No.

Date 2009. 2. 13

基礎数学　　54人 + 中西(TA) + 李佐原

前回述べたように、　$d \circ d = 0$

$$\begin{cases} \mathrm{rot} \circ \mathrm{grad} = 0 \\ \mathrm{div} \circ \mathrm{rot} = 0 \end{cases}$$

さて、

1次の微分形式 ω について、以下は同値

1) $d\omega = 0$

2) 任意の閉曲線 γ に対して $\int_\gamma \omega = 0$

3) ある0次の微分形式 f があって、$\omega = df$

これをベクトル解析の言葉で言いかえると、

ベクトル場 $\mathbb{f}$ について、以下は同値：

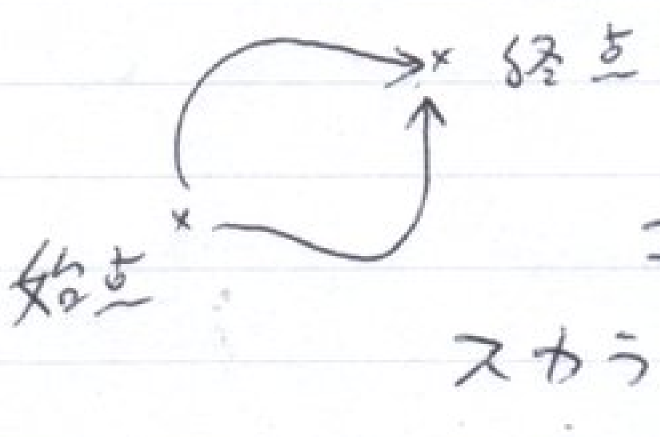
1') $\mathrm{rot}\, \mathbb{f} = 0$

2') 任意の閉曲線 γ について、

$\int_\gamma \mathbb{f} \cdot d\mathbb{r}$ (線積分) $= 0$

3') あるスカラー場 φ があって、$\mathbb{f} = \mathrm{grad}\, \varphi$

このような $\mathbb{f}$ が力であれば、それは保存力。



仕事($\mathbb{f}$ の線積分)が経路によらない。

このとき、$\mathbb{f} = \mathrm{grad}\, \varphi$ となるような

スカラー場 φ に対して、$-\varphi$ は

ポテンシャルエネルギー。(例：万有引力)

16
11
12
15 +1

さて、エネルギー保存則の話をする。

Newtonの法則

質点（質量m）の速度を$v(t)$とすると、

$$\underbrace{m\frac{dv}{dt}}_{\text{加速度}} = F$$

F：質点がうける力

→ 宇宙も地上もこの法則に支配されるという世界観
（それ以前は、宇宙と地上は別の世界と考えられた）

$x = x(t)$ ：質点の位置　　　$v = \dfrac{dx}{dt}$

運動エネルギー：$\dfrac{1}{2}m\dfrac{dx}{dt}\cdot\dfrac{dx}{dt}$

もし、力が保存力ならば、$F = \mathrm{grad}(-\varphi)$

φ：ポテンシャルエネルギー

このφは前頁のφとは符号が逆。

質点のもつ全エネルギーは、

$$E = \frac{1}{2}m\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + \varphi(x)$$

これが一定になる！

$$\because \frac{dE}{dt} = m\frac{dx}{dt}\cdot\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + (\mathrm{grad}\,\varphi)\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{dx}{dt}\Big(\underbrace{m\frac{d^2x}{dt^2}}_{F(x(t))} + \underbrace{\mathrm{grad}\,\varphi}_{-F(x(t))}\Big) = 0$$

これがエネルギー保存則。

物理学では、その他にも、いろんな保存則がある（大切！）

運動量保存則

角運動量保存則

保存則のはじまりは、ケプラーの面積速度一定の法則。
（古い話）

20世紀になって、保存則と対称性が対応していることがわかった。 by Noether（ネーター）…ドイツの女性

エネルギー保存則 $\longleftrightarrow$ 時間の対称性
（物理法則は昔も今もかわらない）

さて、2次の微分形式についても、さっきと同じような話がなりたつ。すなわち、

2次の微分形式 ω について、以下は同値：

1) $d\omega = 0$

2) 任意の閉曲面 Σ について、

$$\int_\Sigma \omega = 0$$

3) ある1次の微分形式 ω' があって、$\omega = d\omega'$

（証明はしない）

No.

