No.

Date 2008. 12. 19

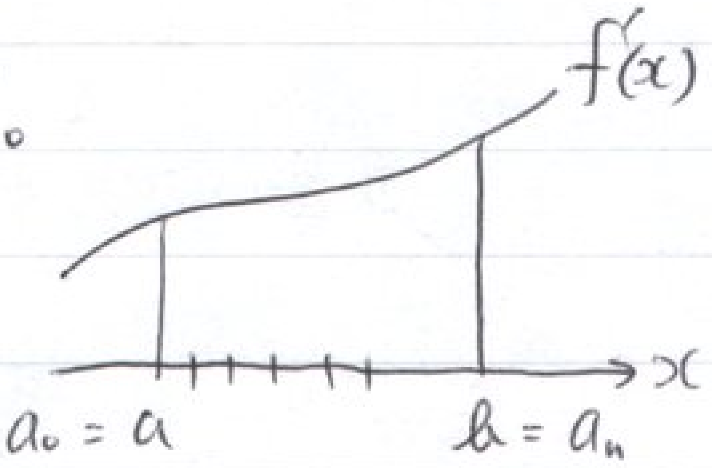
基礎数学

53人 + 教員 ナサハラ, 足立 + TA 中井

以前、微積分の基本定理を学んだ。

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$$



$d_1 = a_1 - a_0 \in D$

$d_2 = a_2 - a_1 \in D$

$\vdots$

これは、

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} f'(a_i)\, d_{i+1}}$$ のこと。

これは、$f(a_{i+1}) - f(a_i)$ に等しい。

$\because$ Kock - Lawvere の公理

(つまり、Kock - Lawvere の公理とは、微積分の基本定理の無限小版である。)

$$\therefore \sum_{i=0}^{n-1} f'(a_i) d_{i+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \{ f(a_{i+1}) - f(a_i) \}$$

$$= f(\cancel{a_1}) - f(a_0)$$
$$+ f(\cancel{a_2}) - f(\cancel{a_1})$$
$$+ \vdots$$
$$+ f(a_n) - f(\cancel{a_{n-1}})$$

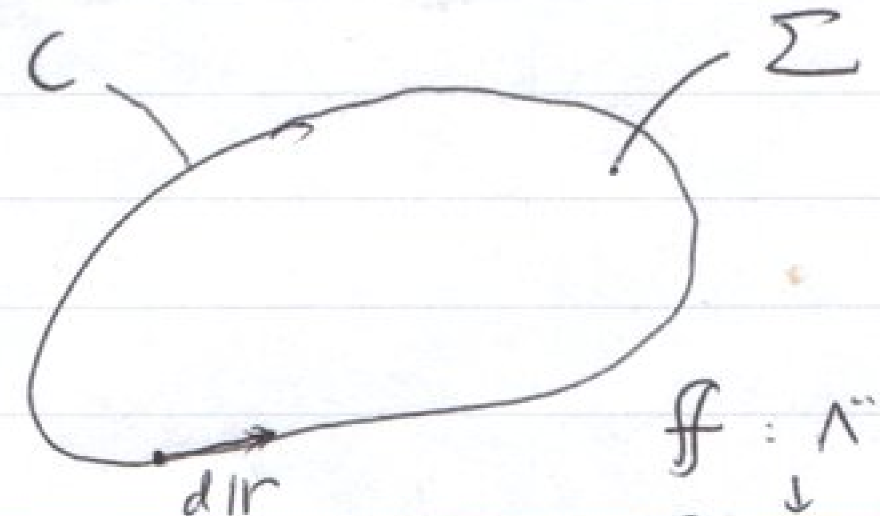
これだけ残る。のこりはキャンセルしあう。

$$= f(a_n) - f(a_0) = f(b) - f(a)$$

境界 ($x = b$ と $x = a$) だけで決まる。

Stokes の定理

閉曲線 C で ~~囲~~ 囲まれた、曲面 Σ



$\mathbf{f}$: ベクトル場

↓

rot $\mathbf{f}$: ベクトル場

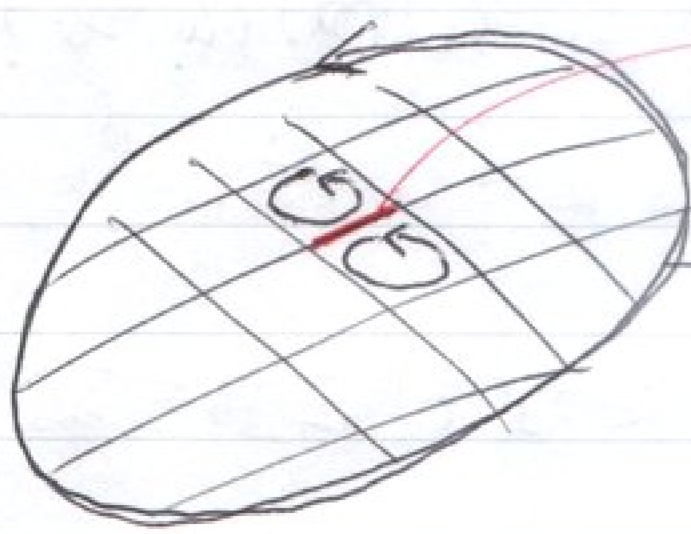
数理科学演習では ds　　　　数理科学演習では $\mathbf{n}\,dS$

$$\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_\Sigma (\mathrm{rot}\,\mathbf{f})\cdot d\mathbf{S}$$

有名なストークスの定理

線積分　　　面積分

もし、無限小のレベルでStokesの定理が成り立てば…



ここの部分はうちけしあう。

↓

その結果、はじっこだけが残る。

↓

Stokesの定理がなりたつ
（無限小でなくても）

つまり、無限小のレベルで示すことができればよい。

前回やったように、　← $d\mathbf{r} = \mathbf{a}d$ とおくと、

$$\underbrace{\mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{a}d}_{\in\mathbb{R}} = \omega(x)(\mathbf{a})\,d$$ とかける。

