No.

Date 2008 12 12

基礎数学　　　　55人 + 中西, 中井

ベクトル解析

場 — 空間の各点に物理量を割り当てる。

スカラー場 :　　$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

ベクトル場 :　　$\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{f}(x) = f_1(x)\mathbf{e}_1 + f_2(x)\mathbf{e}_2 + f_3(x)\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

「力の場」も「流れの場」もベクトル場ということになってしまう。

力の場を線積分するのは妥当だが、力の場を面積分するのは悪趣味である。流れの場を面積分するのは妥当だが。

同一視できる。

n 次の微分形式　$(n = 0, 1, 2, 3)$

反対称な ~~n次~~ n 重線型写像 = n 次の反対称 tensor
= n 次の交代形式

空間の各点に反対称な n 重線型写像をわりあてたものを、n 次の微分形式という。

同一視できる。

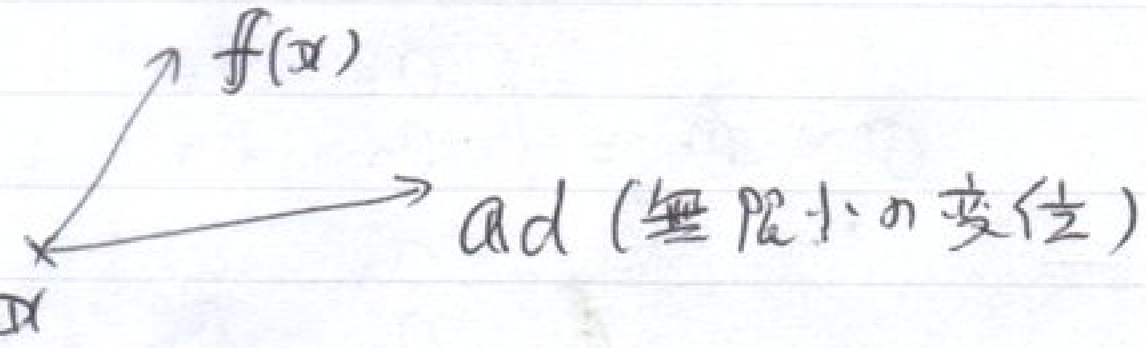
$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$	スカラー場	0次	微分形式
$f_1(x)\,dx + f_2(x)\,dy + f_3(x)\,dz$		1次	〃
$f_1(x)\,dy \wedge dz + f_2(x)\,dz \wedge dx + f_3(x)\,dx \wedge dy$		2次	〃
$f(x)\,dx \wedge dy \wedge dz$		3次	〃

「ベクトル場」は、ひとり2役を演じる。

これらは形式的な対応（比較）だが、もう少し深い意味がある。

例）<u>力の場</u> $\mathbb{f}$

$$\mathbb{a} \in \mathbb{R}^3$$
$$d \in D$$



仕事は、$\mathbb{f}(x) \cdot \mathbb{a}d = (\mathbb{f}(x) \cdot \mathbb{a})d$

この関数 $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{f}(x) \cdot \mathbb{a}$ は線形関数。

∴ 空間の各点にこのような関数を対応づける。

$$x \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \{ \underbrace{\mathbb{a} \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{f}(x) \cdot \mathbb{a}}_{\text{1次のtensor}} \}$$

