No.

Date 2009. 1. 9

# 基礎数学　51人 + ナサハラ + 中井

## Stokesの定理

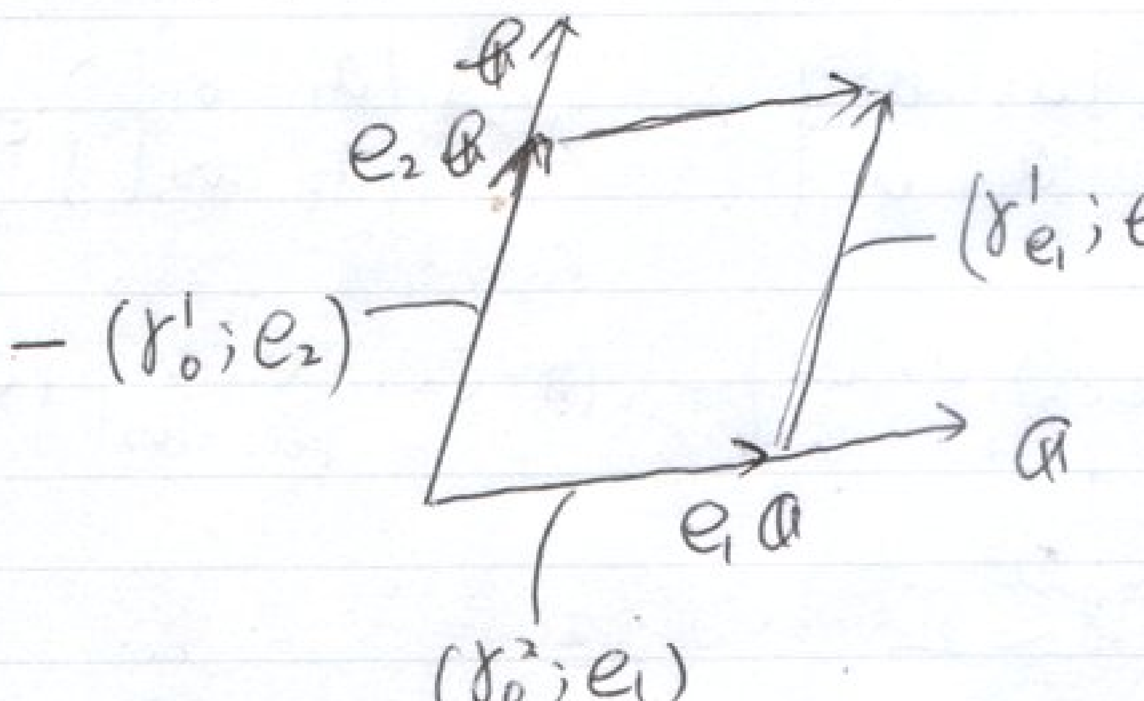
$$\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$$

$$\gamma : (d_1, d_2) \in D^2 \longmapsto x + a d_1 + b d_2$$

$$(x,\ a,\ b \in \mathbb{R}^3)$$

$$(e_1, e_2) \in D^2$$

$$\partial(\gamma; e_1, e_2) = (\gamma_0^2; e_1) + (\gamma_{e_1}^1; e_2) - (\gamma_{e_2}^2; e_1) - (\gamma_0^1; e_2)$$




$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\partial(\gamma; e_1, e_2)} \omega = \cdots = \left\{ f'(x)(a)\, b_1 + g'(x)(a)\, b_2 + h'(x)(a)\, b_3 \right\} e_1 e_2$$

$$- \left\{ f'(x)(b)\, a_1 + g'(x)(b)\, a_2 + h'(x)(b)\, a_3 \right\} e_1 e_2$$

$$= \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} f'(x)(a) \\ g'(x)(a) \\ h'(x)(a) \end{pmatrix} \cdot b - \begin{pmatrix} f'(x)(b) \\ g'(x)(b) \\ h'(x)(b) \end{pmatrix} \cdot a \right\}} e_1 e_2$$

これを $\varphi(a, b)$ とおこう。

$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$　これは実はきれいな性質をもってる。

つまり…
- ・$\varphi$ は二重線形写像。（$f'(x)(a)$ は $a$ について線形写像であることに注意。）
- ・$\varphi(a, b) = -\varphi(b, a)$　つまり交代性

