Date 2009. 2. 20

基礎数学

47人 + 中西(TA) + 奈佐原

2次の微分形式ωについて、以下は同値

1. $d\omega = 0$
2. 任意の閉曲面Σについて、$\int_\Sigma \omega = 0$
3. ある1次の微分形式ω'があって、$d\omega' = \omega$

ベクトル場Xについて、以下は同値

1. $\mathrm{div}\, X = 0$
2. 任意の閉曲面Σについて、$\int_\Sigma X \cdot d\mathbf{S} = 0$ (面積分)
3. あるベクトル場Yがあって、$X = \mathrm{rot}\, Y$

さて、原点に電荷qがあるとする。位置ベクトル$\mathbf{r}$の点における電場は、クーロンの法則より、

$$X = kq\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

比例定数　となる。

$\|\mathbf{r}\| = r$

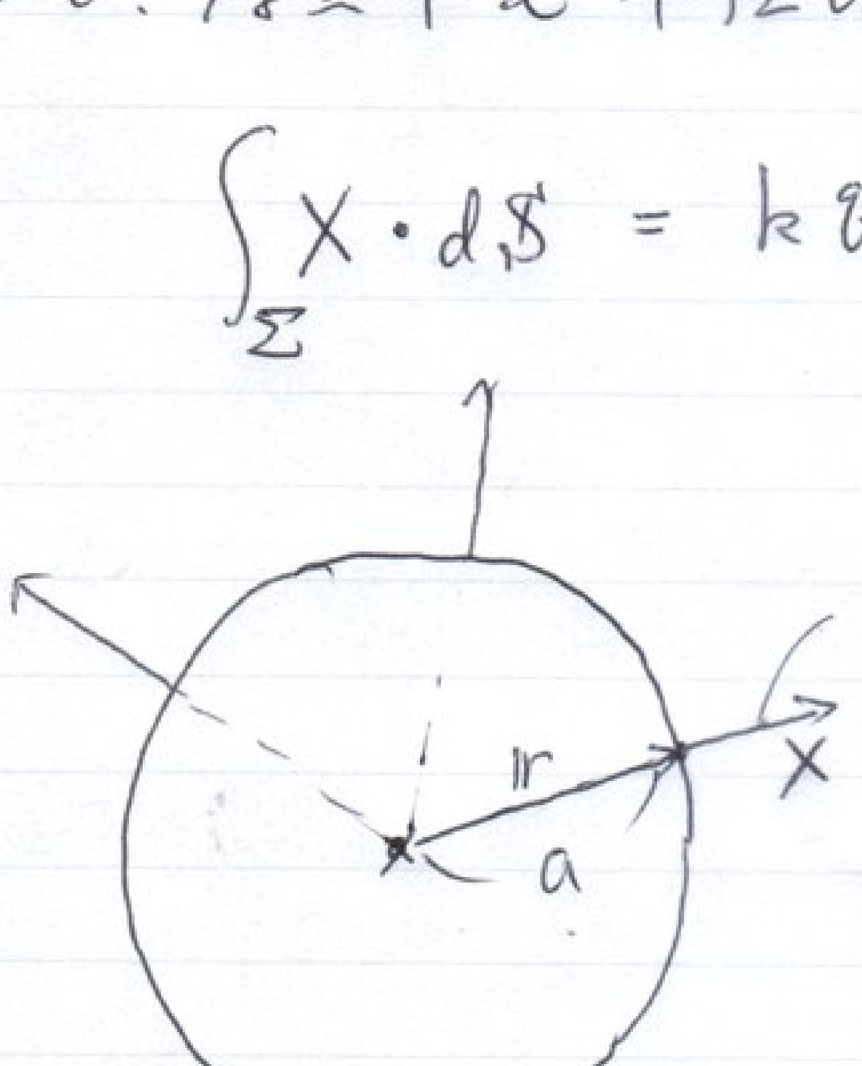
原点から$\mathbf{r}$への距離。つまり$\mathbf{r}$の長さ

ここで、原点中心半径aの$\overbrace{\text{球面}}^{\Sigma}$上では、

$$\int_\Sigma X \cdot d\mathbf{S} = kq\frac{1}{a^2} \times \Sigma\text{の表面積} = kq\frac{1}{a^2} \times 4\pi a^2$$

$$= 4\pi kq \neq 0$$

半径aによらない。



面に垂直

$$\|X\| = kq\frac{1}{r^2}\underbrace{\left\|\frac{\mathbf{r}}{r}\right\|}_{=1} = kq\frac{1}{r^2} \underset{r=a}{=} kq\frac{1}{a^2}$$

面のどこでも同じ大きさ

ところが、前回示したように、$\mathbb{X} = kq\dfrac{\mathbb{r}}{r^3}$ ならば $\mathrm{div}\,\mathbb{X} = 0$.

---> $\mathrm{div}\,\mathbb{X} = 0$ なのに $\displaystyle\int_{\Sigma} \mathbb{X}\cdot d\mathbb{S} \neq 0$ になってしまう!

矛盾?

