No.

Date 2009. 1. 30

基礎数学　　50人

ベクトル解析には

古典的なやり方 と 微分形式を使うやり方 がある。

$\wedge$ くさび形積 (wedge product)

1次の微分形式 $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 線形

2次の微分形式 $\varphi_1 \wedge \varphi_2 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 線形 & 交代

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2) = \varphi_1(\mathbb{a}_1)\varphi_2(\mathbb{a}_2) - \varphi_1(\mathbb{a}_2)\varphi_2(\mathbb{a}_1)$$ (定義)

ここで、$\varphi_1 = dx : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto x_1$

$\varphi_2 = dy : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto x_2$ とすると、

$\mathbb{a}_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \end{pmatrix}$ $\mathbb{a}_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \end{pmatrix}$ に対して

$$(dx \wedge dy)(\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2) = dx(\mathbb{a}_1)dy(\mathbb{a}_2) - dx(\mathbb{a}_2)dy(\mathbb{a}_1)$$
$$= a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

同様に、

$$(dy \wedge dz)(\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2) = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix}$$

$$(dz \wedge dx)(\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2) = \begin{vmatrix} a_1^3 & a_2^3 \\ a_1^1 & a_2^1 \end{vmatrix}$$

No.

Date

さて、
$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} a_3^1 \\ a_3^2 \\ a_3^3 \end{pmatrix}$$

行列式 $|\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}$ ⇐ サラスの方法で計算できる

$$= a_1^1 a_2^2 a_3^3 + a_1^3 a_2^1 a_3^2 + a_1^2 a_2^3 a_3^1$$
$$- a_1^3 a_2^2 a_3^1 - a_1^1 a_2^3 a_3^2 - a_1^2 a_2^1 a_3^3$$

1次の微分形式 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 線形

3次の微分形式 $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 線形&交代

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3)(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$$
$$= \varphi_1(\mathbf{a}_1)\varphi_2(\mathbf{a}_2)\varphi_3(\mathbf{a}_3) + \varphi_3(\mathbf{a}_1)\varphi_1(\mathbf{a}_2)\varphi_2(\mathbf{a}_3) + \varphi_2(\mathbf{a}_1)\varphi_3(\mathbf{a}_2)\varphi_1(\mathbf{a}_3)$$
$$- \varphi_3(\mathbf{a}_1)\varphi_2(\mathbf{a}_2)\varphi_1(\mathbf{a}_3) - \varphi_1(\mathbf{a}_1)\varphi_3(\mathbf{a}_2)\varphi_2(\mathbf{a}_3) - \varphi_2(\mathbf{a}_1)\varphi_1(\mathbf{a}_2)\varphi_3(\mathbf{a}_3)$$

(定義)

ここで、
$$\varphi_1 = dx$$
$$\varphi_2 = dy$$
$$\varphi_3 = dz$$
とすると、

$$(dx \wedge dy \wedge dz)(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = |\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3|$$

No.

Date

くさび形積の性質

$\left.\begin{matrix} \varphi_1, \ \varphi_2, \ \varphi_3 \\ \varphi_1', \ \varphi_2', \ \varphi_3' \end{matrix}\right\}$ を1次の微分形式とする。

α, β をスカラーとする.

☆ $\varphi_1 \wedge \varphi_2 = -\varphi_2 \wedge \varphi_1$

☆ $(\varphi_1 + \varphi_1') \wedge \varphi_2 = \varphi_1 \wedge \varphi_2 + \varphi_1' \wedge \varphi_2$

☆ $(\alpha \varphi_1) \wedge \varphi_2 = \alpha(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$

☆ $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 = -\varphi_1 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_2$

☆ $(\varphi_1 + \varphi_1') \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 + \varphi_1' \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$

☆ $(\alpha \varphi_1) \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 = \alpha(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3)$

$$\begin{array}{ccc}
\text{(古典的なベクトル解析)} & & \text{(微分形式を使うやり方)} \\
\text{スカラー場} & \longleftrightarrow & 0\text{次の微分形式} \\
\downarrow \text{grad} & & d \downarrow \\
\text{ベクトル場} & \longleftrightarrow & 1\text{次の微分形式} \\
\downarrow \text{rot} & & d \downarrow \\
\text{ベクトル場} & \longleftrightarrow & 2\text{次の微分形式} \\
\downarrow \text{div} & & d \downarrow \\
\text{スカラー場} & \longleftrightarrow & 3\text{次の微分形式}
\end{array}$$

No.