→ つまり、$\varphi$ は交代形式。

以前やったように、一般に、$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ の交代形式は、

$$\alpha_1\, dy \wedge dz + \alpha_2\, dz \wedge dx + \alpha_3\, dx \wedge dy$$

と書けるはず（$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$）。

では、$\varphi(\mathbb{a}, \mathbb{b})$ について、$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を求めてみよう。

たとえば、$\mathbb{a} = \mathbb{e}_2$, $\mathbb{b} = \mathbb{e}_3$ とすると、

$$(\alpha_1\, dy \wedge dz + \alpha_2\, dz \wedge dx + \alpha_3\, dx \wedge dy)(\mathbb{e}_2, \mathbb{e}_3) = \alpha_1$$

$$\varphi(\mathbb{e}_2, \mathbb{e}_3) = \begin{pmatrix} f'(x)(\mathbb{e}_2) \\ g'(x)(\mathbb{e}_2) \\ h'(x)(\mathbb{e}_2) \end{pmatrix} \cdot \mathbb{e}_3 - \begin{pmatrix} f'(x)(\mathbb{e}_3) \\ g'(x)(\mathbb{e}_3) \\ h'(x)(\mathbb{e}_3) \end{pmatrix} \cdot \mathbb{e}_2$$

$$= h'(x)(\mathbb{e}_2) - g'(x)(\mathbb{e}_3) = \frac{\partial h}{\partial y}(x) - \frac{\partial g}{\partial z}(x)$$

$$\therefore \alpha_1 = \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}$$

同様に、$\mathbb{a} = \mathbb{e}_3$, $\mathbb{b} = \mathbb{e}_1$ とすると… $\alpha_2 = \dfrac{\partial f}{\partial z} - \dfrac{\partial h}{\partial x}$

$\mathbb{a} = \mathbb{e}_1$, $\mathbb{b} = \mathbb{e}_2$ とすると… $\alpha_3 = \dfrac{\partial g}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y}$

こういうふうに、めんどうな計算なしに $\varphi(\mathbb{a}, \mathbb{b})$ の形が導かれる。
プロはちがうよね。 12/19

No.

Date

## 発散定理（Gaussの定理）

$$\omega = f\, dy\wedge dz + g\, dz\wedge dx + h\, dx\wedge dy$$

$$\gamma : (d_1, d_2, d_3) \in D^3 \longmapsto \mathbf{x} + \mathbf{a} d_1 + \mathbf{b} d_2 + \mathbf{c} d_3$$

$$(\mathbf{x},\ \mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3)$$

$$(e_1,\ e_2,\ e_3) \in D^3$$

マイナス!

$$\partial(\gamma; e_1, e_2, e_3) = -(\gamma_0^1; e_2, e_3) + (\gamma_{e_1}^1; e_2, e_3) + (\gamma_0^2; e_1, e_3)$$

$$- (\gamma_{e_2}^2; e_1, e_3) - (\gamma_0^3; e_1, e_2) + (\gamma_{e_3}^3; e_1, e_2)$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\partial(\gamma; e_1, e_2, e_3)} \omega = \left\{ f'(\mathbf{x})(\mathbf{a}) \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + g'(\mathbf{x})(\mathbf{a}) \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + h'(\mathbf{x})(\mathbf{a}) \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right\} e_1 e_2 e_3$$

$$- \left\{ f'(\mathbf{x})(\mathbf{b}) \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + g'(\mathbf{x})(\mathbf{b}) \begin{vmatrix} a_3 & c_3 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} + h'(\mathbf{x})(\mathbf{b}) \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \right\} e_1 e_2 e_3$$

$$+ \left\{ f'(\mathbf{x})(\mathbf{c}) \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + g'(\mathbf{x})(\mathbf{c}) \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + h'(\mathbf{x})(\mathbf{c}) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right\} e_1 e_2 e_3$$

(☆)

ところで、一般に、3次正方行列の行列式は、

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_3 & \gamma_3 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

と書ける。（余因子展開）

これを使うと、

No.