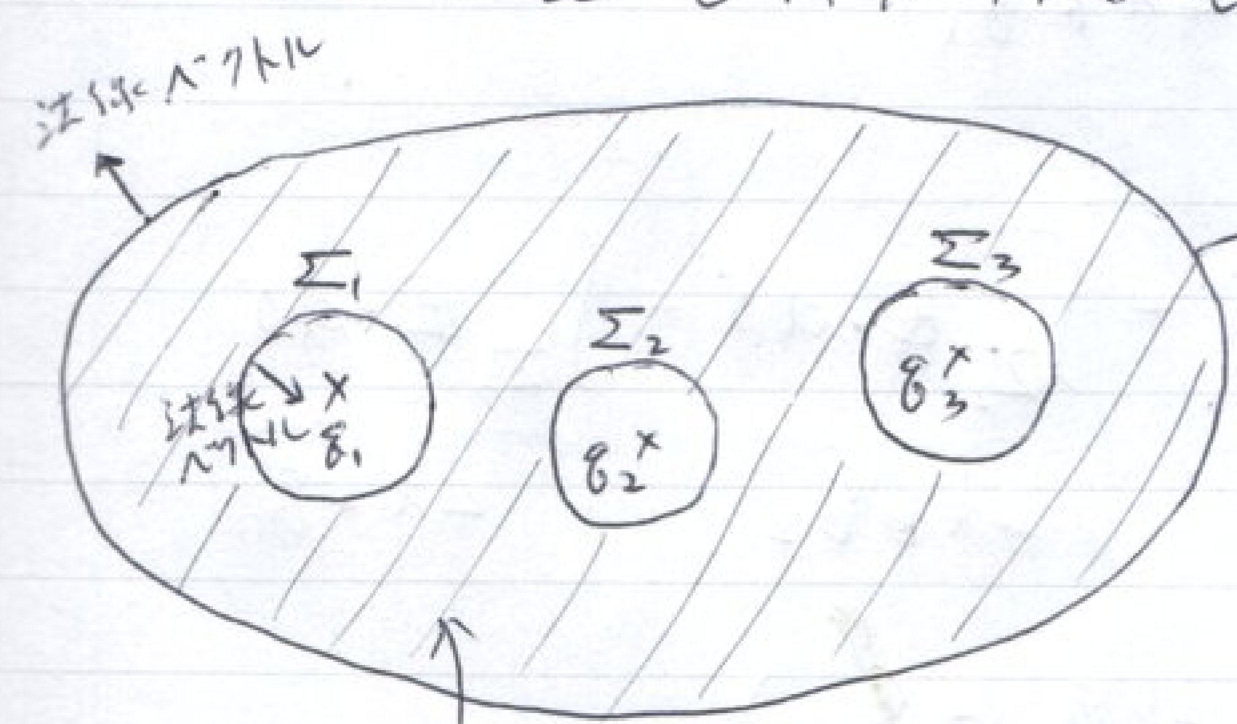
それは、

$\mathbb{r} = 0$(原点)で $\mathbb{X}$ が定義されてないから!

↪ そういう場合はガウスの発散定理が使えない。だから 1→2 が言えない。

さて、3つの点電荷が作る電場 $\mathbb{E}$ をかんがえる。

(4つ以上あるときも同様)



重ねあわせの原理がなりたつので、$\mathbb{E}$ は q_1, q_2, q_3 からの各電場の重ねあわせ。

$\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_3$

4つの閉曲面の合併: $\Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ も閉曲面。

この内部ではベクトル場 $\mathbb{E}$ が定義されている。

$$\int_{\Sigma\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3} \mathbb{E}\cdot d\mathbb{S} = \int_{\Sigma} \mathbb{E}\cdot d\mathbb{S} - \int_{\Sigma_1} \mathbb{E}\cdot d\mathbb{S} - \int_{\Sigma_2} \mathbb{E}\cdot d\mathbb{S} - \int_{\Sigma_3} \mathbb{E}\cdot d\mathbb{S} \overset{\text{ガウスの発散定理}}{=} 0$$

(の $\displaystyle\int_{\Sigma_1} \mathbb{E}\cdot d\mathbb{S}$ は、 の $\displaystyle\int_{\Sigma_1} \mathbb{E}\cdot d\mathbb{S}$ の符号逆)

'14 11 10 12

$$\int_{\Sigma_1} \mathbb{E}\cdot d\mathbb{S} = \int_{\Sigma_1} (\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_3)\cdot d\mathbb{S}$$

$$= \int_{\Sigma_1} \mathbb{E}_1\cdot d\mathbb{S} + \underbrace{\int_{\Sigma_1} \mathbb{E}_2\cdot d\mathbb{S} + \int_{\Sigma_1} \mathbb{E}_3\cdot d\mathbb{S}}$$