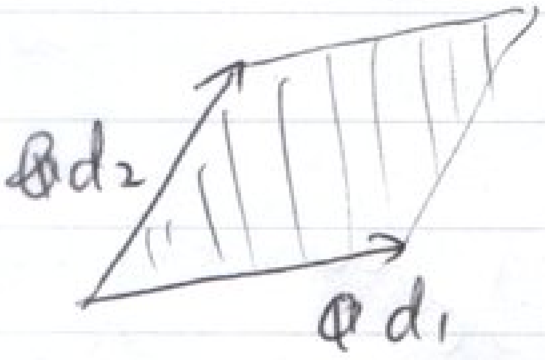
一次の微分形式

「空間の各点 x に $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ の線型写像を対応させるようなもの」

1次のtensor　　　tensor場

線積分　$\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}$ を $\int_C \omega$ と書く。

一方、面積分とは、



$$\int_\Sigma \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\mathbf{f}(x)\cdot\{(\mathbf{a}d_1)\times(\mathbf{b}d_2)\}$$

$$= \mathbf{f}(x)\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,d_1 d_2$$

これが $d\mathbf{S}$

これは
2次の交代形式
（2次の反対称テンソル）
（交代2重線形写像）

No.

Date

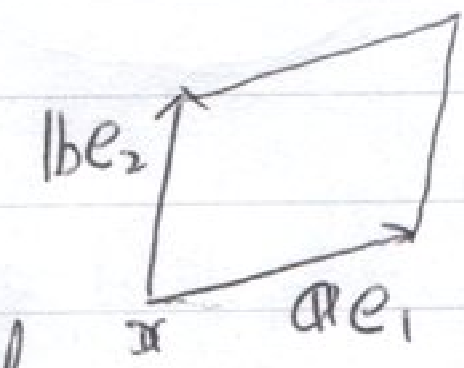
この $\mathbf{f}(x)\circ(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ は、

$$\underbrace{\mathbb{R}^3\ni x\mapsto \Big\{\underbrace{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\ni(\mathbf{a},\mathbf{b})\longmapsto \mathbf{f}(x)\circ(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\in\mathbb{R}}_{\text{2次の反対称テンソル}}\Big\}}_{\text{2次の微分形式}\ \omega(x)(\mathbf{a},\mathbf{b})}$$

大きな視点の変更がここで起きたのだ。

では、無限小のレベルでStokesの定理を証明する。

無限小の平行四辺形



$$\gamma : (d_1, d_2)\in D^2 \longmapsto x+\mathbf{a}d_1+\mathbf{b}d_2$$

$(e_1, e_2)\in D^2$ を固定

$(\gamma\,;\ e_1,\ e_2)$ がきまれば平行四辺形がきまる。

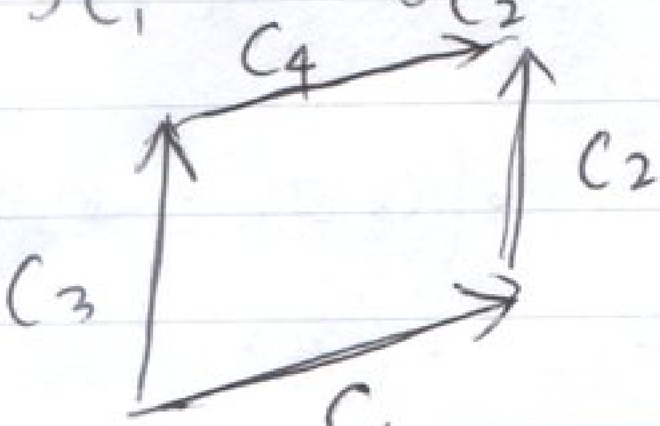
いま、$f,\ g,\ h : \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ とする。

$\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$ とする。

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$ とする。

$$\int_{\partial(\gamma;\,e_1,\,e_2)}\omega \equiv \int_{C_1}\omega+\int_{C_2}\omega-\int_{C_3}\omega-\int_{C_4}\omega$$

平行四辺形の境界、というイミ



No.

Date

$$= \{f(x)a_1 + g(x)a_2 + h(x)a_3\}e_1$$
$$+ \{f(x+\mathbb{a}e_1)b_1 + g(x+\mathbb{a}e_1)b_2 + h(x+\mathbb{a}e_1)b_3\}e_2$$
$$- \{f(x)b_1 + g(x)b_2 + h(x)b_3\}e_2$$
$$- \{f(x+\mathbb{b}e_2)a_1 + g(x+\mathbb{b}e_2)a_2 + h(x+\mathbb{b}e_2)a_3\}e_1$$

$$= \{f(x+\mathbb{a}e_1) - f(x)\}b_1e_2 + \{g(x+\mathbb{a}e_1) - g(x)\}b_2e_2 + \{h(x+\mathbb{a}e_1) - h(x)\}b_3e_2$$

$$= f'(x)(\mathbb{a})\,b_1e_1e_2$$
$$+ g'(x)(\mathbb{a})\,b_2e_1e_2$$
$$+ h'(x)(\mathbb{a})\,b_3e_1e_2$$
$$= \{f'(x)(\mathbb{a})b_1 + g'(x)(\mathbb{a})b_2 + h'(x)(\mathbb{a})b_3\}e_1e_2$$

= ---- (同様に) ---

$$= -\{f'(x)(\mathbb{b})a_1 + g'(x)(\mathbb{b})a_2 + h'(x)(\mathbb{b})a_3\}e_1e_2$$

ところで、 $f'(x)(\mathbb{a}) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)a_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x)a_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(x)a_3$

$$g'(x)(\ ) = \frac{\partial g}{\partial x}(x)b_1 + \frac{\partial g}{\partial y}(x)b_2 + \frac{\partial g}{\partial z}(x)b_3$$

これを使って、

レポート課題： + の計算を完成せよ。

ヒント： $a_i\ b_i$ のような項はキャンセルしあう。

↑同じ添字

すると、 $(a_1b_2 - a_2b_1)$ のように整理できる。

$(dx \wedge dy)(\mathbb{a},\mathbb{b})$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

No.