Date

つまり、

φ : スカラー場　（0次の微分形式）に対して、

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$ とは、

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$ …… 1次の微分形式

べき零無限小じゃないよ！

また、

$\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$: ベクトル場　（1次の微分形式）に対して、

（つまり、$f\,dx + g\,dy + h\,dz$

$$\mathrm{rot}\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$ とは、

計算ルールを覚えねばならない……

外微分

$$d(f\,dx + g\,dy + h\,dz)$$

$$= df\wedge dx + dg\wedge dy + dh\wedge dz$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)\wedge dx$$

$$+ \left(\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz\right)\wedge dy$$

$$+ \left(\frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial y}dy + \frac{\partial h}{\partial z}dz\right)\wedge dz$$

シンプルなルール。覚えなくてもいい！

$$= -\frac{\partial f}{\partial y}dx\wedge dy$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{dx\wedge dx}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial y}dy\wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z}dz\wedge dx$$

$$= -\frac{\partial g}{\partial z}dy\wedge dz$$

$$+ \frac{\partial g}{\partial x}dx\wedge dy + \frac{\partial g}{\partial y}\underbrace{dy\wedge dy}_{=0} + \frac{\partial g}{\partial z}dz\wedge dy$$

$$-\frac{\partial h}{\partial x}dz\wedge dx =$$

$$+ \frac{\partial h}{\partial x}dx\wedge dz + \frac{\partial h}{\partial y}dy\wedge dz + \frac{\partial h}{\partial z}\underbrace{dz\wedge dz}_{=0}$$

$$= \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)dy\wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right)dz\wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

--- 2次の微分形式

また、 $\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$ ：ベクトル場　（2次の微分形式）に対して、

とつまり、$f\,dy\wedge dz + g\,dz\wedge dx + h\,dx\wedge dy$

$$\mathrm{div}\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$ とは、

$$d\,(f\,dy\wedge dz + g\,dz\wedge dx + h\,dx\wedge dy)$$

$$= df\wedge dy\wedge dz + dg\wedge dz\wedge dx + dh\wedge dx\wedge dy$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)\wedge dy\wedge dz$$

$$+ \left(\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz\right)\wedge dz\wedge dx$$

$$+ \left(\frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial y}dy + \frac{\partial h}{\partial z}dz\right)\wedge dx\wedge dy$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y}\underbrace{dy\wedge dy\wedge dz}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial z}\underbrace{dz\wedge dy\wedge dz}_{=0}$$

$$+ \frac{\partial g}{\partial x}\underbrace{dx\wedge dz\wedge dx}_{=0} + \frac{\partial g}{\partial y}dy\wedge dz\wedge dx + \frac{\partial g}{\partial z}\underbrace{dz\wedge dz\wedge dx}_{=0}$$

$$+ \frac{\partial h}{\partial x}\underbrace{dx\wedge dx\wedge dy}_{=0} + \frac{\partial h}{\partial y}\underbrace{dy\wedge dx\wedge dy}_{=0} + \frac{\partial h}{\partial z}dz\wedge dx\wedge dy$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial g}{\partial y}dy\wedge dz\wedge dx + \frac{\partial h}{\partial z}dz\wedge dx\wedge dy$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz$$

2回の入れかえで $dx\wedge dy\wedge dz$ になる

∴ 3次の微分形式

基礎数学

2009/01/29

ベクトル解析

古典的　と　微分形式　の2通りがある。

$\wedge$　くさび形積 (wedge product)

・一次の微分形式　$\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$　$\boxed{\text{線形写像}}$

その時，$\varphi_1 \wedge \varphi_2$　2次の微分形式が決まる。

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

線形と交代　―入れ換えると符号が変わる
(歪対称)

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(a_1, a_2) = \varphi_1(a_1)\varphi_2(a_2) - \varphi_1(a_2)\varphi_2(a_2)$$

$$\varphi_1 = dx : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto x_1 \qquad a_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \end{pmatrix}$$

(写像)

$$\varphi_2 = dy : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto x_2 \qquad a_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \end{pmatrix}$$