$\mathbb{E}_2$, $\mathbb{E}_3$ は Σ_1 の中で定義されてるし、
$\mathrm{div}\,\mathbb{E}_2 = \mathrm{div}\,\mathbb{E}_3 = 0$ なので、
ガウスの発散定理より、0

$$= \int_{\Sigma_1} \mathbb{E}_1\cdot d\mathbb{S} = 4\pi k q_1$$

$$\therefore \int_{\Sigma} \mathbb{E}\cdot d\mathbb{S} = \underbrace{\int_{\Sigma_1} \mathbb{E}\cdot d\mathbb{S}}_{4\pi k q_1} + \underbrace{\int_{\Sigma_2} \mathbb{E}\cdot d\mathbb{S}}_{4\pi k q_2} + \underbrace{\int_{\Sigma_3} \mathbb{E}\cdot d\mathbb{S}}_{4\pi k q_3}$$

$$= 4\pi k (q_1 + q_2 + q_3)$$

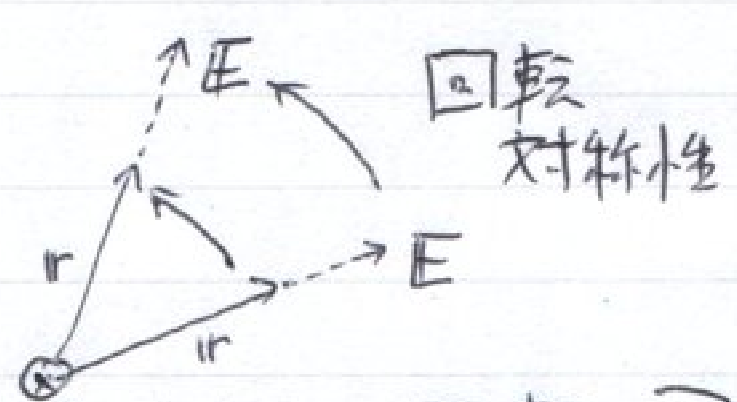
つまり、閉曲面上の電場の面積分は、その中の
電荷の総量に比例する

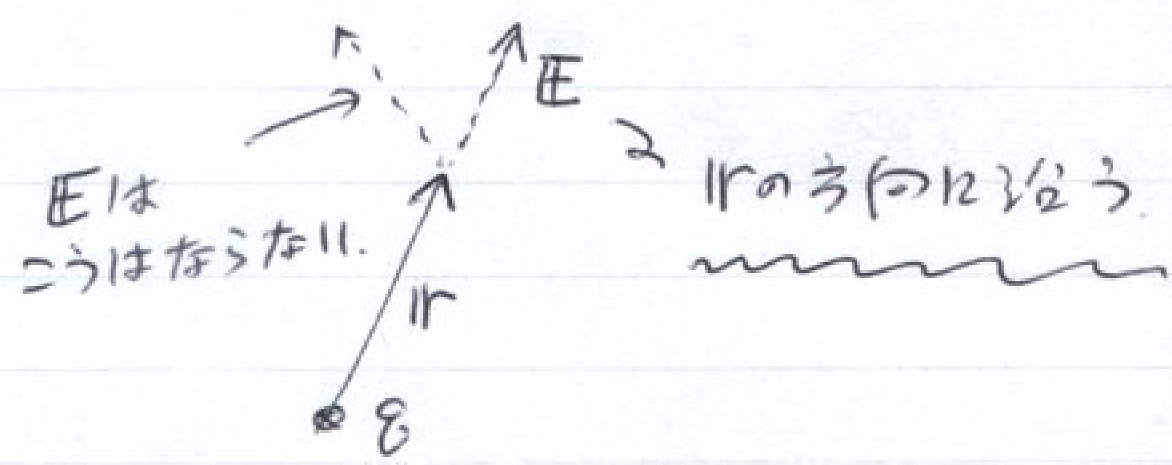
→ Gaussの法則（物理学）

これで、
クーロンの法則から Gaussの法則がみちびけた!!

この逆をかんがえてみよう。ガウスの法則がなりたつとする。

真空中に電荷があると…





q を中心に回転 → qからの距離が同じなら
Eの大きさは同じはず.

電荷qを中心とする
半径aの球面Σ上で面積分

$$\int_\Sigma \mathbb{E}\cdot d\mathbb{S} = 4\pi a^2 E$$

Gaussの法則より、これは $4\pi kq$ に等しい。

$$\therefore\quad 4\pi a^2 E = 4\pi k q$$

$$\therefore\quad E = kq\frac{1}{a^2}$$ ← クーロンの法則！

レポート最終提出は 3/9 (D705)

基礎数学

2009/02/20

2次の微分形式 ω 以下は同値: equivalent

1. $d\omega = 0$
2. 任意の閉曲面Σに対して $\int_\Sigma \omega = 0$
3. ある一次の微分形式 ω' があって、$d\omega' = \omega$

[illegible]

ベクトル場 X について 以下は同値:

1. $\mathrm{div}\, X = 0$
2. 任意の閉曲面Σに対して $\int_\Sigma X \cdot ds = 0$ (面積分)
3. あるベクトル場 Y があって $X = \mathrm{rot}\, Y$

内部は、X が定義されている。

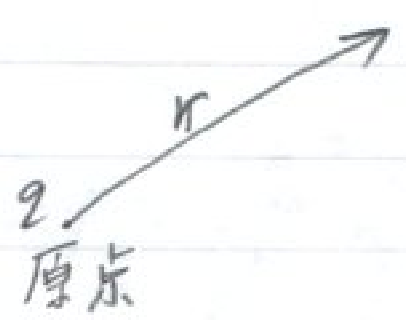
原点では定義されていない。 分母が0になるから! が0

$\int_V (\mathrm{div}\, X)\, dV$ (体積分)