Date

$$(☆) = \left\{ \begin{vmatrix} f'(x)(\mathbf{a}) & b_1 & c_1 \\ g'(x)(\mathbf{a}) & b_2 & c_2 \\ h'(x)(\mathbf{a}) & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & f'(x)(\mathbf{b}) & c_1 \\ a_2 & g'(x)(\mathbf{b}) & c_2 \\ a_3 & h'(x)(\mathbf{b}) & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & f'(x)(\mathbf{c}) \\ a_2 & b_2 & g'(x)(\mathbf{c}) \\ a_3 & b_3 & h'(x)(\mathbf{c}) \end{vmatrix} \right\} e_1 e_2 e_3$$

これを $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ とおこう。

$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

まず、これは3重線形写像。

また、たとえば第2項で $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ を入れかえてみると、

$$\begin{vmatrix} b_1 & f'(x)(\mathbf{a}) & c_1 \\ b_2 & g'(x)(\mathbf{a}) & c_2 \\ b_3 & h'(x)(\mathbf{a}) & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} f'(x)(\mathbf{a}) & b_1 & c_1 \\ g'(x)(\mathbf{a}) & b_2 & c_2 \\ h'(x)(\mathbf{a}) & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \text{第一項} \times (-1).$$

入れかえて

こういうふうに考えていけば、$\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -\varphi(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c})$
がわかる。

つまり、交代性。

つまり、$\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ は3次の交代形式

以前やったように、$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ の交代形式は、一般に、

$$\alpha \, dx \wedge dy \wedge dz$$

と書けるはず。$(\alpha \in \mathbb{R})$

では、$\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ について $\alpha$ をきめてみよう。

たとえば $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{c} = \mathbf{e}_3$ とすると、

$$(\alpha \, dx \wedge dy \wedge dz)(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \alpha$$

$$\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \left\{ \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial g}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix} \right\} e_1 e_2 e_3$$

$$= \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) e_1 e_2 e_3$$

# 基礎数学

2008/01/09

Stokesの定理

$$w = f\,dx + g\,dy + h\,dz$$

$$\gamma : (d_1, d_2) \in D^2 \longmapsto x + a d_1 + b d_2 \quad (x, a, b \in \mathbb{R}^3)$$

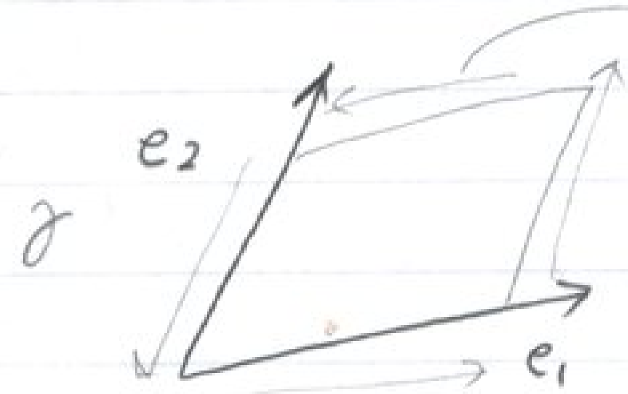
2番目の成分を0にする

$\gamma(d_1, d_2)$ これが0になる

$(e_1, e_2) \in D^2$

$$\partial(\gamma; e_1, e_2) = (\gamma^2_0; e_1) + (\gamma^1_{e_1}; e_2) - (\gamma^2_{e_2}; e_1) - (\gamma^1_0; e_2)$$

反対方向だから(−)になる



$$\int_{\partial(\gamma; e_1, e_2)} w = \cdots = \{f'(x)(a) b_1 + g'(x)(a) b_2 + h'(x)(a) b_3\} e_1 e_2$$

$$- \{f'(x)(b) a_1 + g'(x)(b) a_2 + h'(x)(b) a_3\} e_1 e_2$$

線形写像

$$= \left\{ \boxed{\begin{pmatrix} f'(x)(a) \\ g'(x)(a) \\ h'(x)(a) \end{pmatrix} \cdot b - \begin{pmatrix} f'(x)(b) \\ g'(x)(b) \\ h'(x)(b) \end{pmatrix} \cdot a} \right\} e_1 e_2$$