代入すると，

$$\begin{aligned}(dx \wedge dy)(a_1, a_2) &= dx(a_1)\,dy(a_2) - dx(a_2)\,dy(a_1) \\ &= a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2 \\ &= \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

z成分を捨ててしまって
2×2 の行列式

$$(dy \wedge dz)(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix}$$

$$(dz \wedge dx)(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} a_1^3 & a_2^3 \\ a_1^1 & a_2^1 \end{vmatrix}$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} a^1_1 \\ a^2_1 \\ a^3_1 \end{pmatrix} \qquad a_2 = \begin{pmatrix} a^1_2 \\ a^2_2 \\ a^2_3 \end{pmatrix} \qquad a_3 = \begin{pmatrix} a^1_3 \\ a^2_3 \\ a^3_3 \end{pmatrix}$$

$$|a_1 \ a_2 \ a_3| = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} \quad - \quad +$$

サラスの方法

$$= a^1_1 a^2_2 a^3_3 + a^3_1 a^1_2 a^2_3 + a^2_1 a^3_2 a^1_3 - a^3_1 a^2_2 a^1_3$$
$$- a^1_1 a^3_2 a^2_3 - a^2_1 a^1_2 a^3_3$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$: 1次の微分形式 : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 線形

3次の微分形式 : $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 線形と交代

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3)(a_1, a_2, a_3)$$
$$= \varphi_1(a_1)\varphi_2(a_2)\varphi_3(a_3) + \varphi_3(a_1)\varphi_1(a_2)\varphi_2(a_3)$$
$$+ \varphi_2(a_1)\varphi_3(a_2)\varphi_1(a_3) - \varphi_3(a_1\ \varphi_2(a_2)$$
$$- \varphi_1(a_1)\varphi_3(a_2)\varphi_2(a_3) - \varphi_2(a_1) + \varphi_1(a_2)\varphi_3(a_3)$$

特に,

$\varphi_1 = dx$ $\qquad (dx \wedge dy \wedge dz)(a_1, a_2, a_3)$

$\varphi_2 = dy$ $\qquad = |a_1 \ a_2 \ a_3|$

$\varphi_3 = dz$

くさび形積の性質

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ = 1次の微分形式

$\varphi_2', \varphi_3', \varphi^3$

α, β : スカラー

$$\begin{cases} \varphi_1 \wedge \varphi_2 = -\varphi_2 \wedge \varphi_1 \\ (\varphi_1 + \varphi_1') \wedge \varphi_2 = \varphi_1 \wedge \varphi_2 + \varphi_1' \wedge \varphi_2 \\ \alpha \varphi_1 \wedge \varphi_2 = \alpha(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \end{cases}$$

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 = -\varphi_1 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_2$$

個迷する

$$(\varphi_1 + \varphi_1') \wedge \varphi_2 + \varphi_3 = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 - \varphi_1' \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$$

$$\alpha \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 = \alpha(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3)$$

ベクトル解析の

主役

作用素という d

$d^2 = 0$ じゃない

$$\begin{array}{ccc} \text{スカラー場} & \longleftrightarrow & \text{0次の微分形式} \\ \downarrow \text{grad} & & d \downarrow \\ \text{ベクトル場} & \longleftrightarrow & \text{1次の微分形式} \\ \downarrow \text{rot} & & d \downarrow \\ \text{ベクトル場} & \longleftrightarrow & \text{2次の微分形式} \\ \downarrow \text{div} & & d \downarrow \\ \text{スカラー場} & \longleftrightarrow & \text{3次の微分形式} \end{array}$$

ルール

$$-dy \wedge dx = dx \wedge dy$$

$$\underbrace{dx \wedge dx}_{\text{same}} = 0$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$

3つ成分がある

↳ ベクトル

スカラー場 0次の微分形式 φ

↓grad 対応

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz = d\varphi$$

ベクトル場 1次

3つのスカラー関数

$f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{rot}\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

古典的なやり方

$$\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \longleftrightarrow f dx + g dy + h dz$$

スカラー 微分形式

$$d(f dx + g dy + h dz)$$

覚えなくていい

単純な計算

$$= \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) dz \wedge dx$$

$$+ \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

$$df \wedge dx + dg \wedge dy + dh \wedge dz$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right) \wedge dx}_{①} + \underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz\right) \wedge dy}_{②}$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial y}dy + \frac{\partial h}{\partial z}dz\right) \wedge dz}_{③}$$

① $\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right) \wedge dx$

$$= \underbrace{\cancel{\frac{\partial f}{\partial x}dx \wedge dx}}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial y}dy \wedge dx + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}dz \wedge dx}$$

同じもののくさび形積をとれば 0 になる.