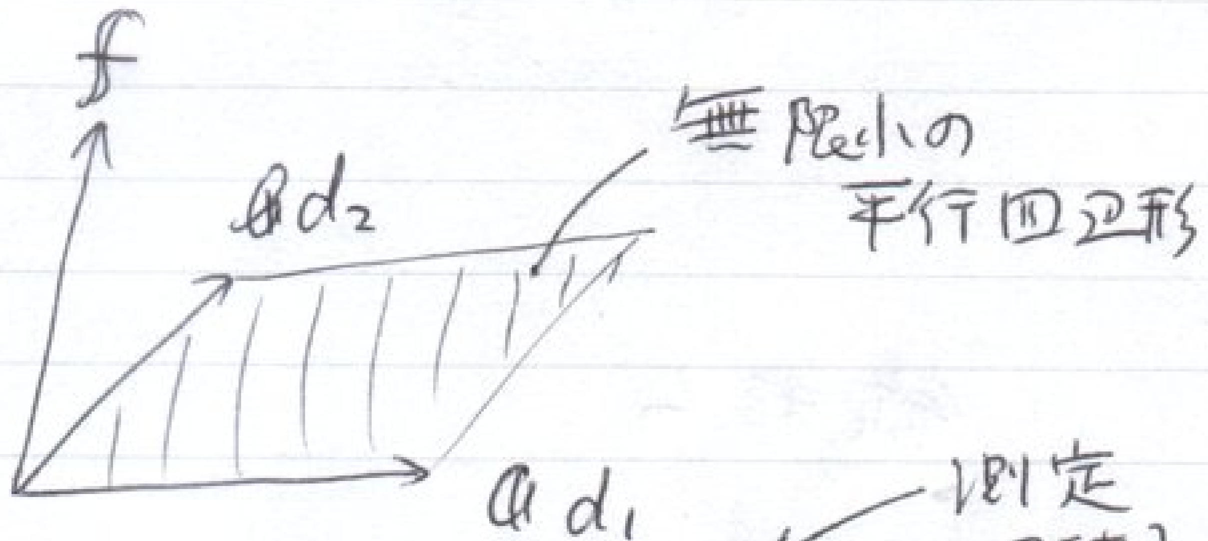
は、1次の微分形式

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\| $$
$$f_1(x) a_1 + f_2(x) a_2 + f_3(x) a_3$$
$$\| $$
$$(f_1(x)dx + f_2(x)dy + f_3(x)dz) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

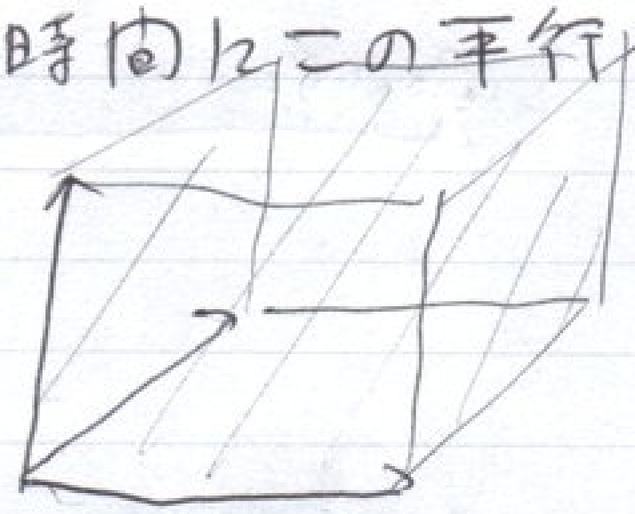
例）<u>流れの場</u> $\mathbb{f}$

$$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^3$$
$$d_1, d_2 \in D$$



測定できる。

単位時間にこの平行四辺形を通過する水量は、



平行六面体の体積 ← ベクトル積

$$\mathbb{f}(x) \cdot (\mathbb{a}d_1 \times \mathbb{b}d_2)$$
$$\|$$
$$(\mathbb{f}(x) \cdot (\mathbb{a} \times \mathbb{b}))\, d_1 d_2$$

この関数 $(\mathbf{a},\mathbf{b})\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbf{f}(x)\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\in\mathbb{R}$

は、2次の反対称tensor（2次の交代形式）

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$ だから、

$$\mathbf{f}(x)\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = f_1(x)\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + f_2(x)\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + f_3(x)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(f_1(x)\,dy\wedge dz + f_2(x)\,dz\wedge dx + f_3(x)\,dx\wedge dy\right)\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right)$$

測定という観点では、$\underbrace{\text{力の場}}_{\text{1次の微分形式}}$と$\underbrace{\text{流れの場}}_{\text{2次の微分形式}}$は全くちがう。