きれいな形

$\varphi(a, b) =$

$x$をこていしておいて $a$と$b$を動かしている

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$a = a_1 + a_2$$

$$\varphi(a_1 + a_2, b) = \varphi(a_1, b) + \varphi(a_2, b)$$

$a$と$b$を入れかえる

$$\varphi(a, b) = -\varphi(b, a)$$ 符号が変わる

$a$を固定しておいて $b$を動かしても線形

$b$を固定してて $a$を動かしてて線形

⇒ 二重線形

交代(歪対称)

alternating

skew-symmetric

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\alpha_1 dy \wedge dz + \alpha_2 dz \wedge dx + \alpha_3 dx \wedge dy$$

3つの係数を決めればいい

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ の決定

この3つを基底と

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

前のページの

$$= \left\{ \begin{pmatrix} f'(x)(\mathbb{a}) \\ g'(x)(\mathbb{a}) \\ h'(x)(\mathbb{a}) \end{pmatrix} \cdot \mathbb{b} - \begin{pmatrix} f'(x)(\mathbb{b}) \\ g'(x)(\mathbb{b}) \\ h'(x)(\mathbb{b}) \end{pmatrix} \cdot \mathbb{a} \right\} e_1 e_2$$

$\mathbb{a} = \mathbb{e}_2$, $\mathbb{b} = \mathbb{e}_3$

標準基底

$e_1$ $e_2$ とかは スカラー

$\mathbb{a}$を$\mathbb{e}_2$として $\mathbb{b}$を$\mathbb{e}_3$

z成分だけが1 だから

この2つ かんけいない

$\mathbb{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

y成分だけ1

$$\begin{pmatrix} \cancel{f'(x)(\mathbb{e}_2)} \\ \cancel{g'(x)(\mathbb{e}_2)} \\ h'(x)(\mathbb{e}_2) \end{pmatrix} \cdot \mathbb{e}_3 - \begin{pmatrix} \cancel{f'(x)(\mathbb{e}_3)} \\ g'(x)(\mathbb{e}_3) \\ \cancel{h'(x)(\mathbb{e}_3)} \end{pmatrix} \cdot \mathbb{e}_2$$

z成分だけが 出てくる

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x) - \frac{\partial g}{\partial z}(x)$$

$\mathbb{a} = \mathbb{e}_3$ $\mathbb{b} = \mathbb{e}_1$

$\mathbb{a} = \mathbb{e}_1$ $\mathbb{b} = \mathbb{e}_2$

としたときも同じ

## 発散定理

$$w = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$$

$$\gamma : (d_1, d_2, d_3) \in D^3 \longmapsto x + \mathbb{a} d_1 + \mathbb{b} d_2 + \mathbb{c} d_3$$

$$(x, \mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in \mathbb{R}^3)$$

$$(e_1, e_2, e_3) \in D^3$$

$$\partial(\gamma; e_1, e_2, e_3) = -(\gamma_0^1; e_2, e_3) + (\gamma_{e_1}^1; e_2, e_3) + (\gamma_0^2; e_1, e_3)$$
$$- (\gamma_{e_2}^2; e_1, e_3) - (\gamma_0^3; e_1, e_2) + (\gamma_{e_3}^3; e_1, e_2)$$

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \mathbb{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\partial(\gamma; e_1, e_2, e_3)} \omega = \left\{ f'(x)(\mathbb{a}) \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + g(x)(\mathbb{a}) \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + h'(x)(\mathbb{a}) \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right\} e_1 e_2 e_3$$
$$- \left\{ f'(x)(\mathbb{b}) \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + g'(x)(\mathbb{b}) \begin{vmatrix} a_3 & c_3 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} + h'(x)(\mathbb{b}) \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \right\} e_1 e_2 e_3$$
$$+ \left\{ f'(x)(\mathbb{c}) \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + g'(x)(\mathbb{c}) \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + h'(x)(\mathbb{c}) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right\} e_1 e_2 e_3$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$
$$= \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_3 & \gamma_3 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \right\}$$
を使って整理すると,