② $\left(\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz\right) \wedge dy$

ないのと同じ

$$= \frac{\partial g}{\partial x}dx \wedge dy + \underbrace{\cancel{\frac{\partial g}{\partial y}dy \wedge dy}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial z}dz \wedge dy}$$

入れかえるだけ

③ $\left(\frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial y}dy + \frac{\partial h}{\partial z}dz\right) \wedge dz$

$$= \underbrace{\frac{\partial h}{\partial x}dx \wedge dz} + \underbrace{\frac{\partial h}{\partial y}dy \wedge dz} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial h}{\partial z}dz \wedge dz}}_{=0}$$

入れかえるだけ

dx とdy

$\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right)$ が出てくる.

前のページの

$\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)$ が出てくる.

☆ 微分形式の計算だと覚えなくていい

└ 単純な計算

2つ入れかえたら符号はかわる.

ベクトル場
$\downarrow$ div
スカラー場

$$\mathrm{div}\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

微分形式のやり方

$$d\left(f\,dy\wedge dz + g\,dz\wedge dx + h\,dx\wedge dy\right)$$
$$= df\wedge dy\wedge dz + dg\wedge dz\wedge dx + dh\wedge dx\wedge dy$$
$$= \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)\wedge dy\wedge dz}_{\text{書き直し}}$$
$$\| $$
$$\frac{\partial f}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y}\underbrace{dy\wedge dy\wedge dz}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial z}\underbrace{dz\wedge dy\wedge dz}_{=0}$$
3つの項

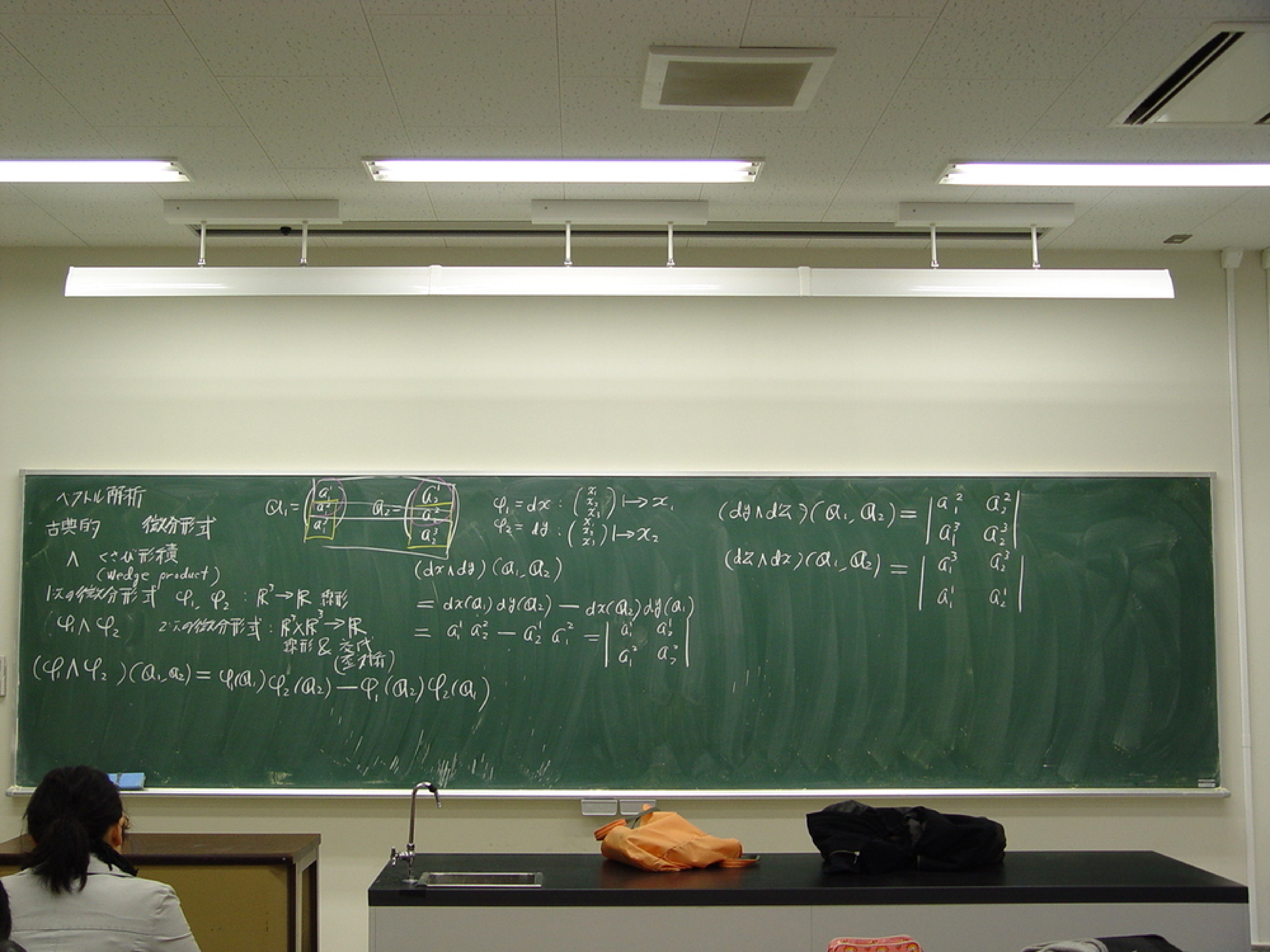
$$\left(\cancel{\frac{\partial g}{\partial x}dx} + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \cancel{\frac{\partial g}{\partial z}dz}\right)\wedge dz\wedge dx$$
$$= \frac{\partial g}{\partial y}dy\wedge dz\wedge dx$$
2回入れ換えるから もとに戻る
$$= \frac{\partial g}{\partial y}dx\wedge dy\wedge dz$$