原点に電荷 q があるとする。

クーロンの法則 があるから、 原点から r だけ はなれた点

電場



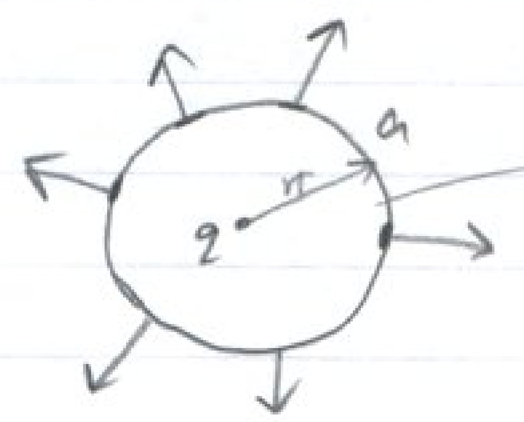
比例定数 k

$kq \dfrac{r}{r^3}$ 分母が0になるから、原点では定義されない

$\|r\| = r$ ← r の長さ

$\left\| \dfrac{r}{r} \right\| = 1$ 大きさ

原点中心で 半径が a の球 について



$kq\dfrac{r}{r^3} = X$

$\int_\Sigma X \cdot dS$ 面積分する

ベクトル場は 接平面に垂直

電場の大きさは 全部同じ

大きさ $kq\dfrac{1}{a^2}$ × 球の表面積 $(4\pi a^2)$ かけ算 $= \boxed{4\pi kq} \neq 0$

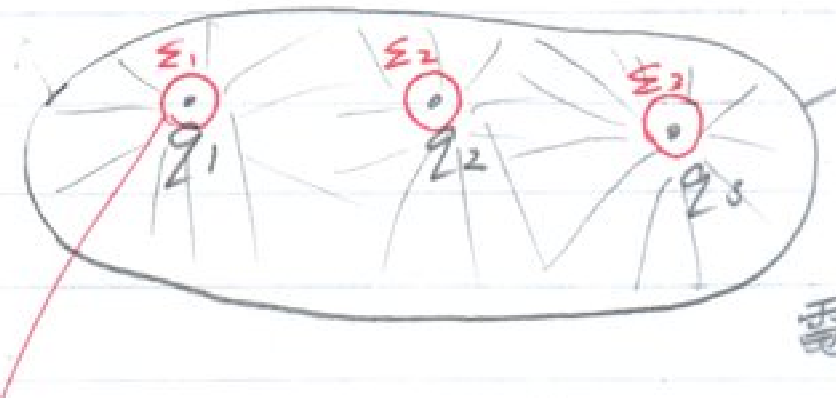
q が0でない限り 0ではない

半径 a は出てこない

電場は aの長さ に反比例

3つの電荷がある: q_1, q_2, q_3 → 電場を生じる.

どういう電場か?



閉曲面Σ

電場$\mathbb{E}$

3つの電荷

重ね合わせ

$$\boxed{\int_\Sigma \mathbb{E}\cdot ds = ?}$$

かくりする.

じゃまになるところ

union. OR

$$\Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$$

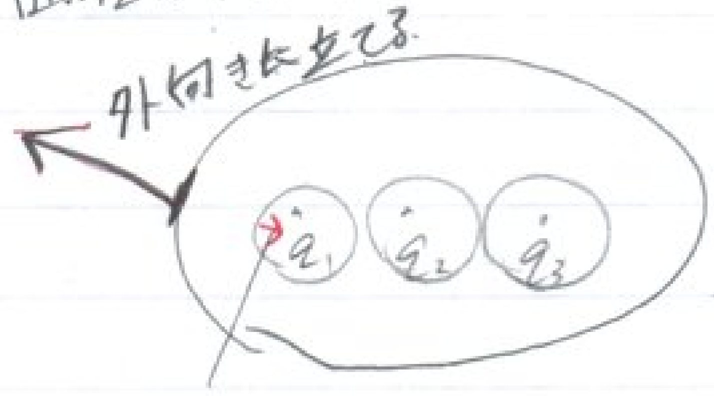
閉曲面

集合の合併

$$\boxed{\int_{\Sigma\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3} \mathbb{E}\cdot ds = 0}$$

面積分するとき,

外向きに立てる.



反対に向く

閉曲面について,

面積に

$\boxed{\text{面から外向きに立てる.}}$

4つ合わさったばあい, 反対になる

計算したいのは

重ね合わせ

$$\int_{\Sigma\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3} \mathbb{E}\cdot ds = \int_\Sigma \mathbb{E}\cdot ds - \left\{\int_{\Sigma_1}\mathbb{E}\cdot ds + \int_{\Sigma_2}\mathbb{E}\cdot ds + \int_{\Sigma_3}\mathbb{E}\cdot ds\right\} = 0$$

単独で出てきた場合...