Date

これをベクトル解析の言葉で言いかえると、

ベクトル場 $\mathbb{f}$ について、以下は同値：

1') $\operatorname{div} \mathbb{f} = 0$

2') 任意の閉曲面 Σ について、

$$\int_{\Sigma} \mathbb{f} \cdot d\mathbb{S} = 0$$

3') あるベクトル場 $\mathbb{g}$ があって、 $\mathbb{f} = \operatorname{rot} \mathbb{g}$

さて、 r を原点からの距離とする。 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

関数 $r^k = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}}$ を考える（k は任意の定数）

位置ベクトル $\mathbb{r} = (x, y, z)$ について、

ベクトル場 $\mathbb{r} r^k = (x, y, z)(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}}$ を考える。

この発散は？

$$\frac{\partial}{\partial x} x (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}} = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}} + kx^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2} - 1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} y (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}} = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}} + k y^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2} - 1}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} z (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}} = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}} + k z^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2} - 1}$$

$$\therefore \operatorname{div}(\mathbb{r} r^k) = 3 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}} + k (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2} - 1}$$
$$= (3 + k)(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}}$$

$k = -3$ のとき、 $\operatorname{div}(\mathbb{r} r^k) = 0$ となる。

No.

Date

$k=-3$のとき.

$$\mathbb{r}\, r^k = \frac{\mathbb{r}}{r^3} = \frac{1}{r^2}\frac{\mathbb{r}}{r}$$

一般に、適当な定数 c によって

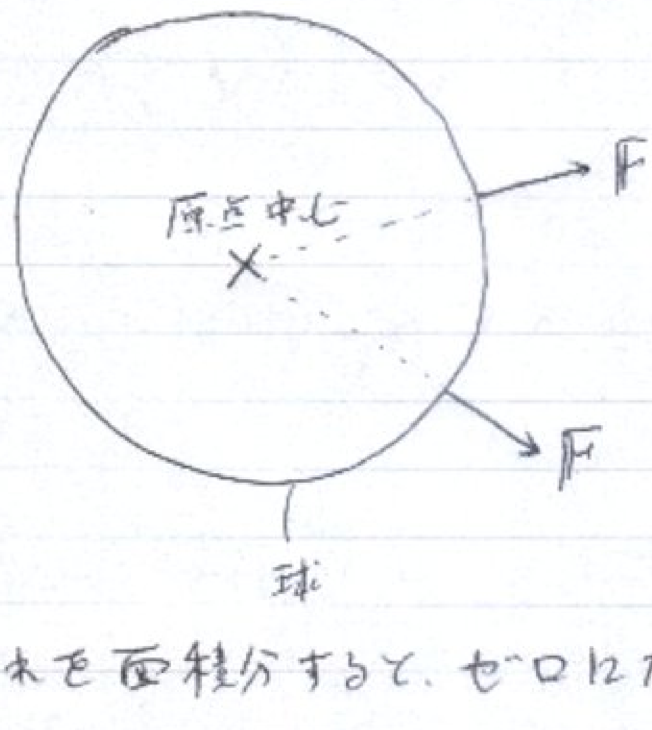
$$c\,\frac{1}{r^2}\frac{\mathbb{r}}{r}$$ 力の働く方向

と書ける物理法則(力の場)を逆二乗の法則と言う。

例) 万有引力, 静電気力

これらは、$r\neq 0$で、divergenceがゼロになる。

$$\mathbb{F} = \frac{\mathbb{r}}{r^3}$$



これを面積分すると、ゼロになりそうにない… → 前頁(2)に矛盾?

ところが、原点で $\mathbb{F}$ は定義されていない!