$\boxed{\text{残りも同じ}}$

$$\varphi \longleftrightarrow \varphi\, dx\wedge dy\wedge dz$$

くさび形積
↳覚えることはないから

$\boxed{d\ \text{外微分}}$



ベクトル解析
古典的 微分形式
∧ くさび形積
(wedge product)
1次の微分形式 $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 線形
$\varphi_1 \wedge \varphi_2$ 2次の微分形式 : $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
線形 & 交代
(歪対称)
$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(a_1, a_2) = \varphi_1(a_1)\varphi_2(a_2) - \varphi_1(a_2)\varphi_2(a_1)$
$a_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \end{pmatrix}$ $a_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \end{pmatrix}$
$\varphi_1 = dx : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1$
$\varphi_2 = dy : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_2$
$(dx \wedge dy)(a_1, a_2)$
$= dx(a_1)dy(a_2) - dx(a_2)dy(a_1)$
$= a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix}$
$(dy \wedge dz)(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix}$
$(dz \wedge dx)(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} a_1^3 & a_2^3 \\ a_1^1 & a_2^1 \end{vmatrix}$

ベクトル解析

古典的　　微分形式

$\wedge$ くさび形積
(wedge product)

1次の微分形式 $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 線形

$\varphi_1 \wedge \varphi_2$　　2次の微分形式 : $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
線形 & 交代
(歪対称)

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(a_1, a_2) = \varphi_1(a_1)\varphi_2(a_2) - \varphi_1(a_2)\varphi_2(a_1)$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_1 = dx : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto x_1$$