ガウスの発散定理より0

$$\boxed{\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_3}$$

$$\int_{\Sigma_1} \mathbb{E}\cdot ds = \int_{\Sigma_1} \mathbb{E}_1 \cdot ds + \underbrace{\int_{\Sigma_1} \mathbb{E}_2 \cdot ds}_{=0} + \underbrace{\int_{\Sigma_1} \mathbb{E}_3 \cdot ds}_{=0}$$

ガウスの発散定理により

つまり、

$$\int_{\Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3} \mathbb{E}\cdot ds = \underbrace{\int_{\Sigma} \mathbb{E}\cdot ds}_{= \boxed{4\pi k(q_1+q_2+q_3)}} - \left\{ \underbrace{\int_{\Sigma_1} \mathbb{E}\, ds}_{4\pi k q_1} + \underbrace{\int_{\Sigma_2} \mathbb{E}\, ds}_{4\pi k q_2} + \underbrace{\int_{\Sigma_3} \mathbb{E}\cdot ds}_{4\pi k q_3} \right\} = 0$$

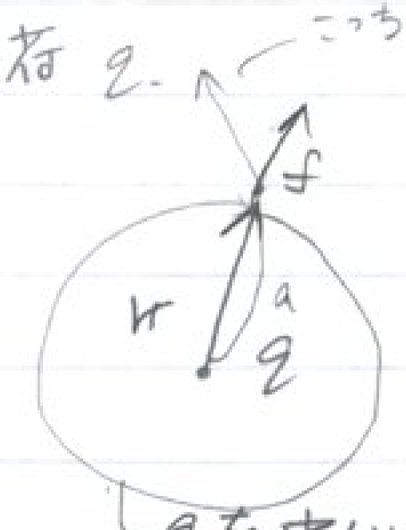
比例定数

Gaussの法則（物理）

クーロンの法則から

電荷 q

こっち向いたら変



真空

なにもない

qを中心に回転

回転に対して $\boxed{\text{対称性}}$ がないと変

どういう電場が生じるか？

電場の向きが定まるのはいいけど…

面積分

どれくらいの量が出るか

面を小さく区切る。

そこにその面積の大きさのものの↑を垂直に立てる。

流れの場を内積する

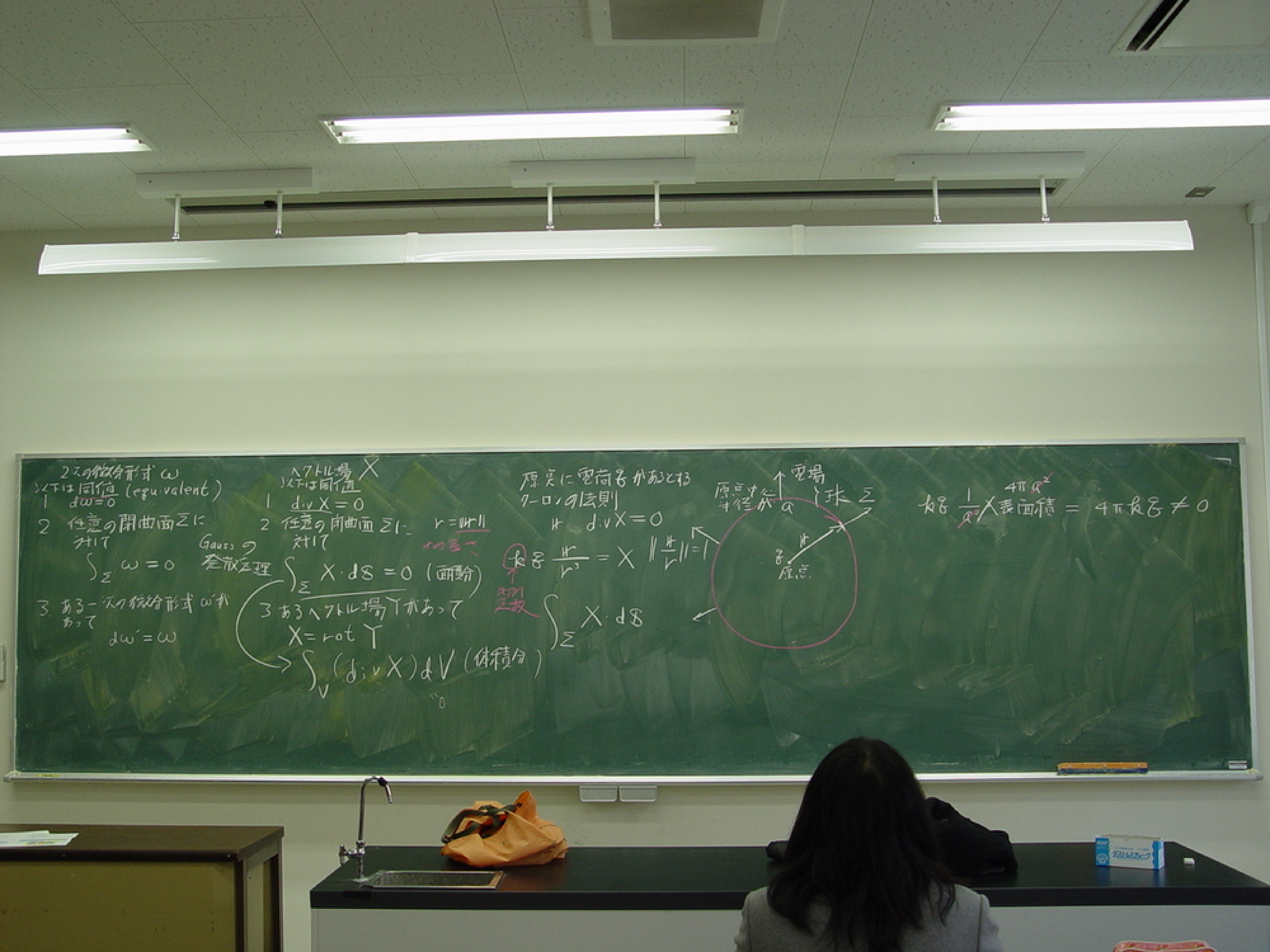
$$f \cancel{4\pi} a^2 = \cancel{4\pi} k q$$