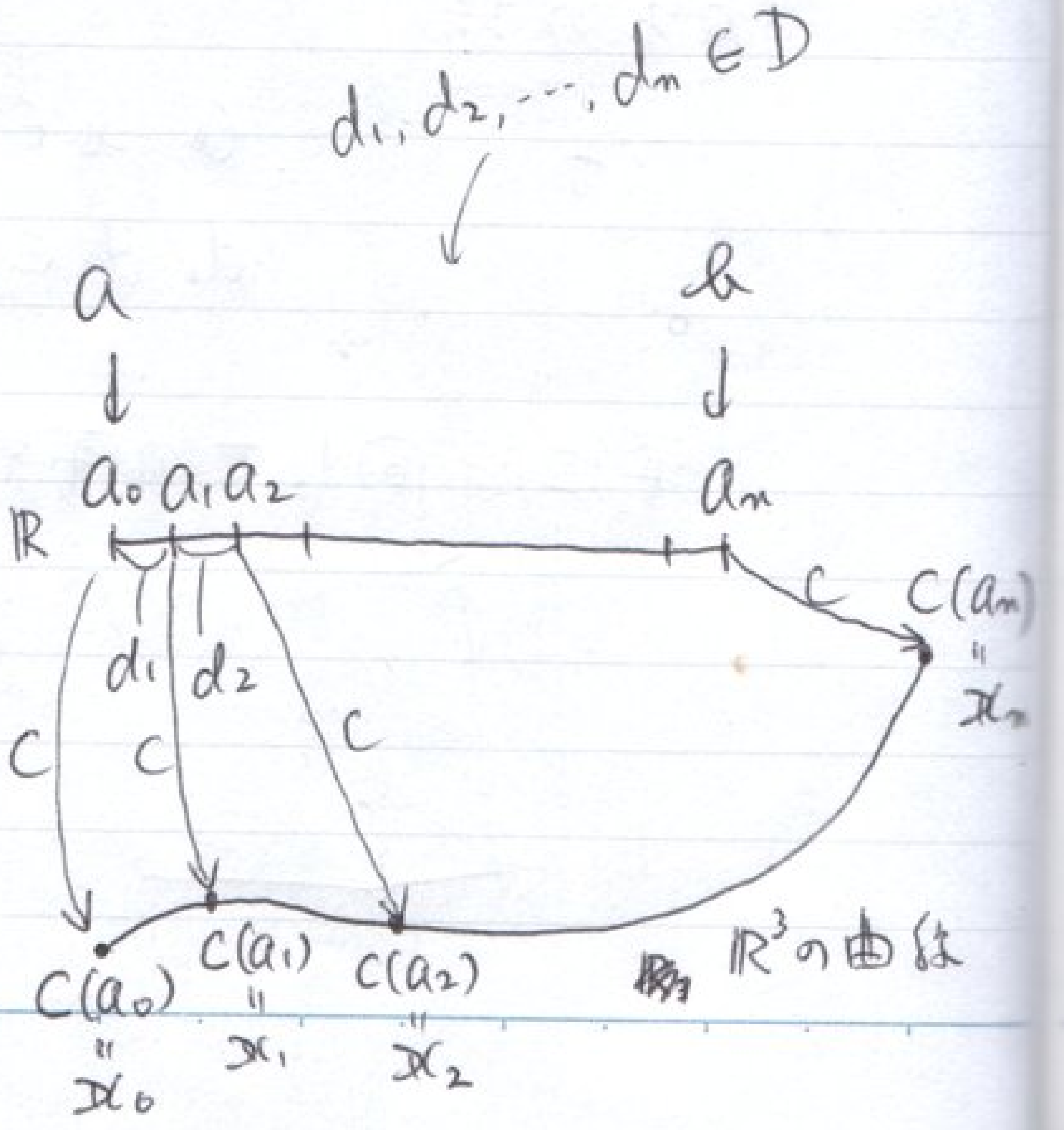
「ベクトル解析」には、両者を区別する言葉が無い。

線積分

$\mathbf{f}$: 力の場

曲線 $C : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

仕事は、$\displaystyle\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}$



微分

$$\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)\cdot c'(a_i)\, d_{i+1}$$

↑ 数理科学演習の立場
（オーソドックス）

我々の立場は、

$$\omega : \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \longmapsto \left\{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3 \longmapsto \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{a}}_{\omega(\mathbf{x})(\mathbf{a})} \in \mathbb{R}\right\}$$