$$\varphi_2 = dy : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto x_2$$

$$(dx \wedge dy)(a_1, a_2)$$

$$= dx(a_1)dy(a_2) - dx(a_2)dy(a_1)$$

$$= a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \end{pmatrix}$$

$\varphi_1 = dx : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto x_1$

$\varphi_2 = dy : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto x_2$

$$(dy \wedge dz)(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix}$$

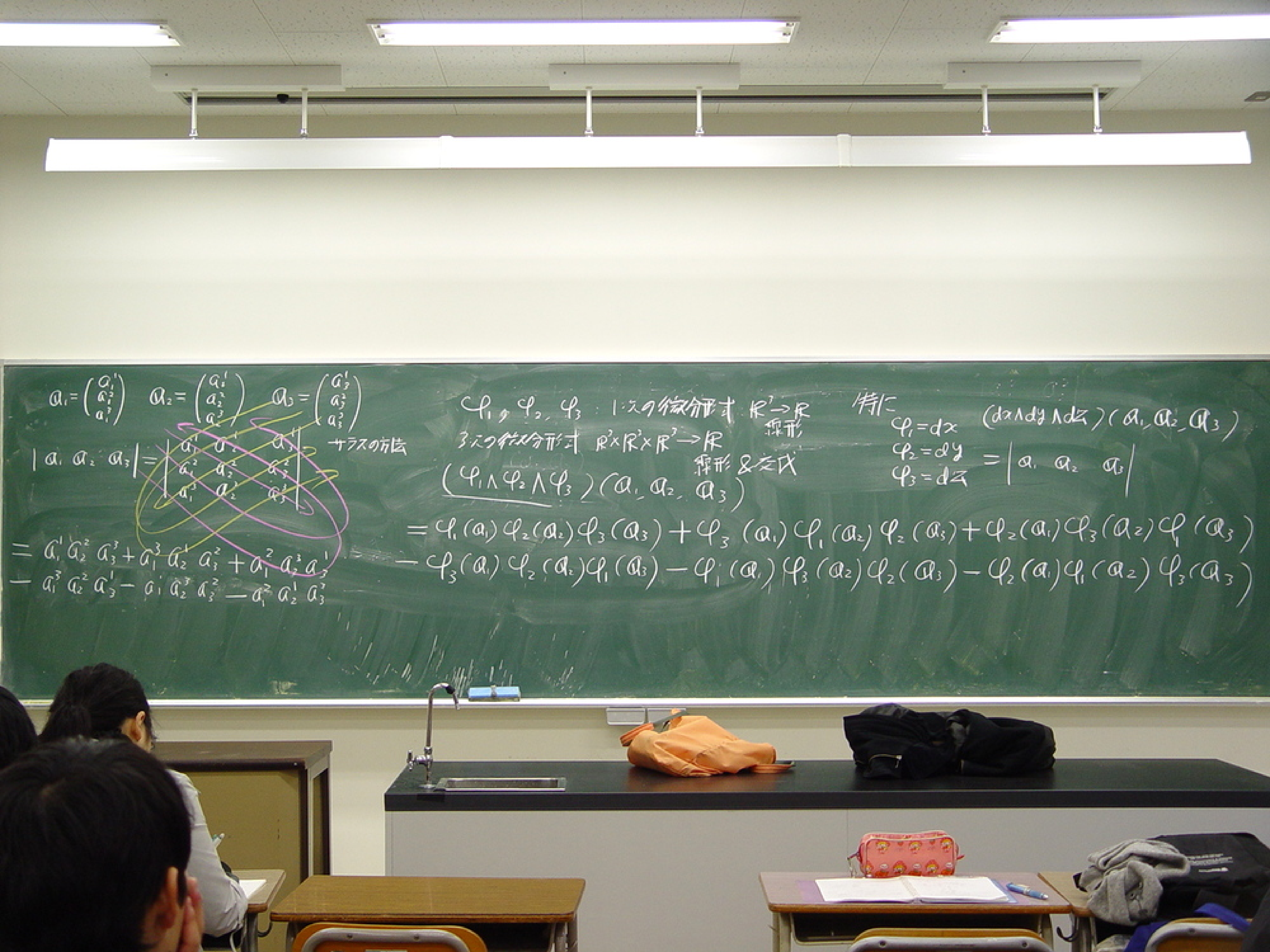
$$(dz \wedge dx)(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} a_1^3 & a_2^3 \\ a_1^1 & a_2^1 \end{vmatrix}$$

$$(dx \wedge dy)(a_1, a_2)$$

$$= dx(a_1)\, dy(a_2) - dx(a_2)\, dy(a_1)$$

$$= a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

$$)\varphi_2(a_1)$$



$a_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \end{pmatrix}$ $a_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \end{pmatrix}$ $a_3 = \begin{pmatrix} a_3^1 \\ a_3^2 \\ a_3^3 \end{pmatrix}$
$|a_1\ a_2\ a_3| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}$
サラスの方法
$= a_1^1 a_2^2 a_3^3 + a_1^3 a_2^1 a_3^2 + a_1^2 a_2^3 a_3^1$
$- a_1^3 a_2^2 a_3^1 - a_1^1 a_2^3 a_3^2 - a_1^2 a_2^1 a_3^3$
$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$: 1次の微分形式 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 線形
3次の微分形式 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 線形 & 交代
$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3)(a_1, a_2, a_3)$
$= \varphi_1(a_1)\varphi_2(a_2)\varphi_3(a_3) + \varphi_3(a_1)\varphi_1(a_2)\varphi_2(a_3) + \varphi_2(a_1)\varphi_3(a_2)\varphi_1(a_3)$
$- \varphi_3(a_1)\varphi_2(a_2)\varphi_1(a_3) - \varphi_1(a_1)\varphi_3(a_2)\varphi_2(a_3) - \varphi_2(a_1)\varphi_1(a_2)\varphi_3(a_3)$
特に
$\varphi_1 = dx$
$\varphi_2 = dy$
$\varphi_3 = dz$
$(dx \wedge dy \wedge dz)(a_1, a_2, a_3)$
$= |a_1\ a_2\ a_3|$