$$f = \frac{kq}{a^2}$$

クーロンの法則にそのままいきつく

※レポート due on 3月9日

D705



2次の微分形式 ω
以下は同値 (equivalent)
1 dω=0
2 任意の閉曲面Σに対して
∫Σ ω = 0
3. ある一次の微分形式 ω' があって
dω' = ω
ベクトル場 X
以下は同値
1 div X = 0
2 任意の閉曲面Σに対して
r = ||r||
rの長さ
Gaussの発散定理
∫Σ X・dS = 0 (面積分)
3 あるベクトル場Yがあって
X = rot Y
∫V (div X) dV (体積分)
原点に電荷qがあるとする
クーロンの法則
div X = 0
kq r/r³ = X
||r/r|| = 1
比例定数
∫Σ X・dS
電場
原点中心半径がa
球 Σ
q
原点
4πa²
kq 1/a² × 表面積 = 4πkq ≠ 0

2次の微分形式 ω
以下は同値 (equivalent)

1. $d\omega = 0$
2. 任意の閉曲面 Σ に対して
$$\int_\Sigma \omega = 0$$
3. ある一次の微分形式 ω' があって
$$d\omega' = \omega$$

Gaussの発散定理

ベクトル場 X
以下は同値

1. $\mathrm{div}\, X = 0$
2. 任意の閉曲面 Σ に対して
$$\int_\Sigma X \cdot dS = 0 \quad (\text{面積分})$$
3. あるベクトル場 Y があって
$$X = \mathrm{rot}\, Y$$

$$\int_V (\mathrm{div}\, X)\, dV \quad (\text{体積分})$$
$\quad = 0$

$r = \|x\|$
xの長さ

原点に
クーロンの
x

$k \dfrac{x}{r}$

比例定数

$\int_\Sigma$

原点に電荷 e があるとする
クーロンの法則

$r = \|r\|$
の長さ

$r \quad \mathrm{div}\, X = 0$

$k e \dfrac{r}{r^3} = X \quad \left\| \dfrac{r}{r} \right\| = 1$

比例定数

面積分)

って

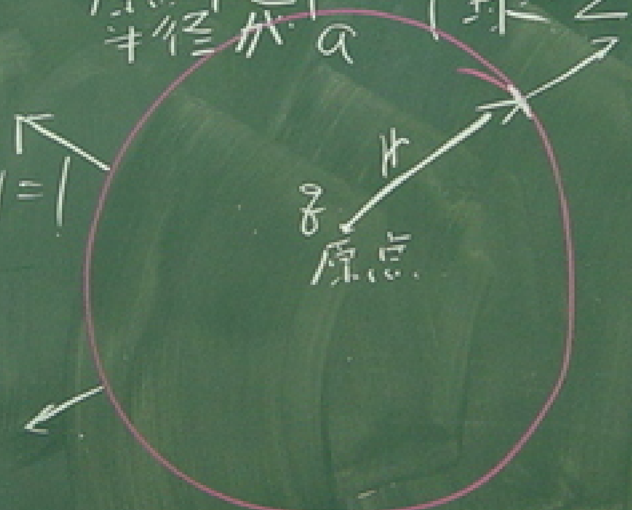
$$\int_\Sigma X \cdot dS$$

V (体積分)