3次元のたてベクトル

$e_1$ $e_2$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} f'(x)(\mathbb{a}) & & \\ g'(x)(\mathbb{a}) & \mathbb{b} & \mathbb{c} \\ h'(x)(\mathbb{a}) & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & f'(x)(\mathbb{b}) & \\ \mathbb{a} & g'(x)(\mathbb{b}) & \mathbb{c} \\ & h'(x)(\mathbb{b}) & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & f'(x)(\mathbb{c}) \\ \mathbb{a} & \mathbb{b} & g'(x)(\mathbb{c}) \\ & & h'(x)(\mathbb{c}) \end{vmatrix} \right\} e_1 e_2 e_3$$

$e_3$ を $e_2$

$\varphi(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c})$ // $3\times3$の行列式

$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\mathbb{a}$と$\mathbb{b}$の役割を入れかえると

三重線形

$$\begin{vmatrix} & f'(x)(\mathbb{a}) & \\ \mathbb{b} & g'(x)(\mathbb{a}) & \mathbb{c} \\ & c'(x)(\mathbb{a}) & \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x) \quad \frac{\partial h}{\partial z}(x)$$

発散

つまり

$\alpha \quad \underline{dx \wedge dy \wedge dz}$

行列式

じゃ $\alpha$を決める

$\mathbb{a} = e_1$
$\mathbb{b} = e_2$
$\mathbb{c} = e_3$
をほうりこめば,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
が残る.

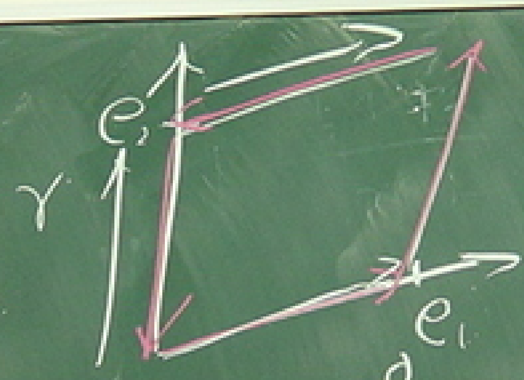

Stokesの定理
ω = fdx + gdy + hdz
γ: (d1, d2) ∈ D² ↦ x + ad1 + bd2
(x, a, b ∈ R³)
(e1, e2) ∈ D²
b − a
φ(a, b)
φ: R³×R³ → R
a = a1 + a2
αa
φ(a1 + a2, b) = φ(a1, b) + φ(a2, b)
aとbを入れかえる φ(a, b) = −φ(b, a)
a = e2, b = e3
二重線形
交代 (歪対称)
alternating skew-symmetric
R³×R³ → R
α1, α2, α3 の決定

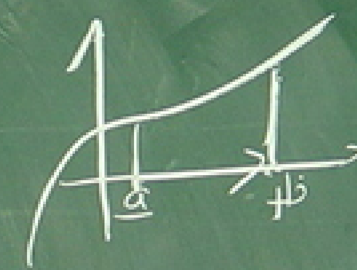
# Stokesの定理

$\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$

$\gamma : (d_1, d_2) \in D^2 \mapsto x + a d_1 + b d_2$

$(x, a, b \in \mathbb{R}^3)$




$b - a$ $\quad \varphi(a, b)$

$(e_1, e_2) \in D^2$ $\qquad \gamma(d_1, \overset{\partial}{d_2})$

$\partial(\gamma; e_1, e_2) = (\gamma^2_0, e_1) + (\gamma^1_{e_1}, e_2) - (\gamma^2_{e_2}, e_1) - (\gamma^1_0, e_2)$

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ $\quad a = e_2,\ b = e_3$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$a = a_1 + a_2 \qquad \alpha a$