← 1次の（反対称）tensor

$$\int_C \omega = \sum_{i=0}^{n-1} \omega(\mathbf{x}_i)(c'(a_i))\, d_{i+1}$$

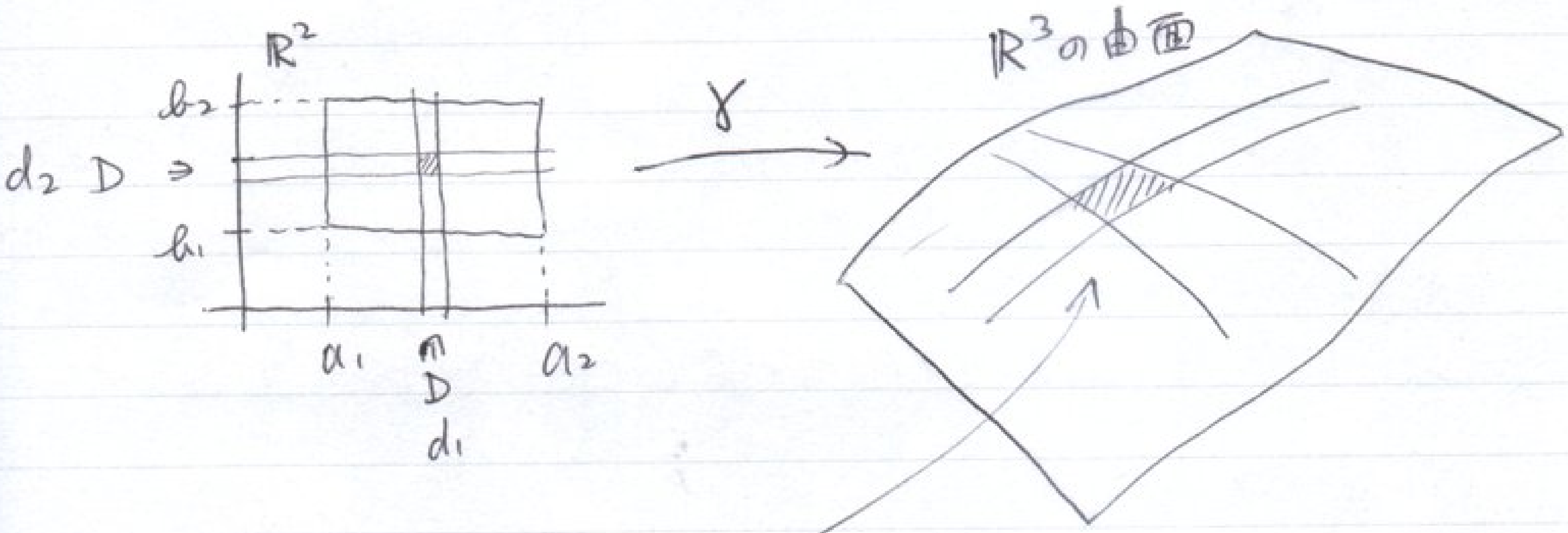
この $\mathbf{a}$ とこの a_i は全く別のもの。

面積分

$\mathbf{f}$: 流れの場

曲面は、局所的にはこう表現できる。

曲面 $\gamma : [a_1, a_2]\times[b_1, b_2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$



この面積は、 $$\frac{\partial\gamma}{\partial x}(\mathbf{x})\, d_1 \times \frac{\partial\gamma}{\partial y}(\mathbf{x})\, d_2 = \left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}(\mathbf{x}) \times \frac{\partial\gamma}{\partial y}(\mathbf{x})\right) d_1 d_2$$

↑ ベクトル積

No. 14 17 15 11

Date 31 26 57

$$\int_\gamma \mathbb{f}\cdot d\mathbb{S} = \sum \mathbb{f}(x)\cdot\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}(x)\times\frac{\partial\gamma}{\partial y}(x)\right) d_1 d_2$$

↖ オーソドックスな立場

我々の立場は、

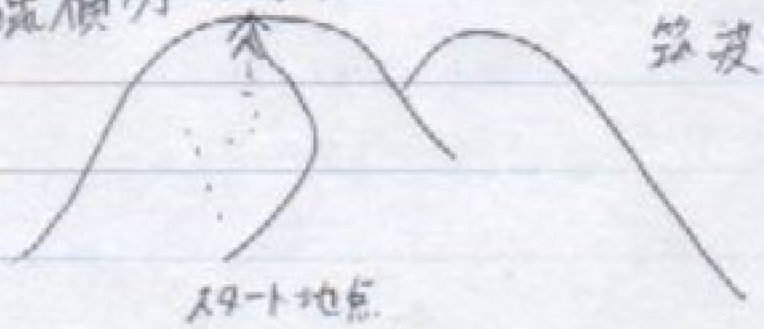
$$\underbrace{x\in\mathbb{R}^3 \longmapsto \left\{(\mathbb{a},\mathbb{b})\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \longmapsto \underbrace{\mathbb{f}(x)\cdot(\mathbb{a}\times\mathbb{b})}_{\omega(x)(\mathbb{a},\mathbb{b})}\right\}}_{2\text{次の微分形式}}$$

$$\omega(x)(\mathbb{a},\mathbb{b}) = \left\{f_1(x)\,dy\wedge dz + f_2(x)\,dz\wedge dx + f_3(x)\,dx\wedge dy\right\}(\mathbb{a},\mathbb{b})$$

$$\mathbb{f}(x)\cdot\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}(x)\times\frac{\partial\gamma}{\partial y}(x)\right) = \omega(x)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}(x),\frac{\partial\gamma}{\partial y}(x)\right)$$

$$\int_\gamma \omega = \sum \omega(x)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}(x),\frac{\partial\gamma}{\partial y}(x)\right) d_1 d_2$$