Date

ここで、 $dx \wedge dy \longleftrightarrow e_3$

$dy \wedge dz \longleftrightarrow e_1$

$dz \wedge dx \longleftrightarrow e_2$

と対応関係をつければ、rot が出てくる。

まじめにまじめに計算すればできる。

↓

しかし、次回、じつはそんな苦労は不要だったことがわかる。

レポートのしめきり　1/7　D705

「数理科学演習」は、3A312 に移動。

基礎数学 (3)

Kock Lawvere の公理

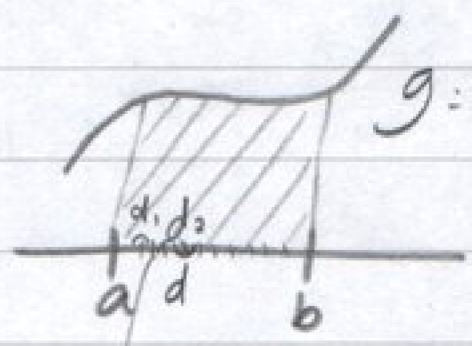
2008/12/19

微積分の基本定理

無限における微積分の基本的.

$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$$



差が非常に小さくなるように分ける

$d_1 = a_1 - a_0 \in D$

$d_2 = a_2 - a_1 \in D$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f'(a_i)\, d_{i+1}$$

$= f(a_{i+1}) - f(\cancel{a_i})$ Kock Lawvere の公理

$f(\cancel{a_1}) - f(a_0)$

$f(\cancel{a_2}) - f(a_1)$

$f(a_n) - f(a_{n-1})$

$\vdots$

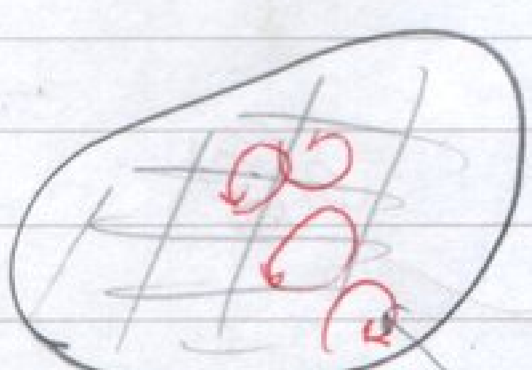
Stokes の定理

閉曲線 C で囲まれた 曲面 Σ

(rotation)
ベクトル場からベクトルをとる.

$\mathrm{rot}\, ff$

境界での線積分に等しい.



ff ベクトル場

$\int_C \omega =$

線積分

ストークスの定理 $\int_C ff \cdot dr = \int_\Sigma (\mathrm{rot}\, ff) \cdot dS = n\,dS$

$dr = ds$

large S

無限小のレベルで線積分すると このまわり

つなぎあわせると のまわり

非常に小さくないといけない

この向き とちがう向き

↓

うち消し合う

まん中にある点は 打ち消し合う!!

ここは 打ち消さない.

$dr = ad$

点xを固定 $ff(x) \cdot ad$

$\omega(x)(a) \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 一次の微分形式

定義

一次の微分形式　空間の各点に $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ への線形写像を対応させるもの

1次のtensor

空間の点を1つ決めれば $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

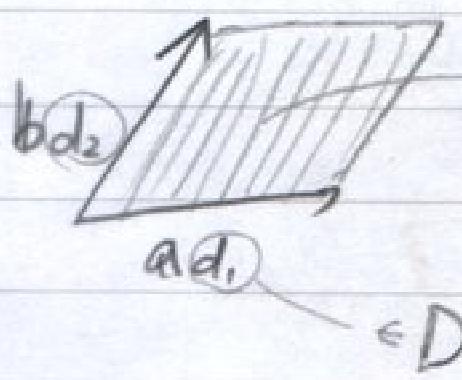
スカラー場　各点にスカラーを対応させたもの

eg 温度

tensor場
- スカラー場
- ベクトル場

しかない

$\int_\Sigma \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}$ (2次の微分形式)



$\mathbf{f}(x)\cdot(\mathbf{a}d_1 \times \mathbf{b}d_2)$

$= \mathbf{f}(x)\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,d_1 d_2$

$\omega(x) = (\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbf{f}(x)\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \in \mathbb{R}$