$\varphi(a_1 + a_2, b) = \varphi(a_1, b) + \varphi(a_2, b)$

aとbを入れかえる $\varphi(a, b) = -\varphi(b, a)$

$\int_{\partial(\gamma; e_1, e_2)} \omega = \cdots$

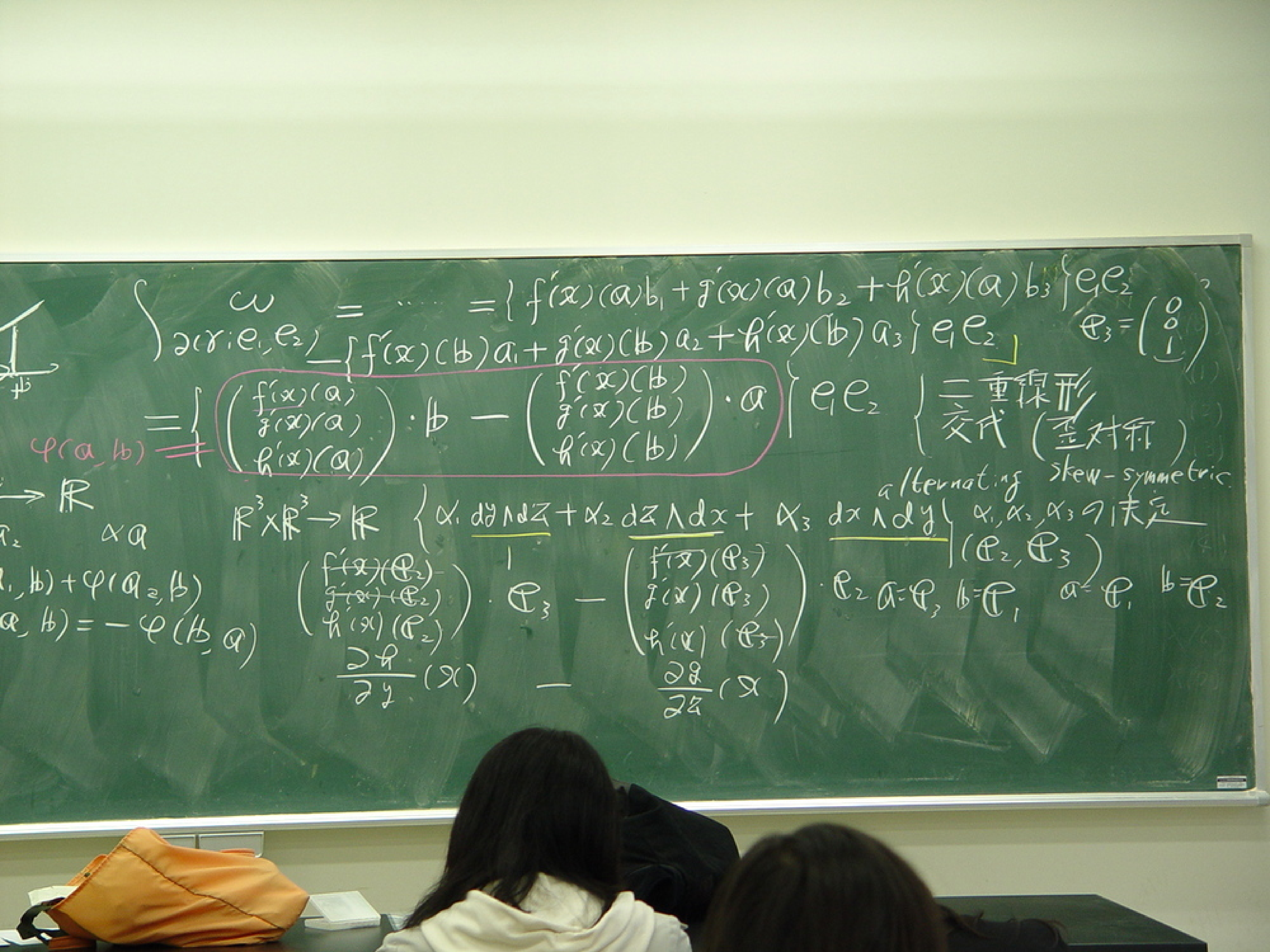
$= \{ f'(x)$

$= \int \begin{pmatrix} f'(x)(a) \\ g'(x)(a) \\ h'(x)(a) \end{pmatrix} \cdot$

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} \cancel{f'(x)(e} \\ \cancel{g'(x)(e} \\ h'(x)(e \end{pmatrix}$

$\frac{\partial h}{\partial y}$



∫ ω = ⋯ = {f'(x)(a)b₁ + g'(x)(a)b₂ + h'(x)(a)b₃} e₁e₂
− {f'(x)(b)a₁ + g'(x)(b)a₂ + h'(x)(b)a₃} e₁e₂
e₃ = (0 0 1)
φ(a, b)
二重線形
交代（歪対称）
alternating
skew-symmetric
R³×R³ → R
α₁ dy∧dz + α₂ dz∧dx + α₃ dx∧dy
α₁, α₂, α₃ の決定
(e₂, e₃)
a = e₃ b = e₁
a = e₁ b = e₂
φ(a, b) = −φ(b, a)
∂h/∂y (x) − ∂g/∂z (x)