線積分の概念



(2) 12/12/08

ベクトル解析

場を扱う — 空間の各点に物理量を割当てる。

スカラー場 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

ベクトル場 — $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

空間の各点

e_1, e_2, e_3 標準基底

ベクトル解析ではベクトル場になる

では考えよう

力の場 — 線積分

流れの場 — 面積分

(要らない)

$\mathbb{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ $f_1(x)e_1 + f_2(x)e_2 + f_3(x)e_3$

基底となっている

対応させることができる!

n次の**微分形式** $(n = 0, 1, 2, 3)$

$\overbrace{\mathbb{R}^3 \times \cdots \times \mathbb{R}^3}^{n\text{個}} \longrightarrow \mathbb{R}$

反対称な n重線形写像 — n次の反対称 tensor という。

$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ スカラ

☆ 0次の場合, スカラー場と同じこと.

- 1次の反対称テンソル:

基底となっている

$f_1(x)dx + f_2(x)dy + f_3(x)dz$ とかける.

によって a_1, a_2, a_3 はかわってくる.

- 2次

$f_1(x)dy \wedge dz + f_2(x)dz \wedge dx + f_3(x)dx \wedge dy$

・3次

$f(x)\,dx \wedge dy \wedge dz$　（3×3の行列式

対応できる

前のページ

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$ff : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

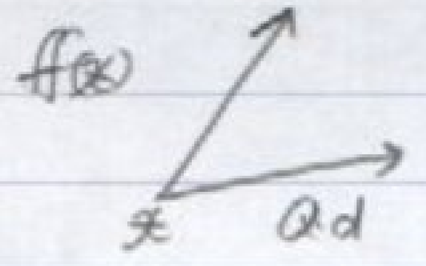
1人2役 — 形式的な比較

意味

力の場 ff　— どう測定するか？

$a \in \mathbb{R}^3$

$d \in D$



（無限小の変位）

— が在ったとき、仕事はどれだけされるか？

$ff(x) \cdot ad$　→ 内積をとってやればいい。

$= (ff(x) \cdot a)\,d$

aに関する

$x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \{a \in \mathbb{R}^3 \longmapsto ff(x) \cdot a\}$　線形関数

$\|$

1次の微分形式

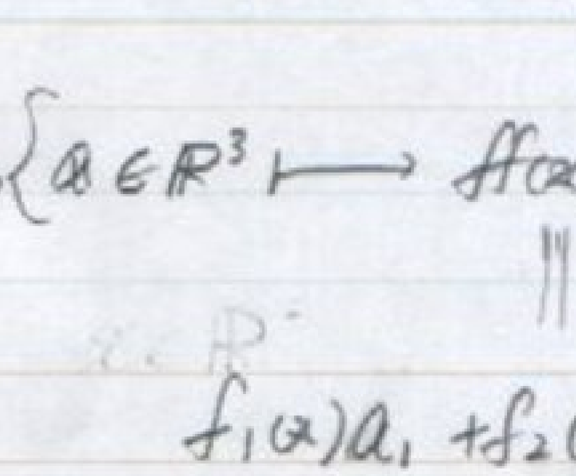
$f_1(x)a_1 + f_2(x)a_2 + f_3(x)a_3$　　$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$= f_1(x)\,dx + f_2(x)\,dy + f_3(x)\,dz)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

1番目xの　2番目yの　3番目のz成分を出す写像

その点で どれだけの速さで どの方向に流れるか。

流れ　— はどうやって測るか。



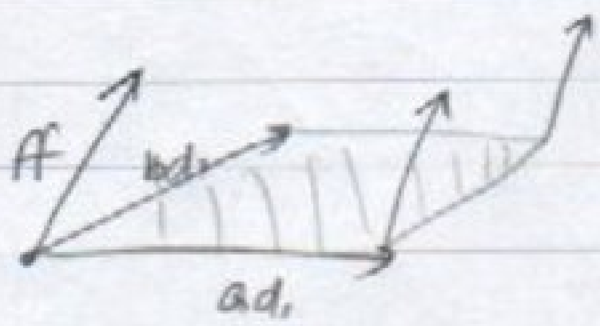
無限小の平行四辺形

$a, b \in \mathbb{R}^3$

$d_1, d_2 \in D$

— 1次の無限小

これを通り抜けた時に、単位時間どれくらいの量が通り抜けるか。



平行六面体の体積

$$\mathbb{f}(x)\cdot(\mathbb{a}d_1 \times \mathbb{b}d_2) = (\mathbb{f}(x)\cdot\mathbb{a}\times\mathbb{b})d_1d_2$$

$$(\mathbb{a},\mathbb{b}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{f}(x)\cdot(\mathbb{a}\times\mathbb{b})$$