つづきは来週

(ガウスの法則とクーロンの法則は同じことを示す)

基礎数学

2009/02/13

$d \circ d = 0$

$\begin{cases} \mathrm{rot} \circ \mathrm{grad} = 0 \\ \mathrm{div} \circ \mathrm{rot} = 0 \end{cases}$

(その逆を考える)

1次の微分形式 ω

以下の条件は同値：

1) $d\omega = 0$
2) 任意の閉曲線 γ に対して $\int_\gamma \omega = 0$
3) ある $\underbrace{\text{0次の微分形式}}_{\text{関数}}$ f があって $\omega = df$

数理科学演習 / 物理ではこっち

ベクトル解析

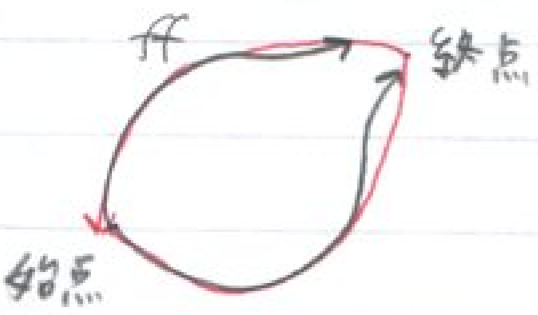
ベクトル場 $\mathbb{f}$ について以下は同値：

1') $\mathrm{rot}\,\mathbb{f} = 0$
2') 任意の閉曲線 γ について $\int_\gamma \mathbb{f} \cdot d\mathbb{r}$ (線積分) $= 0$
3') あるスカラー場 φ があって $\mathbb{f} = \mathrm{grad}\,\varphi$ と書ける。

作用素ベクトル

$\mathrm{rot}\,\mathbb{f} = \nabla \times \mathbb{f}$

保存力 ともいう



仕事が 0になる。

始点と終点が決まれば、うける力は、道によらない。

$-\varphi$ ← ポテンシャルエネルギー

$\boxed{\text{万有引力}}$

エネルギーの保存則

Newtonの法則

質点

質量 m

質点の速度 $\mathbb{v}(t)$

加速度 $\dfrac{d\mathbb{v}}{dt}$

$$\boxed{\frac{d\mathbb{v}}{dt} m = \mathbb{F}}$$

変化率は その点でうけている 力に 一致する。

宇宙 ／ 地上　昔の人は、全く別の法則があると思っていた。(別のもの)

Newtonが出てきてから、

世界観

$x = x(t)$ 位置

$$\mathbb{v} = \frac{dx}{dt}$$

運動エネルギー

$$\boxed{\frac{1}{2} m \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt}}$$

今は、保存力の場で動いていると仮定する。

すると、

$$\mathbb{F}(x) = \mathrm{grad} - \varphi$$

ポテンシャルエネルギー

位置のエネルギー

このシステムがもっている

全エネルギー　E

$$E = \frac{1}{2} m \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + \varphi(x(t))$$

これが一定であるといいたい。

そのためには、

Eを
微分すればいい 2 ライプニッツの法則で、$\frac{1}{2}$ 消えて

$$\frac{dE}{dt} = m\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + (\mathrm{grad}\,\varphi) \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{dx}{dt} \cdot \left\{ \underline{m\frac{d^2x}{dt} - F(x(t))} \right\} = 0$$

運動エネルギーと位置 をたしたものは、いつも一定

保存則の走りというのは、　　　　角運動量
ケプラーの面積速度　　　　　　　運動量

20世紀になって、保存則と対称性が対応している。

保存則 ⟷ 対称性

保存則と対称性を発見したのは、
Noether（ネーター）
（女性）

百年前でも先にも物理の教科書使える。
物理は、同じ法則に従っている。

運動量の保存則は、空間内の移動に対して物理法則は変わらない。

鏡の中と外は、
法則はちがう。
（20世紀の半ばに分かった。）
↓
しょうげきだった！

2次の微分形式

ω 以下は同値:

どれでも

1) $d\omega = 0$

2) いかなる閉曲面 Σ についても $\int_\Sigma \omega = 0$

3) ある1次の微分形式 ω' があって $\omega = d\omega'$

ベクトル解析

$\mathbb{f}$ ベクトル場 以下は同値:

1') $\mathrm{div}\, \mathbb{f} = 0$

2') いかなる閉曲面 Σ についても, $\int_\Sigma \mathbb{f} \cdot dS = 0$

3') あるベクトル場 g があって $\mathbb{f} = \mathrm{rot}\, g$

r 原点からの距離

k 任意の実数

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$= (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$r^k = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}}$$

位置ベクトル

$\mathbb{r} \cdot r^k$ の発散を計算する。

発散

$$\mathbb{r} \cdot r^k = (x, y, z)\,(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}}$$

$$\frac{\partial \mathbb{r}\, r^k}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}}\right\}$$

$$= (x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}} + x \cdot 2x\, \frac{k}{2}\, (x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}-1}$$

$$= (x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}} + kx\,(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k-2}{2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}} + ky^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k-2}{2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}} + kz^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k-2}{2}}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z} &= 3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}} + k(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k-2}{2}} \\ &= 3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}} + k(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}} \\ &= (3+k)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}}\end{aligned}$$

$k=-3$ のとき、

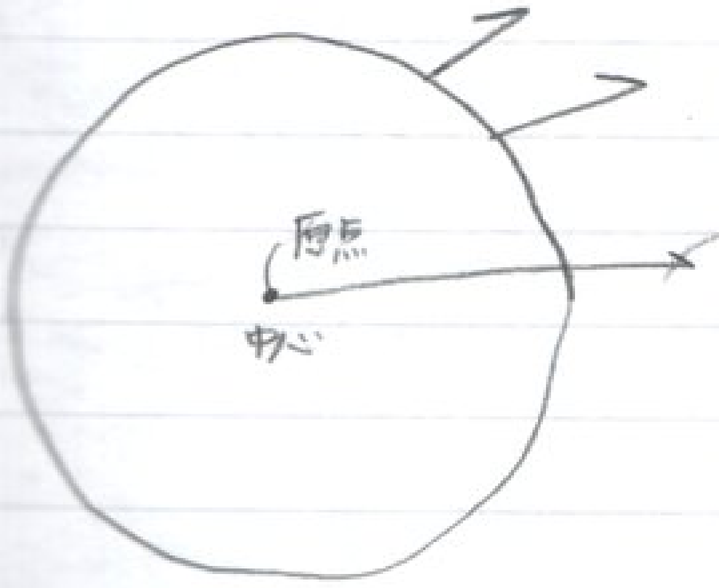
$$\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{1}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

スカラー

逆二乗の法則 $\boxed{\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = c\frac{1}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}}$

→ 働く力は、距離の二乗に反比例している。

∴ 発散は0.



力は同じ

各点でその表面に垂直の形

電場はクーロンの法則

↕

Gaussの法則


d·d = 0
rot・grad = 0
div・rot = 0
1) dω = 0
ベクトル解析
保存力
1) rot F = 0
鏡映
ポテンシャルエネルギー
万有引力
20世紀
宇宙
地上
世界観
F(x) = grad − φ
エネルギーの保存則
Newtonの法則
x = x(t) 位置
v = dx/dt
質量 m
速度 v(t)
m dv/dt = F
加速度
運動エネルギー
運動量
角運動量
対称性
保存則
一定
ケプラー

$d \circ d = 0$

$$\begin{cases} \mathrm{rot} \circ \mathrm{grad} = 0 \\ \mathrm{div} \circ \mathrm{rot} = 0 \end{cases}$$