発散定理
ω = f dy∧dz + g dz∧dx + h dx∧dy

発散定理

$\omega = f\, dy \wedge dz + g\, dz \wedge dx + h\, dx \wedge dy$

$\gamma : (d_1, d_2, d_3) \in D^3 \mapsto \mathbb{x} + \mathbb{a} d_1 + \mathbb{b} d_2 + \mathbb{c} d_3$

$(\mathbb{x}, \mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in \mathbb{R}^3)$

$(e_1, e_2, e_3) \in D^3$

$\partial(\gamma; e_1, e_2, e_3) = -(\gamma^1_0; e_2, e_3) + (\gamma^1_{e_1}; e_2, e_3) + (\gamma^2_0; e_1, e_3)$

$- (\gamma^2_{e_2}; e_1, e_3) - (\gamma^3_0; e_1, e_2) + (\gamma^3_{e_3}; e_1, e_2)$

$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \mathbb{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

$\left| \mathbb{b} \quad \begin{matrix} f'(x)(\mathbb{a}) \\ g'(x)(\mathbb{a}) \\ h'(x)(\mathbb{a}) \end{matrix} \quad \mathbb{c} \right|$

$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$

$= \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_3 & \gamma_3 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$

(余因子展開)

$\varphi(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c})$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

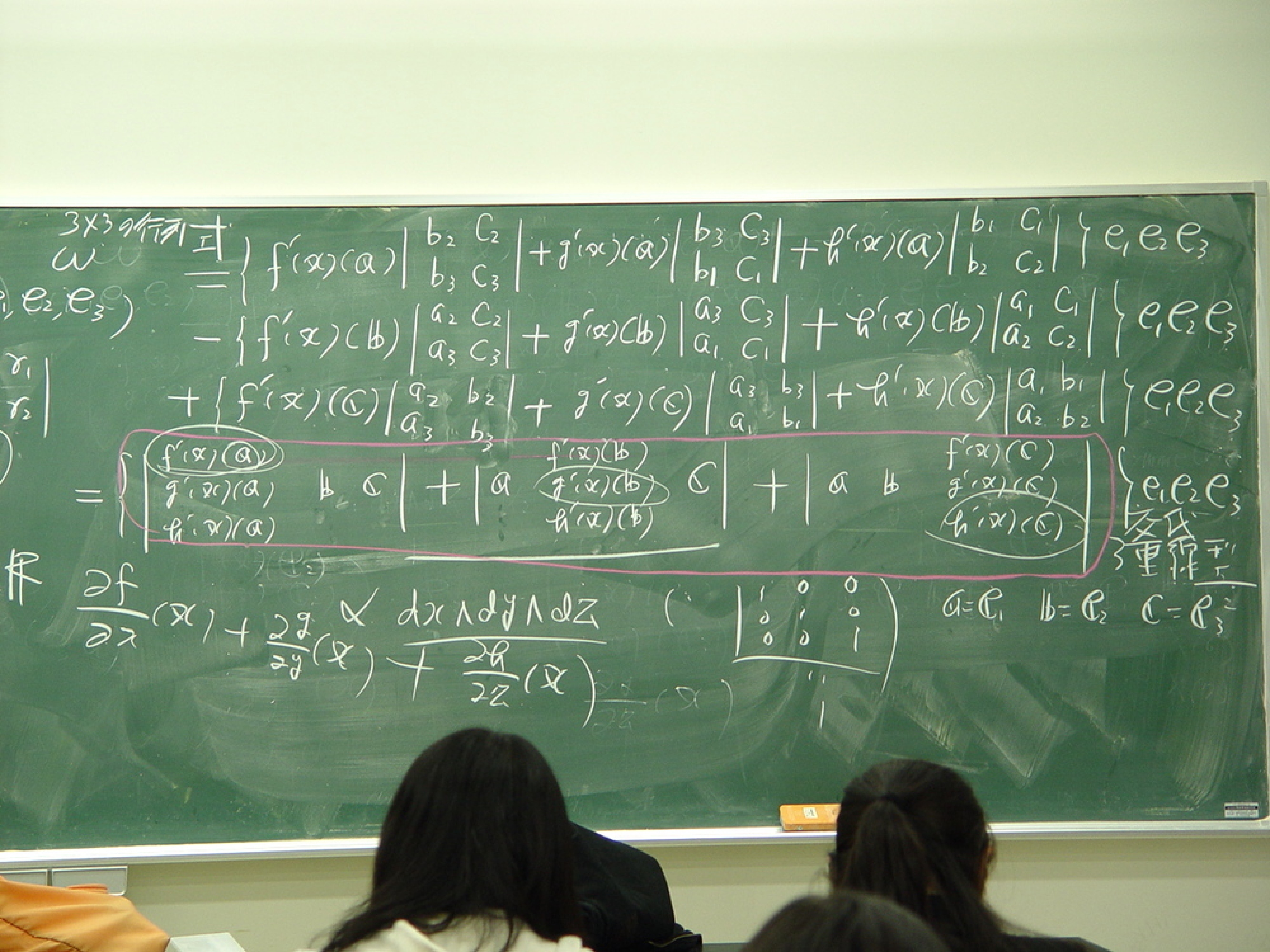
$\mathbb{a} = \mathbb{a}_1 + \mathbb{a}_2$