入れかえれば"(−)がでる.

2次の交代形式

ベクトル積：

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{a}\times\mathbb{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

したがって,

$$\mathbb{f}(x)\cdot(\mathbb{a}\times\mathbb{b}) = f_1(x)\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + f_2(x)\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + f_3(x)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= f_1(x)\,dy\wedge dz + f_2\,dz\wedge dx + d_3(x)\,dx\wedge dy\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right)$$

2次の微分形式

次のページ

線積分

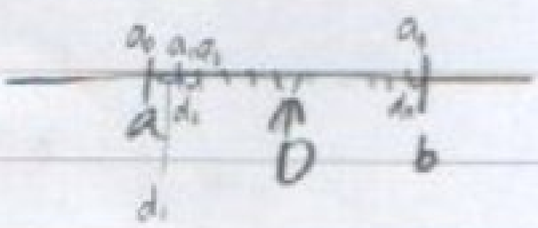
$\mathbb{F}$ 力の場

$C : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

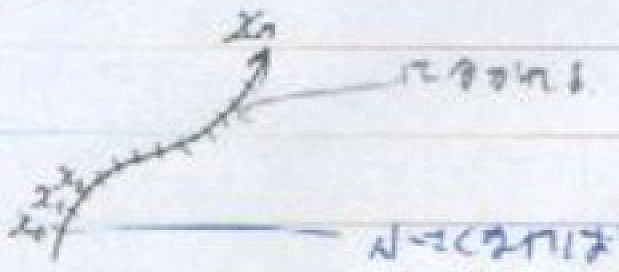
力の場からどれだけ力を入れるか

それを指している ∫

$$\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$$



>より



小さくなれば直線になる.

$C(a_0) = x_0$

$C(a_1) = x_1$

$C(a_n) = x_n$

$$\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$$

$$\|$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{F}(x_i) \cdot C'(a_i)\, d_{i+1}$$

微分している

(非常に細かい分に分けて)
それを足し合わせている
$\|$
線積分

微分形式になおすために,

$$x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \left\{ a \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \underline{f(x) \cdot a} \right\}$$

線形写像となる.

$W(x)a$ とおく
w は1次の反対称 tensor

曲線に沿って.

$$\int_C w = \sum_{i=0}^{n-1} w(x_i)(c'(a_i))\, d_{i+1}$$

$\boxed{\text{1次の微分形式の曲線 } C \text{ に沿っての積分}}$

面積分

$\mathbf{f}$ 流れの場　　2次の微分形式 と考える

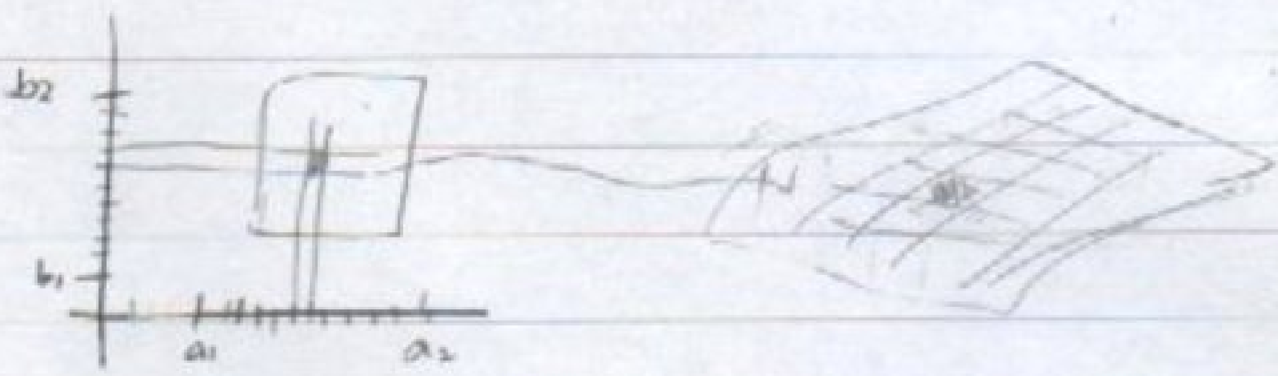
↳ 面積分と同じ

曲面を考える.