$\int_\Sigma \omega$

bを固定したらaの…

aを固定したら

= 2重線形

しかも入れかえたら符号が変わる

交代二重線形

〃 交代形式

〃 2次の反対称tensor

視点の変更が起こっている。

考え方がちがう

eg 流れの場 → これに対して、どれだけ流れが通り抜けるか測り方に注目

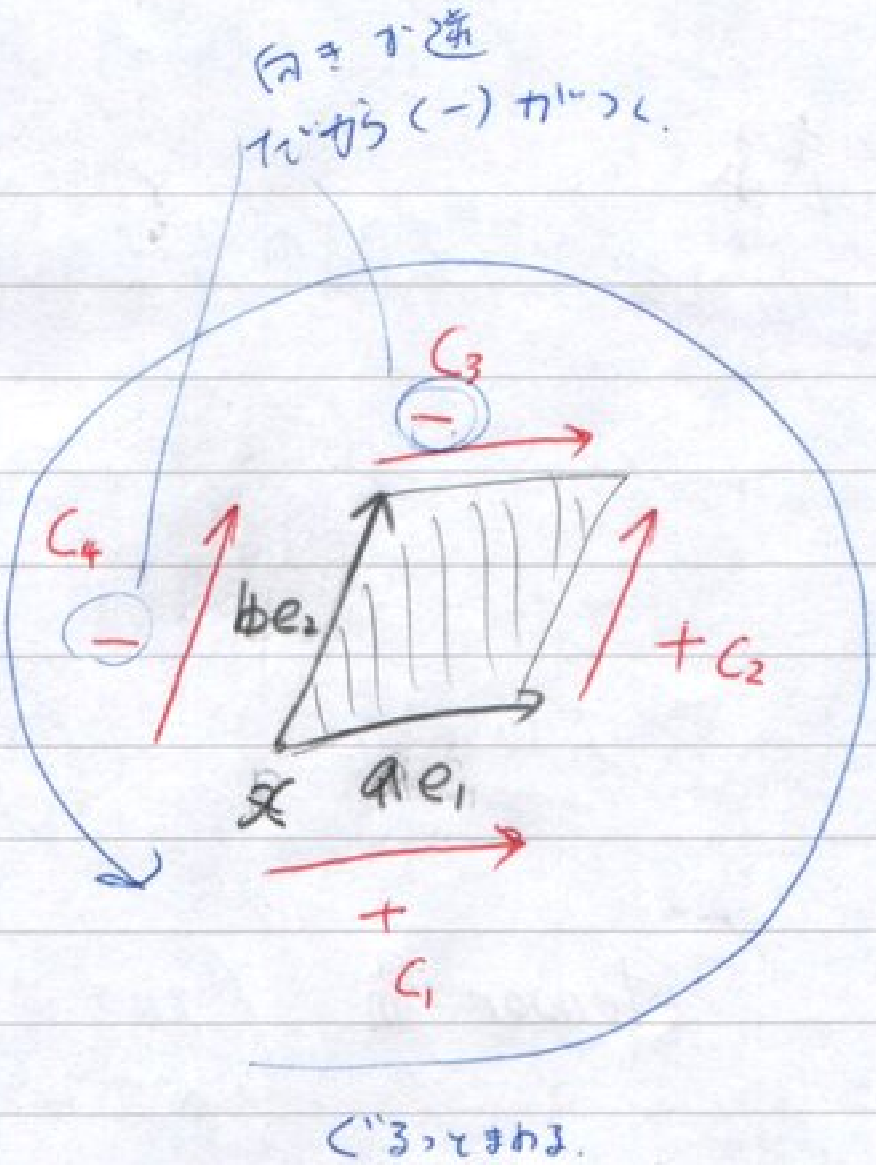
(3次の線形空間だからと同一視とかの話だけじゃない)

2次の微分形式

L 空間の各点に2次の反対称tensorをわりあてる。

無限小の平行四辺形

L を空間の中に考えている.



x

D×D

$$(d_1, d_2) \in D^2 \longmapsto x + \boldsymbol{a}d_1 + \boldsymbol{b}d_2$$

端点 $(e_1, e_2) \in D^2$ を固定

$$\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$$

$(\gamma; e_1, e_2)$ $\quad dx, dy$ の d

$d^2=0$ の d じゃない.

$f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\int_{\partial(\gamma; e_1, e_2)} \omega = \int_{c_1} \omega + \int_{c_2} \omega - \int_{c_3} \omega - \int_{4} \omega$$

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ $\quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

c_1 $\quad = \{f(x)a_1 + g(x)a_2 + h(x)a_3\} e_1$

c_2 $\quad + \{f(x+\boldsymbol{a}e_1)b_1 + g(x+\boldsymbol{a}e_1)b_2 + h(x+\boldsymbol{a}e_1)b_3\} e_2$

c_3 $\quad - \{f(x)b_1 + g(x)b_2 + h(x)b_3\} e_2$

c_4 $\quad - \{f(x+\boldsymbol{b}e_2)a_1 + g(x+\boldsymbol{b}e_2)a_2 + h(x+\boldsymbol{b}e_2)a_3\} e_1$

ひっつけてる

— $= \{f(x+\boldsymbol{a}e_1) - f(x)\} b_1 e_2$

$= f'(x)(\boldsymbol{a}) b_1 e_1 e_2 + g'(x)(\boldsymbol{a}) b_2 e_1 e_2 + h'(x)(\boldsymbol{a}) b_3 e_1 e_2$

$= \{f'(x)(\boldsymbol{a}) b_1 + g'(x)(\boldsymbol{a}) b_2 + h'(x)(\boldsymbol{a}) b_3\} e_1 e_2$

— $= -\{f'(x)(\boldsymbol{b}) a_1 + g'(x)(\boldsymbol{b}) a_2 + h(x)(\boldsymbol{b}) a_3\} e_1 e_2$

与式 = — + —

デルタ

$$f'(x)(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)a_1 b_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x)a_2 b_1 + \frac{\partial f}{\partial z}(x)a_3 b_1$$

$$= f'(x)(b)$$

✳レポート ↑ この計算 これを最後まで終わらせる.

消えるものが出てくる

└→ 残ったところを整理する.

例えば,

$$= f'(x)(b) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)b_1 a_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x)b_2 a_1 + \frac{\partial f}{\partial z}(x)b_3 a_1$$

$a_i b_i$ は消し合う

$a_2 b_1$ は のこる

→ つまり $(a_1 b_2 - a_2 b_1)$

マイナス にかかってくる係数.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (dx \wedge dy)(a, b)$$

行列式

絶対値は同じで符合が逆

e_3 ベクトル

$a_2 b_3 \quad a_3 b_2$

$a_1 b_3 \quad a_3 b_1$

にかかる係数を調べる.