次の微分形式 ω（1次が）

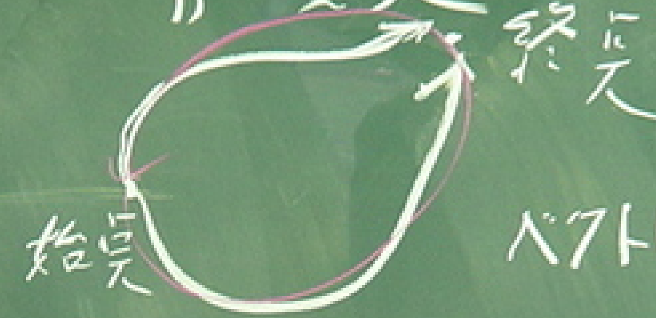
以下の条件は同値

1) $d\omega = 0$

2) 任意の閉曲線 γ に対して $\int_\gamma \omega = 0$

3) ある $\underbrace{\text{0次の微分形式}}_{\text{関数}}$ f があって $\omega = df$

$\mathbb{F}$ 質点



ベクトル解析

保存力 //

ベクトル場 $\mathbb{F}$ について以下は同値

鏡映

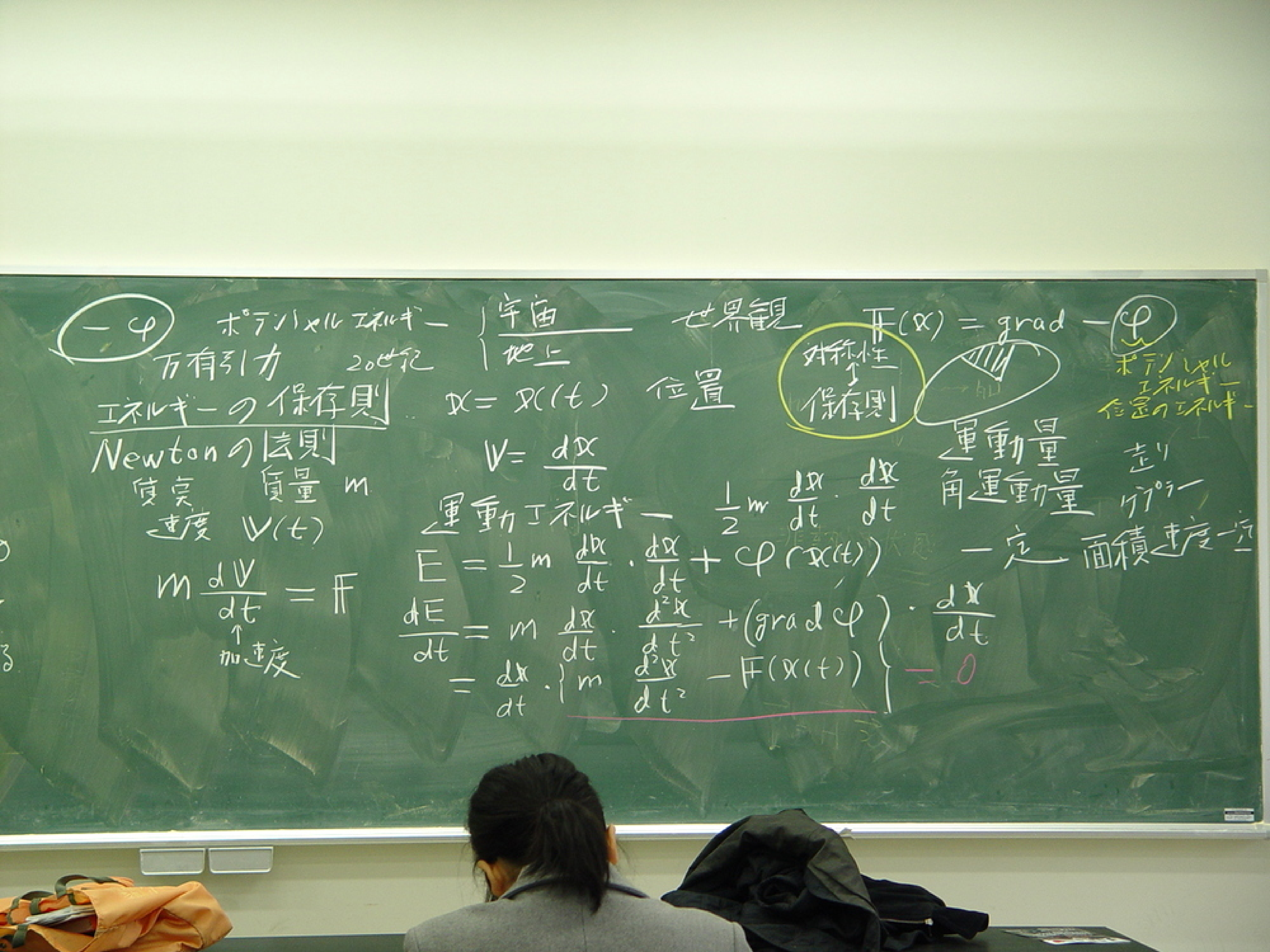
1') $\mathrm{rot}\, \mathbb{F} = 0$

2') 任意の閉曲線 γ について

$$\int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r}\ (\text{線積分}) = 0$$

3') あるスカラー場 φ があって

$\mathbb{F} = \mathrm{grad}\, \underline{\varphi}$ と書ける


$-\varphi$ ポテンシャルエネルギー
万有引力 20世紀
宇宙
地上
世界観
$\mathbb{F}(x) = \mathrm{grad} - \varphi$
ポテンシャルエネルギー
位置のエネルギー
対称性
保存則
エネルギーの保存則
$x = x(t)$ 位置
Newtonの法則
質点 質量 m
$v = \frac{dx}{dt}$
運動量
角運動量
ケプラー
速度 $v(t)$
運動エネルギー $\frac{1}{2} m \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt}$
$E = \frac{1}{2} m \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + \varphi(x(t))$
一定 面積速度一定
$m \frac{dv}{dt} = \mathbb{F}$
加速度
$\frac{dE}{dt} = m \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + (\mathrm{grad}\,\varphi) \cdot \frac{dx}{dt}$
$= \frac{dx}{dt} \cdot \{ m \frac{d^2x}{dt^2} - \mathbb{F}(x(t)) \} = 0$

2次の微分形式
ω 以下は同値
1) dω = 0
2) いかなる閉曲面Σについても
3) ある1次の微分形式 ω' があって
ω = dω'
Noether (ネーター)
ベクトル解析
逆二乗の法則
ベクトル場
以下は同値
2') いかなる閉曲面Σについても
3') あるベクトル場 g があって
kは任意の定数
発散
k = −3

2次の微分形式

ω 以下は同値

1) $d\omega = 0$

2) いかなる閉曲面 Σ についても

$$\int_\Sigma \omega = 0$$

3) ある1次の微分形式 ω' があって

$$\omega = d\omega'$$

Noether (ネーター)

双対性 (拡張)