γ(曲面) $: [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \to \mathbb{R}^3$

local (局所的)

$$\int_\gamma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$$



$$\frac{\partial \gamma}{\partial x}(x) d_1 \times \frac{\partial \gamma}{\partial y}(x) d_2$$

$$\parallel$$

$$\sum \mathbf{f}(x) \cdot \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}(x) \times \frac{\partial \gamma}{\partial y}(x) \right) d_1 d_2$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbf{f}(x) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

2次の微分形式

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x}(x) d_1 \times \frac{\partial \gamma}{\partial y}(x) d_2$$

$$x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \{ \underbrace{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbf{f}(x) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}_{\to\ \omega(x)(\mathbf{a}, \mathbf{b})} \}$$

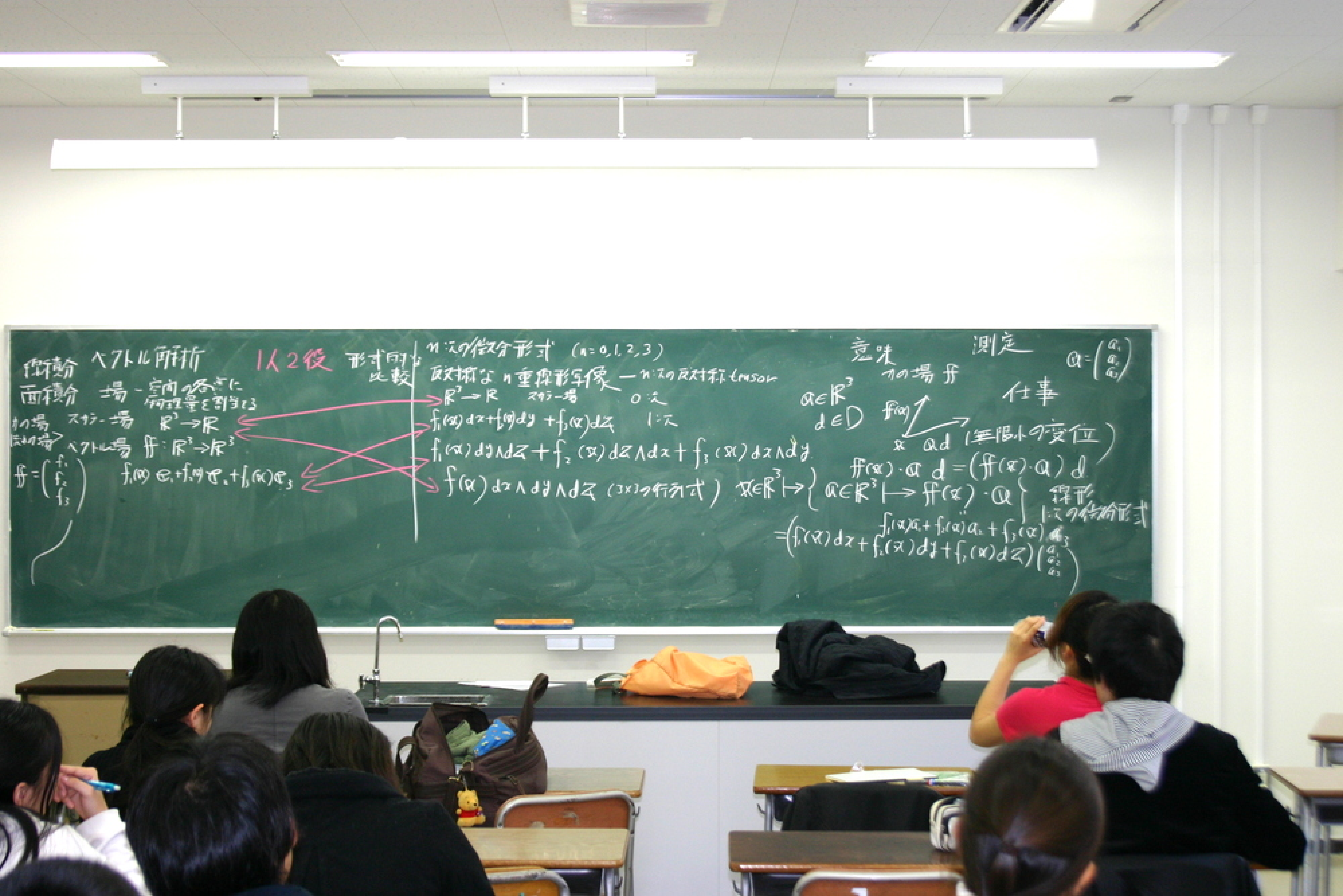
$$\parallel$$

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}(x) \times \frac{\partial \gamma}{\partial y}(x) \right) d_1 d_2$$