$dy \wedge dz \leftrightarrow e_1$

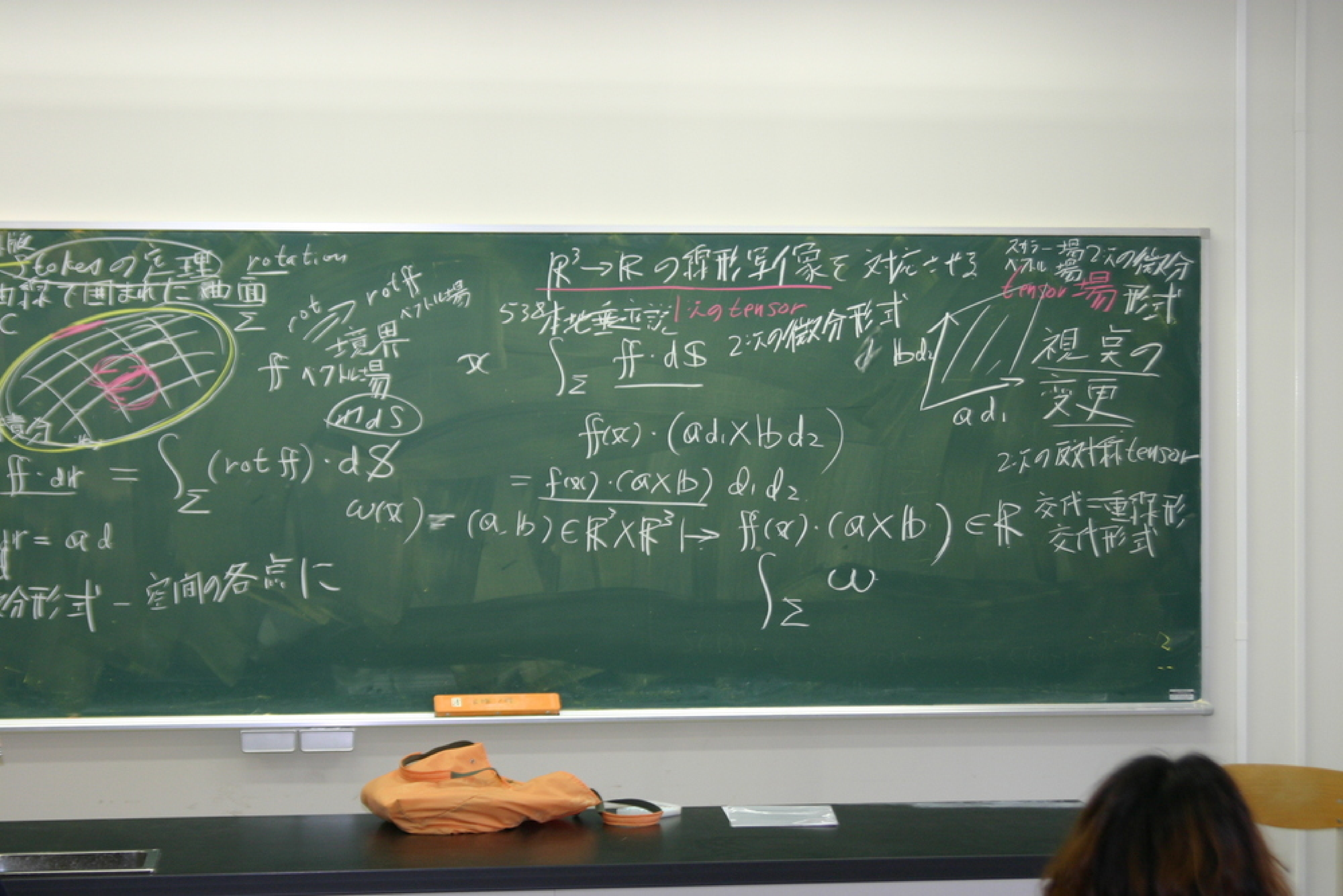
$dz \wedge dx \leftrightarrow e_2$

rot とったときのが同じのが出てくる

due 1/7

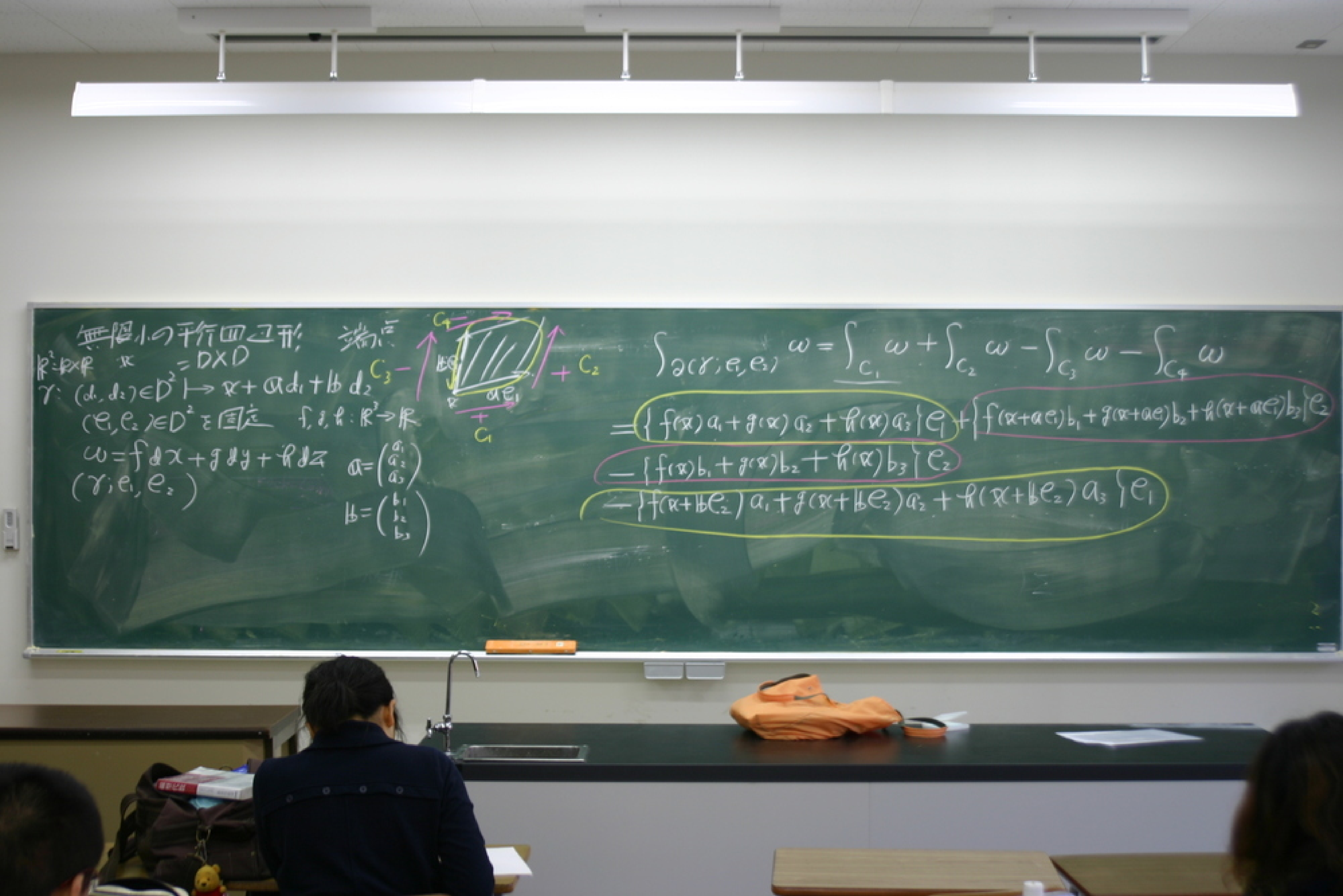
D705

来週は Gauss の発散定理.


Stokesの定理
rotation
曲線で囲まれた曲面
C
Σ
rot
rot f
境界
ベクトル場
f ベクトル場
n dS
f·dr = ∫Σ (rot f)·dS
空間の各点に
分形式
R³→Rの線形写像を対応させる
1次のtensor
2次の微分形式
x
∫Σ f·dS
f(x)·(a d1 × b d2)
= f(x)·(a×b) d1 d2
ω(x) = (a, b) ∈ R³×R³ ↦ f(x)·(a×b) ∈ R
∫Σ ω
スカラー場
ベクトル場
2次の微分形式
tensor場
b d2
a d1
視点の変更
2次の反対称tensor
交代二重線形
交代形式


微積分の基本定理 ∈ 無限小における
~~微積分の基本定理~~ - $f'(x)$ 無限小版
Stokesの定理
rotation
閉曲線で囲まれた曲面
$f: [a, b] \to \mathbb{R}$
$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$
$= \sum_{i=0}^{n-1} f'(a_i)\, d_{i+1}$
$f(a_{i+1}) - f(a_i)$
Kock-Lawvereの公理
$d_1 = a_1 - a_0 \in D$
$d_2 = a_2 - a_1 \in D$
$f(a_1) - f(a_0)$
$f(a_2) - f(a_1)$
$f(a_n) - f(a_{n-1})$
$\omega(x)(a)$
$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$\int_C \omega = \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_\Sigma (\mathrm{rot}\, \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{S}$
線積分
Σ
C
rot
rot $\mathbf{f}$ ベクトル場
境界
$\mathbf{f}$ ベクトル場
$\mathbf{n}\, dS$
ωが1次の微分形式 - 空間の各点に
$\omega(x) = (a, b) \in \mathbb{R}$

微積分の基本定理 ⇐ 無限小における
$f:[a,b] \to \mathbb{R}$
$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)\,dx$
$=\sum_{i=0}^{n-1} f'(a_i)\,d_{i+1}$
$f(a_{i+1})-f(a_i)$
$d_1=a_1-a_0 \in D$
$d_2=a_2-a_1 \in D$
Stokesの定理
rotation
閉曲線で囲まれた曲面
C
Σ