$\int_{\partial(\gamma; e_1, e_2, e_3)}$

3×3

$\omega$

$= \frac{\partial f}{\partial x}$


3×3の行列式
ω = { f'(x)(a) | b2 c2 / b3 c3 | + g'(x)(a) | b3 c3 / b1 c1 | + h'(x)(a) | b1 c1 / b2 c2 | } e1 e2 e3
− { f'(x)(b) | a2 c2 / a3 c3 | + g'(x)(b) | a3 c3 / a1 c1 | + h'(x)(b) | a1 c1 / a2 c2 | } e1 e2 e3
+ { f'(x)(c) | a2 b2 / a3 b3 | + g'(x)(c) | a3 b3 / a1 b1 | + h'(x)(c) | a1 b1 / a2 b2 | } e1 e2 e3
= { | f'(x)(a) b c / g'(x)(a) / h'(x)(a) | + | a f'(x)(b) c / g'(x)(b) / h'(x)(b) | + | a b f'(x)(c) / g'(x)(c) / h'(x)(c) | } e1 e2 e3
多重線形
a = e1  b = e2  c = e3
∂f/∂x (x) + ∂g/∂y (x) + ∂h/∂z (x)  ∝  dx∧dy∧dz
| 1 0 0 / 0 1 0 / 0 0 1 |

# 25回目

西村先生・みなさま:

今日01/09の3限、「基礎数学」(西村先生)の3学期5回め(通算25回め)を
聴講しました。教室は1E203です。出席者は、51名(前回は41名;昨年同期
は34名)＋教員1名＋TA1名(中井さん)です。

内容は, ストークスの定理と発散定理(ガウスの定理)の証明を見直す
もので、交代形式を基底で表現するという考え方を使えば、前回・前々回と
レポートで愚直に行った計算がほとんどスキップできて、鮮やかに結論が
導ける、ということが示されました。ガウスの定理に関して言えば、応用数学
では普通は数理科学演習のように「直方体でごまかした証明」が与えられますが、
ここでは微小平行六面体について、きちんと(近似なしに)証明された、という
ことが強調されました。

数学のプロは違うと思いました。数学者によるきちんとした数学の講義は、
生物資源学類にとって、重要であると、改めて思いました。

微分形式とその積分という考え方がまだきちんと飲み込めていない学生も
多いと思いますが、ここまで喰らいついてきた学生も、少なからず、おります。
体育のあとなのに、寝ている学生はほとんどいません。感銘の表情でうなずき
ながら聞いていた学生もいました。

ちなみに、個人的には、「任意の立体は本当に微小平行六面体で分割できる
のだろうか？」と思っています。いかがでしょう？

PS 前回(4回め)の報告で「教員1名(私と足立先生)」は「教員1名(私)」の
間違いです。お詫びして訂正します。

--
奈佐原　顕郎　(旧姓西田)
筑波大学農林工学系