$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} a_3^1 \\ a_3^2 \\ a_3^3 \end{pmatrix}$

$$|\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

サラスの方法

$$= a_1^1 a_2^2 a_3^3 + a_1^3 a_2 a_3^2 + a_1^2 a_2^3 a_3^1 - a_1^3 a_2^2 a_3^1 - a_1 a_2^3 a_3^2 - a_1^2 a_2^1 a_3^3$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$: 1次の微分

3次の微分形式 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to$

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3)(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2,$$

$$= \varphi_1(\mathbf{a}_1)\varphi_2(\mathbf{a}_2)\varphi_3(\mathbf{a}_3) +$$

$$- \varphi_3(\mathbf{a}_1)\varphi_2(\mathbf{a}_2)\varphi_1(\mathbf{a}_3) -$$

1次の微分形式 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 線形

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 線形 & 交代

(a_1, a_2, a_3)

特に

$\varphi_1 = dx$

$\varphi_2 = dy$

$\varphi_3 = dz$

$$(dx \wedge dy \wedge dz)(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$${}_3(a_3) + \varphi_3(a_1)\varphi_1(a_2)\varphi_2(a_3) + \varphi_2(a_1)\varphi_3(a_2)\varphi_1(a_3)$$

$${}_1(a_3) - \varphi_1(a_1)\varphi_3(a_2)\varphi_2(a_3) - \varphi_2(a_1)\varphi_1(a_2)\varphi_3(a_3)$$

くさび形積の性質

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$: 1次の微分形式

$\varphi_1', \varphi_2', \varphi_3'$

α, β スカラー

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 = - \varphi_2 \wedge \varphi_1$$

$$(\varphi_1 + \varphi_1') \wedge \varphi_2 = \varphi_1 \wedge \varphi_2 + \varphi_1' \wedge \varphi_2$$

$$\alpha \varphi_1 \wedge \varphi_2 = \alpha (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$$

$$|a_1 \ a_2 \ a_3|$$

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 = - \varphi_1 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_2$$

$$(\varphi_1 + \varphi_1') \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 + \varphi_1' \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$$

$$\alpha \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 = \alpha (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3)$$

主役

スカラー場 ⟷ 0次の微分形式

$\downarrow$ grad　　　d $\downarrow$

$\boxed{\text{ベクトル場} \longleftrightarrow \text{1次の微分形式}}$

$\downarrow$ rot　　　d $\downarrow$

ベクトル場 ⟷ 2次の微分形式　$\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \longleftrightarrow f\,dx + g\,dy + h\,dz$

$\downarrow$ div　　　d $\downarrow$

スカラー場 ⟷ 3次の微分形式

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$

$$\varphi \longrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz = d\varphi$$

e.g. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{rot}\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$\frac{dy}{dx}$

$d(f\,dx + g\,dy$

$= \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right.$

$+ \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx$

覚える必要はない

① $\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right)\wedge dx$

$=\underbrace{\cancel{\frac{\partial f}{\partial x}dx\wedge dx}}_{=0}+\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}dy\wedge dx+\boxed{\frac{\partial f}{\partial z}dz\wedge dx}}$

② $\left(\frac{\partial g}{\partial x}dx+\cancel{\frac{\partial g}{\partial y}dy}+\frac{\partial g}{\partial z}dz\right)\wedge dy$

$=\boxed{\frac{\partial g}{\partial x}dx\wedge dy+\frac{\partial g}{\partial z}dz\wedge dy}$

$\left(\frac{\partial h}{\partial x}dx+\frac{\partial h}{\partial y}dy+\cancel{\frac{\partial h}{\partial z}dz}\right)\wedge dz$