$\int_C \omega = \int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_\Sigma (\mathrm{rot}\,\mathbf{f})\cdot d\mathbf{S}$
rot rot f
境界
ベクトル場
$\omega(\mathbf{x})(\mathbf{a})$
$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$\mathbf{f}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{a}\,d$
$d\mathbf{r}=\mathbf{a}\,d$
1次の微分形式 ― 空間の各点に
$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ の線形写像を対応させる
2次の微分形式
$\int_\Sigma \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}$
$\mathbf{f}(\mathbf{x})\cdot(\mathbf{a}d_1 \times \mathbf{b}d_2)$
$=\mathbf{f}(\mathbf{x})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,d_1 d_2$
$\omega(\mathbf{x}) = (\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \in \mathbb{R}$
交代形式
$\int_\Sigma \omega$
$\mathbf{a}d_1$
$\mathbf{b}d_2$
視点の変更
tensor場


無限小の平行四辺形;
$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ x $= D \times D$
$\gamma : (d_1, d_2) \in D^2 \mapsto x + a d_1 + b d_2$
$(e_1, e_2) \in D^2$ を固定
$f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$
$(\gamma; e_1, e_2)$
$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$
C_1 C_2 C_3 C_4
$\int_{\partial(\gamma; e_1, e_2)} \omega = \int_{C_1} \omega + \int_{C_2} \omega - \int_{C_3} \omega - \int_{C_4} \omega$
$= \{f(x)a_1 + g(x)a_2 + h(x)a_3\} e_1 + \{f(x+ae_1)b_1 + g(x+ae_1)b_2 + h(x+ae_1)b_3\} e_2$
$- \{f(x)b_1 + g(x)b_2 + h(x)b_3\} e_2$
$- \{f(x+be_2)a_1 + g(x+be_2)a_2 + h(x+be_2)a_3\} e_1$

