&(4)\quad \nabla \cdot \mathbb{D} = \rho
\end{aligned}
$$

$\mathbb{E}$ 電界強度

$\mathbb{H}$: 磁界強度

$\mathbb{E} = (E_1, E_2, E_3)$

$\mathbb{H} = (H_1, H_2, H_3)$

$\mathbb{D}$: 電束密度

$\mathbb{B}$: 磁気誘導

$\mathbb{J}$: 電流密度

ρ: 電荷密度

x, y, z, t

時刻

$$
\begin{aligned}
\omega_E &= E_1\,dx + E_2\,dy + \cdots \\
\omega_H &= H_1\,dx + H_2\,dy + \cdots \\
\omega_D &= D_1\,dy \wedge dz + D_2\,d\cdots \\
\omega_B &= B_1\,dy \wedge dz + B_2 \cdots \\
\omega_J &= J_1\,dy \wedge dz + J_2\,dz \cdots \\
\omega_\rho &= \rho\,dx \wedge dy \wedge dz \\
\beta &= -\omega_H \wedge dt + \omega_D \\
\gamma &= \omega_J \wedge dt - \omega_\rho
\end{aligned}
$$

$E_2\,dy + E_3\,dz$

$H_2\,dy + H_3\,dz$

$z + D_2\,dz\wedge dx + D_3\,dx\wedge dy$

$z + B_2\,dz\wedge dx + B_3\,dx\wedge dy$

$z + J_2\,dz\wedge dx + J_3\,dx\wedge dy$

$y\wedge dz$

$+\,\omega_D$

ω_ρ

$$\alpha = \omega_E \wedge dt + \omega_B$$

$$= (E_1\,dx + E_2\,dy + E_3\,dz)\wedge dt + B_1\,dy\wedge dz + B_2\,dz\wedge dx + B_3\,dx\wedge dy$$

$$= E_1\,dx\wedge dt + E_2\,dy\wedge dt + E_3\,dz\wedge dt + \underline{\qquad\qquad}$$

V

$$\boxed{d\beta + \gamma = 0}$$

⟺ (2) & (4) に対応

IV

$d\alpha = 0$ ⟷ (1) & (3) に対応

↑

外微分

31回目

基礎数学31回目（2009年3月6日）
出席者39名＋中西（TA)

曲面Mに対する接ベクトルの概念をD（2回かけると0になる1次の無限小の全体）からMへの
写像として定義し、その後局所的に座標を用いることでMの点xでの接ベクトル空間を
線形空間にできるという話をした。またこの線形構造が座標の取り方に依存しないことも
証明した。ここまで話すと大体2時半になっていた。

ここからMaxwellの方程式について復習し、これを微分形式と外微分を用いることで２つの方程式に
纏め上げられるという話をし、詳細はReport問題とした。物理学を履修していないものにも理解できる
よう配慮した。

最後になりますが、いつもの定位置に奈佐原先生がいないというのは、いかに寂しいものであるかを
実感しました。

西村泰一（にしむらひろかず）
筑波大学数学系