$$\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

ベクトル解析 ← 逆二乗の法則 kは

$\mathbb{F}$ ベクトル場

以下は同値

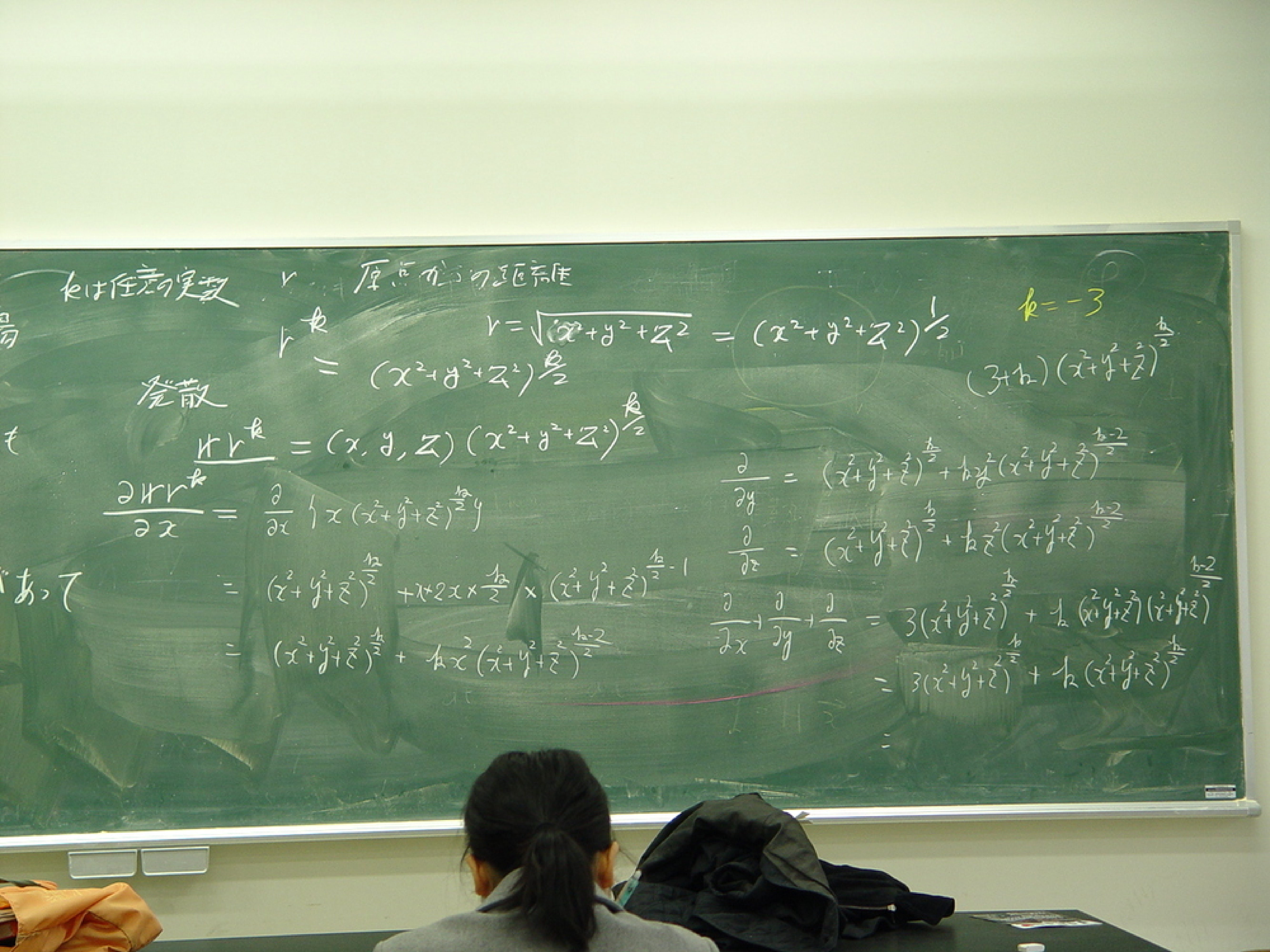
1) $\operatorname{div} \mathbb{F} = 0$

2) いかなる閉曲面 Σ についても

$$\int_\Sigma \mathbb{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

3) あるベクトル場 $\mathbf{g}$ があって

$$\mathbb{F} = \operatorname{rot} \mathbf{g}$$


kは任意の実数
r 原点からの距離
r^k
$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$
$= (x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}}$
$k=-3$
$(3+k)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}}$
発散
$\mathbf{r}r^k = (x, y, z)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}}$
$\frac{\partial \mathbf{r}r^k}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\{x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}}\}$
$= (x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}} + x \times 2x \times \frac{k}{2} \times (x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}-1}$
$= (x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}} + kx^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k-2}{2}}$
$\frac{\partial}{\partial y} = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}} + ky^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k-2}{2}}$
$\frac{\partial}{\partial z} = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}} + kz^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k-2}{2}}$
$\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z} = 3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}} + k(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k-2}{2}}$
$= 3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}} + k(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}}$
$=$
場
も
があって

28回目

西村先生・みなさま:

大変遅くなりましたが先週(02/13)の3限「基礎数学」(西村先生)の3学期8
回め(通算28回め)の聴講報告です。教室は1E203です。出席者は、54名(前回は50名;
昨年同期は35名)+TA1名(中西さん)＋教員1名(私)です。

内容は, 物理学への応用が中心で、保存力の話(仕事が経路によらない)、
力学的エネルギー保存則、逆二乗法則が成り立つ場のdivergenceがゼロである
こと、等でした。

--
奈佐原　顕郎　(旧姓西田)
筑波大学農林工学系