無限小の平行四辺形　端点

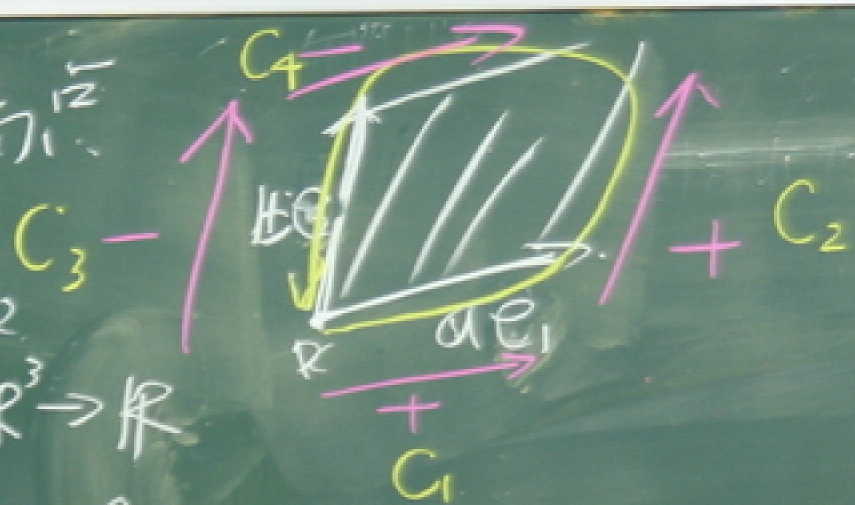
$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R} \quad \mathbb{x} \quad = D\times D$

$\gamma : (d_1, d_2) \in D^2 \mapsto \mathbb{x} + \mathbb{a}\, d_1 + \mathbb{b}\, d_2$

$(e_1, e_2) \in D^2$ を固定　$f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz \qquad \mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$(\gamma; e_1, e_2) \qquad \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$



$\int_{\partial(\gamma; e_1, e$

$= \{ f(\mathbb{x})\, a_1 + g$

$- \{ f(\mathbb{x})\, b_1 + g$

$- \{ f(\mathbb{x} + \mathbb{b}e_2)$

$+\ C_2$

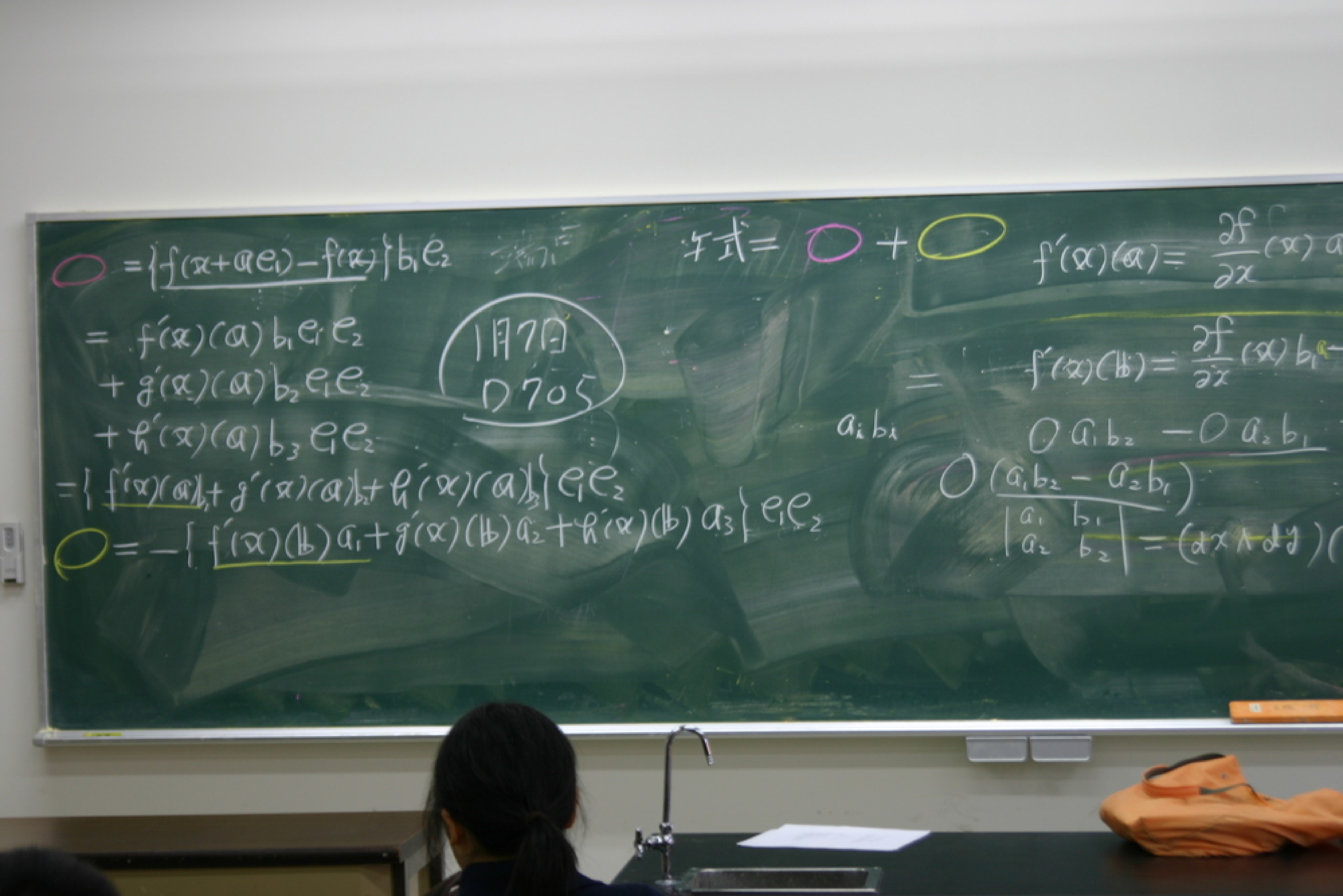
$$\int_{\partial(\gamma;e_1,e_2)} \omega = \int_{\underline{C_1}} \omega + \int_{C_2} \omega - \int_{C_3} \omega - \int_{C_4} \omega$$