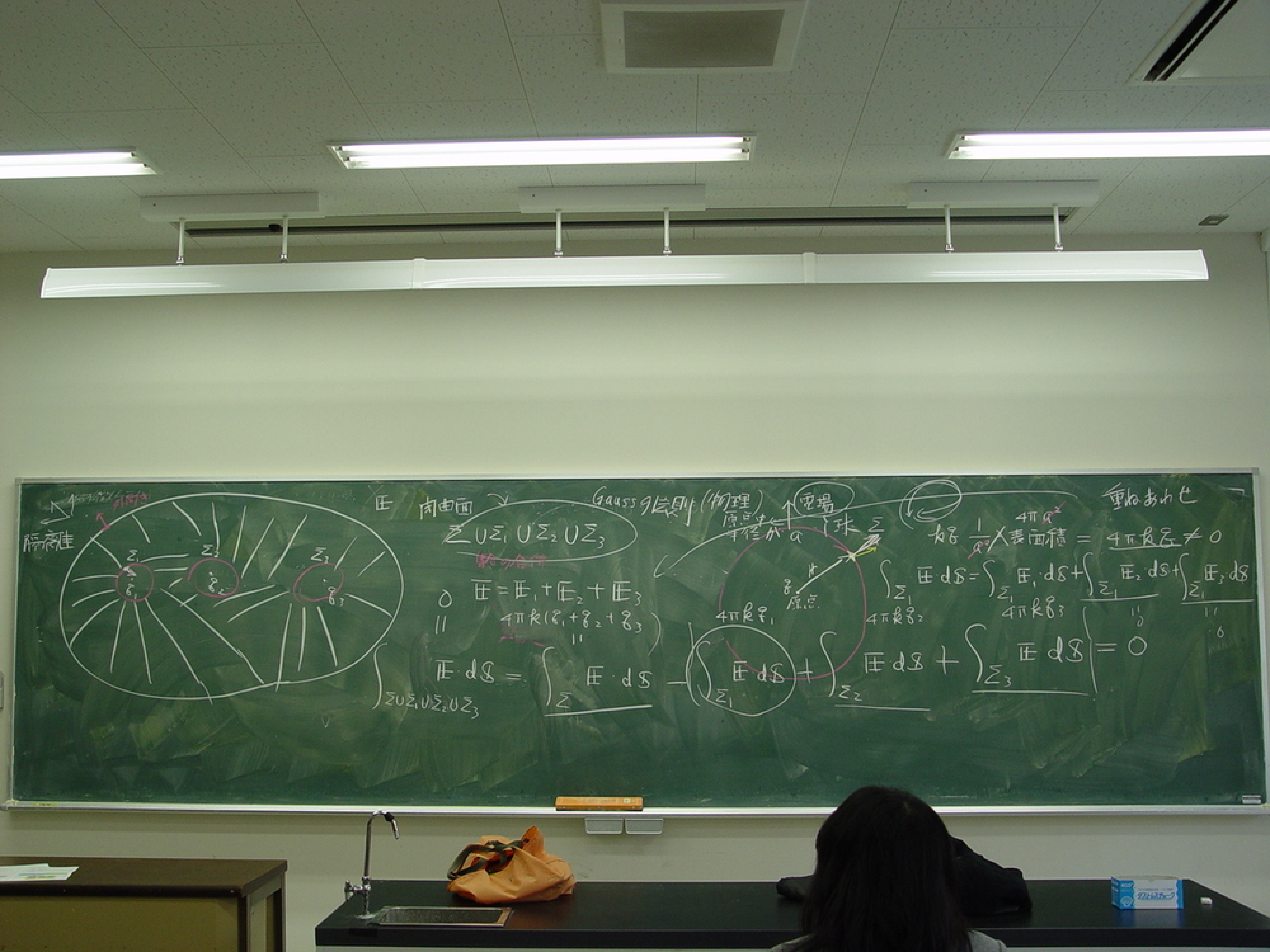
0

電場

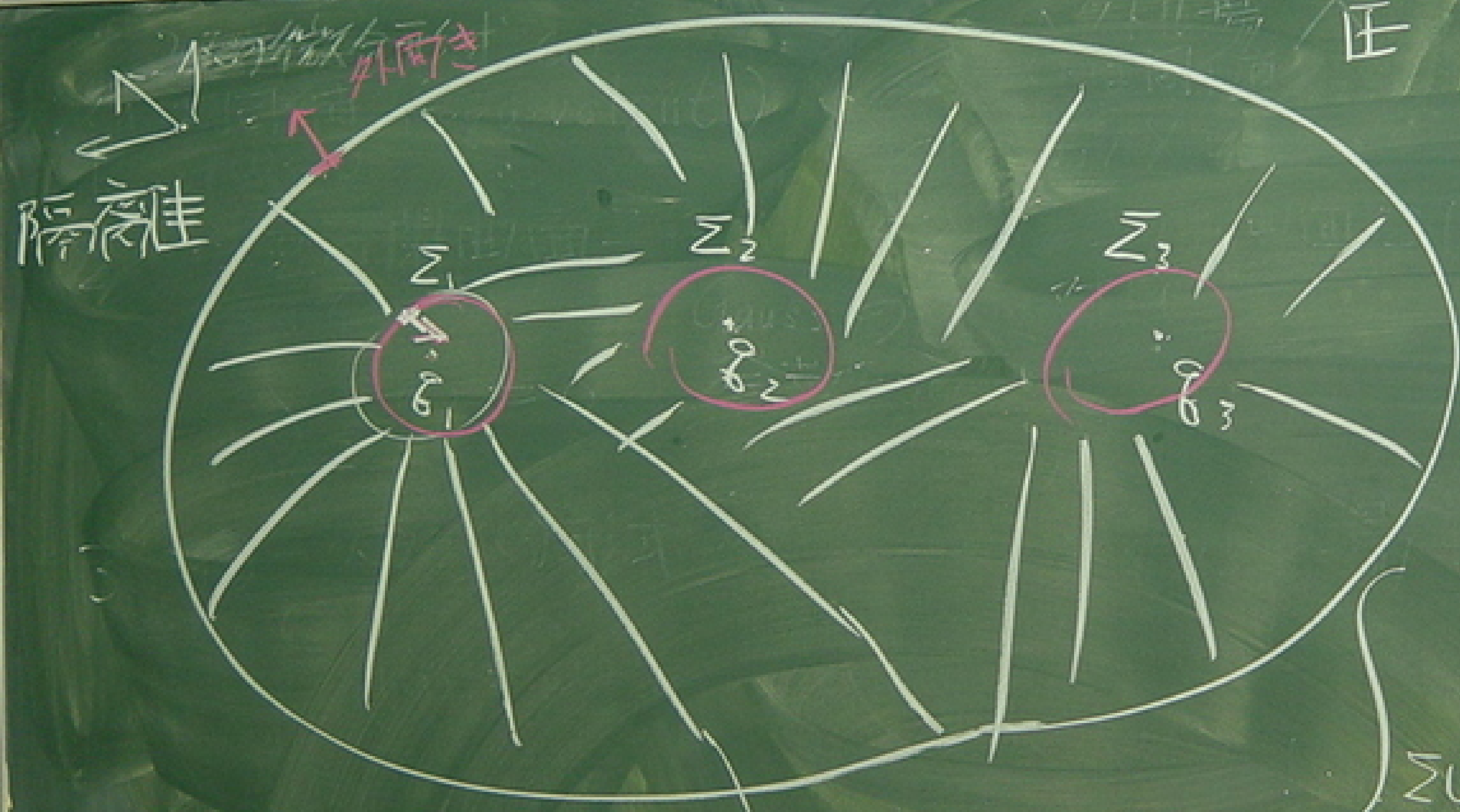
原点中心
半径が a の球 Σ



$k e \dfrac{1}{\cancel{a^2}} \times \overset{4\pi \cancel{a^2}}{表面積} = 4\pi k e \neq 0$



閉曲面
Gaussの法則(物理)
電場
球 Σ
重ねあわせ
原点
$\Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$
$\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_3$
$4\pi k(q_1 + q_2 + q_3)$
$\int_{\Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3} \mathbb{E} \cdot dS = \int_{\Sigma} \mathbb{E} \cdot dS - \left(\int_{\Sigma_1} \mathbb{E}\, dS + \int_{\Sigma_2} \mathbb{E}\, dS + \int_{\Sigma_3} \mathbb{E}\, dS \right) = 0$
$4\pi k q_1$
$4\pi k q_2$
$4\pi k q_3$
$\int_{\Sigma_1} \mathbb{E}\, dS = \int_{\Sigma_1} \mathbb{E}_1 \cdot dS + \int_{\Sigma_1} \mathbb{E}_2\, dS + \int_{\Sigma_1} \mathbb{E}_3\, dS$
表面積 $= 4\pi kq \neq 0$



$\mathbb{E}$ 閉曲面

Gaussの法

$\Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$

集合の合併

$\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_3$

$$0 = \int_{\Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3} \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = \underline{\int_{\Sigma} \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S}} -$$