$=\boxed{\boxed{\frac{\partial h}{\partial x}dx\wedge dz}+\frac{\partial h}{\partial y}dy\wedge dz}$

grad φ

$\varphi \longrightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial x}$

$h, g, f : \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

rot $\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \longleftrightarrow f\,dx+g\,dy+$

$$\ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big)$$

$$\frac{dy}{dx}$$

$$df \wedge dx + dg \wedge dy + dh \wedge dz$$

$$= \boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right) \wedge dx} \quad ①$$

$$+ \boxed{\left(\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz\right) \wedge dy} \quad ②$$

$$+ \left(\frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial y}dy + \frac{\partial h}{\partial z}dz\right) \wedge dz$$

$$\ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi$$

$$\begin{pmatrix} \ldots\frac{\partial g}{\partial z} \\ \ldots\frac{\partial h}{\partial x} \\ \ldots\frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$d(f\,dx + g\,dy + h\,dz)$$

$$= \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) dz \wedge dx$$

$$+ \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

ベクトル場

↓div

スカラー場

$$\varphi \Longleftrightarrow \varphi\, dx \wedge dy \wedge dz$$

$$\mathrm{div}\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

$$d(f\, dy \wedge dz + g\, dz \wedge dx + h\, dx \wedge dy)$$

$$= df \wedge dy \wedge dz + dg \wedge dz \wedge dx + dh \wedge dx \wedge dy$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) \wedge dy \wedge dz$$

d 外微分

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y} \underbrace{dy \wedge dy \wedge dz}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial z} \underbrace{dz \wedge dy \wedge dz}_{=0}$$

$$\left(\cancel{\frac{\partial g}{\partial x} dx} + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \cancel{\frac{\partial g}{\partial z} dz} \right) \wedge dz \wedge dx = \frac{\partial g}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx = \frac{\partial g}{\partial y} dx \wedge dy \wedge dz$$

ベクトル場

$\downarrow \mathrm{div}$

スカラー場

$$\varphi \longleftrightarrow \varphi\, dx \wedge dy \wedge dz$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} d \right.$$

d 外微分 $\frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz$

$$\left(\cancel{\frac{\partial g}{\partial x} dx} + \frac{\partial g}{\partial y} \right.$$

$$\mathrm{div} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

$$d(f\, dy \wedge dz + g\, dz \wedge dx + h\, dx \wedge dy)$$

$$= df \wedge dy \wedge dz + \underline{dg \wedge dz \wedge dx} + dh \wedge dx \wedge dy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\Big)\wedge dy\wedge dz$$

$$\parallel$$

$$y\wedge dz+\frac{\partial f}{\partial y}\underbrace{dy\wedge dy\wedge dz}_{=0}+\frac{\partial f}{\partial z}\underbrace{dz\wedge dy\wedge dz}_{=0}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}dy+\cancel{\frac{\partial g}{\partial z}dz}\Big)\wedge dz\wedge dx=\frac{\partial g}{\partial y}dy\wedge dz\wedge dx=\frac{\partial g}{\partial y}dx\wedge dy\wedge dz$$

26回目

西村先生・みなさま:

本日01/30の3限、「基礎数学」(西村先生)の3学期6回め(通算26回め)を
聴講しました。教室は1E203です。出席者は、50名(前回は51名;昨年同期
は34名)＋教員1名(私)です。

内容は,
- くさび形積(wedge product)の性質。
- 古典的なベクトル解析と微分形式の対応
- grad, rot, divと外微分の対応
などについてでした。

私自身、非常におもしろかったです。これらの話題は、1学期(6/20)に伏線が
張られており、その答えがようやく明らかにされた瞬間でした。計算はやや煩雑
ですが、基本的な考え方は明快ですので、多くの学生が理解し、感動してくれた
ことと(希望的に)思います。次回はポアンカレの補題あたりでしょうか。

1年生の標準的な数学の講義で微分形式、しかも外微分までやる例というのは
私は聞いたことがありませんが、西村先生の、丁寧でシンプルで着実なやりかた
を拝見すると、決して1年生にとって無理な内容とは思えません。このような
スタイルでベクトル空間を認識して理解した学生を、次にどのように導いていく
か、というのが、我々生物資源学類の課題ではないでしょうか?

--
奈佐原　顕郎　(旧姓西田)
筑波大学農林工学系