$$= \{f(x)a_1 + g(x)a_2 + h(x)a_3\}e_1 + \{f(x+ae_1)b_1 + g(x+ae_1)b_2 + h(x+ae_1)b_3\}e_2$$

$$- \{f(x)b_1 + g(x)b_2 + h(x)b_3\}e_2$$

$$- \{f(x+be_2)a_1 + g(x+be_2)a_2 + h(x+be_2)a_3\}e_1$$

1月7日
D705
report
rot
dx∧dy ⟷ e3
dy∧dz ⟷ e1
dz∧dx ⟷ e2



$= \{f(x+ae_1) - f(x)\} b_1 e_2$
$= f'(x)(a) b_1 e_1 e_2$
$+ g'(x)(a) b_2 e_1 e_2$
$+ h'(x)(a) b_3 e_1 e_2$
$= \{f'(x)(a) b_1 + g'(x)(a) b_2 + h'(x)(a) b_3\} e_1 e_2$
$= -\{f'(x)(b) a_1 + g'(x)(b) a_2 + h'(x)(b) a_3\} e_1 e_2$
1月7日
D705
与式 = +
$f'(x)(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)\, a$
$f'(x)(b) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)\, b_1$
$a_1 b_1$
$a_1 b_2 - a_2 b_1$
$(a_1 b_2 - a_2 b_1)$
$= (dx \wedge dy)$

$= \bigcirc + \bigcirc$

$$f'(x)(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)\, a_1 b_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x)\, a_2 b_1 + \frac{\partial f}{\partial z}(x)\, a_3 b_1$$

report

$$f'(x)(b) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)\, b_1 a_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x)\, b_2 a_1 + \frac{\partial f}{\partial z}(x)\, b_3 a_1$$

rot

$=$

$a_i b_k$

$\bigcirc a_1 b_2 - \bigcirc a_2 b_1$

$a_2 b_3$ $a_3 b_2$

$\bigcirc (a_1 b_2 - a_2 b_1)$

$a_1 b_3$ $a_3 b_1$

$e_1 e_2$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (dx \wedge dy)(a, b)$$

$dx \wedge dy \leftrightarrow e_3$

$dy \wedge dz \leftrightarrow e_1$

$dz \wedge dx \leftrightarrow e_2$

23回目

西村先生・みなさま:

今日12/19の3限、「基礎数学」(西村先生)の3学期3回め(通算23回め)
を聴講しました。教室は1E203です。出席者は、53名(前回は55名;昨年同期は29名)
+教員1名(私と足立先生)+TA1名(中井さん)です。

内容は, ストークスの定理です。無限小のレベルでストークスの定理が証明
されました。その途中の細かい計算は、レポート課題(1/7締切り)とされました。
rotationや面積分、線積分、ストークスの定理などは、数理科学演習で一通り
やられているので、この講義では、それに数学的に基礎を与えるという位置づけ
になっています。従って、数理科学演習に出席していなかった学生は、lostして
いる可能性が高いです。しかし、これらの科目はあわせてとるように、再三、言って
ありますので、それも仕方がないかもしれません。

今回のストークスの定理の証明は、べき零無限小を使ってはいませんが、
数理科学演習でやった証明(厳密ではない)と、道筋はよく似ています。
その細かい計算も、数理科学演習でレポート課題に出したことがありますので、
きちんと勉強した学生には、なんとかなると思います。

--
奈佐原　顕郎　(旧姓西田)
筑波大学農林工学系

少し誤解があるようです。関数fのaからa+d(dは2回掛けると0になる無限小)への定積分
はf(a)dで与えれる(これは厳密な話)といった点に冪零無限小は使用されています。
数理科学演習では冪零無限小がないため、このあたりの話は厳密ではなくなると思います。
かつてDiracのδ関数も数学のなかに足場がありませんでしたが、Schwartz等のおかげで
現在ではかつて物理学者が後ろ指を指されながら行っていた議論が超関数論として数学的に
厳密に裏付けられることがわかっています。この冪零無限小の話も似たようなところがあり、
数学的に厳密でないと後ろ指をさされていたDivやRotの概念に辿りつく議論がきちんとした
数学の土俵にのります。Schwartzはそれをこの世で行い、冪零無限小による数学はそれを
あの世で行うという違いはありますが。

それから、これは数学者の間に蔓延している誤解ですが、(微分形式論でとり扱われる
一般的な意味での)Stokesの定理は、よくFormulationがきちんとなされると証明はいたって
簡単な例として引用されます。Stokesの定理の難所は外微分の概念に自然な形で辿りつく
ところにあり(つまりStokesの定理が無限小のlevelで成立することを要請すると外微分は
一意的に決まることを示す)、Standardな数学では、このあたりは数学の土俵に乗らないと
切り捨てて、外微分の定義を天下りであたえるという無難ではあるが愚かな選択をしたために、
こういう誤解が引き起こされたと考えられます。

西村泰一
筑波大学数学系