$$4\pi k (q_1 + q_2 + q_3)$$

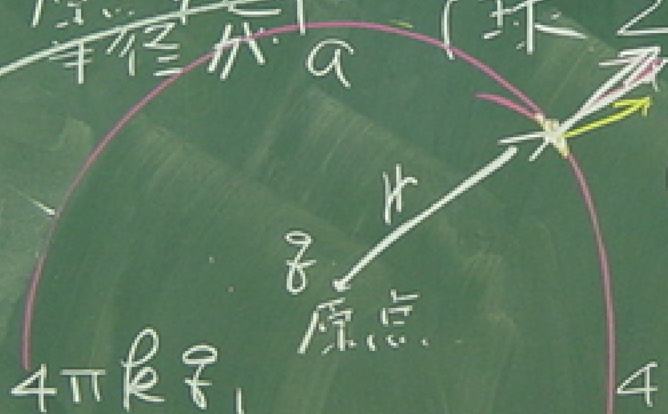
$\parallel$

Gaussの法則 (物理)

電場

原点中心 半径が a の球 Σ

重ねあわせ



$$kq\,\frac{1}{\cancel{a^2}}\times\text{表面積}\ (4\pi \cancel{a^2}) = \underline{4\pi k q} \neq 0$$

$$\int_{\Sigma_1} E\cdot dS = \underbrace{\int_{\Sigma_1} E_1\cdot dS}_{4\pi k q_3} + \underbrace{\int_{\Sigma_1} E_2\cdot dS}_{=0} + \underbrace{\int_{\Sigma_1} E_3\cdot dS}_{=0}$$

$+E_3$

$_2 + q_3)$

$$E\cdot dS - \left(\int_{\Sigma_1} E\cdot dS + \underline{\int_{\Sigma_2} E\cdot dS} + \underline{\int_{\Sigma_3} E\cdot dS}\right) = 0$$

$4\pi k q_1 \qquad 4\pi k q_2$

クーロンの法則 ⇒ Gaussの法則

真空

対称性

qを中心に回転

Gaussの発散定理

4πkq

$$f\,4\pi a^2 = 4\pi k q$$

$$f = \frac{kq}{a^2}$$

29回目

西村先生・みなさま:

本日02/20の3限、「基礎数学」(西村先生)の3学期9回め(通算29回め)を
聴講しました。教室は1E203です。出席者は、47名(前回は54名;昨年同期
は34名)+TA1名(中西さん)+教員1名(私)です。

内容は, 電磁気学におけるクーロンの法則とガウスの法則の同値性でした。
この話題は「物理学」で3学期の前半に触れられていますが、「物理学」
ではクーロン→ガウスの証明で、幾何学的なアプローチがとられたのに
対し、「基礎数学」では点電荷の周囲を微小球で切除してガウスの発散定理
を使うというアプローチがとられました。同じことを違った切り口で学ぶ
のは教育的に良いことだと思います。

西村先生、ありがとうございました。次回の最終回も、よろしくお願い
致します。

--
奈佐原　顕郎　(旧姓西田)
筑波大学農林工学系