$$\hookrightarrow = \{ f_1(x)\, dy \wedge dz + f_2(x)\, dz \wedge dx + f_3(x)\, dx \wedge dy \} (\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

$$\int_\gamma \omega = \sum \omega(x) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}(x), \frac{\partial \gamma}{\partial y}(x) \right) d_1 d_2$$

と定義



線積分 ベクトル解析
面積分
1人2役
形式的な比較
スカラー場
ベクトル場
n次の微分形式 (n=0,1,2,3)
反対称な n重線形写像 — n次の反対称 tensor
スカラー場
0次
1次
f₁(x) dy∧dz + f₂(x) dz∧dx + f₃(x) dx∧dy
f(x) dx∧dy∧dz (3×3の行列式)
意味
力の場 F
測定
仕事
無限小の変位
線形
1次の微分形式

線積分　ベクトル解析　1人2役　形式的な比較

面積分　場 − 空間の各点に物理量を割当てる

力の場　スカラー場　$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

流れの場　ベクトル場　$\mathbb{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\mathbb{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$　$f_1(x)\mathbb{e}_1 + f_2(x)\mathbb{e}_2 + f_3(x)\mathbb{e}_3$

n 次の微分形式 (n …

反対称な n 重線形写像…

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$　スカラー場

$f_1(x)\,dx + f_2(x)\,dy + f_3(x)\,…$

$f_1(x)\,dy \wedge dz + f_2\,(…$

$f(x)\,dx \wedge dy \wedge dz$

$(n=0,1,2,3)$

…形写像 — n次の反対称tensor

…場 　0次

$\ldots + f_3(x)\,dz$ 　1次

$f_2(x)\,dz\wedge dx + f_3(x)\,dx\wedge dy$

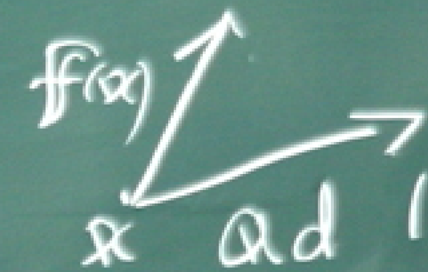
$\wedge dz$ (3×3の行列式)

意味 　　測定 　　$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

力の場 $\mathbb{F}$ 　　仕事

$a \in \mathbb{R}^3$

$d \in D$



(無限小の変位)

$\mathbb{F}(x)\cdot a\, d = (\mathbb{F}(x)\cdot a)\, d$

$x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \left\{ a \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{F}(x)\cdot a \right\}$ 　線形 1次の微分形式

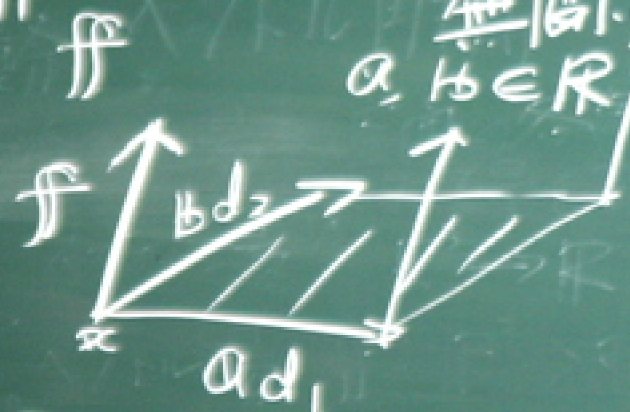
$\qquad = f_1(x)a_1 + f_2(x)a_2 + f_3(x)a_3$

$= (f_1(x)\,dx + f_2(x)\,dy + f_3(x)\,dz)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$d_1, d_2 \in D$
平行六面体の体積

流れ

$\mathbb{f}$



無限小の平行四辺形

$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^3$

$d_1, d_2 \in D$

単位時間

平行六面体の体積

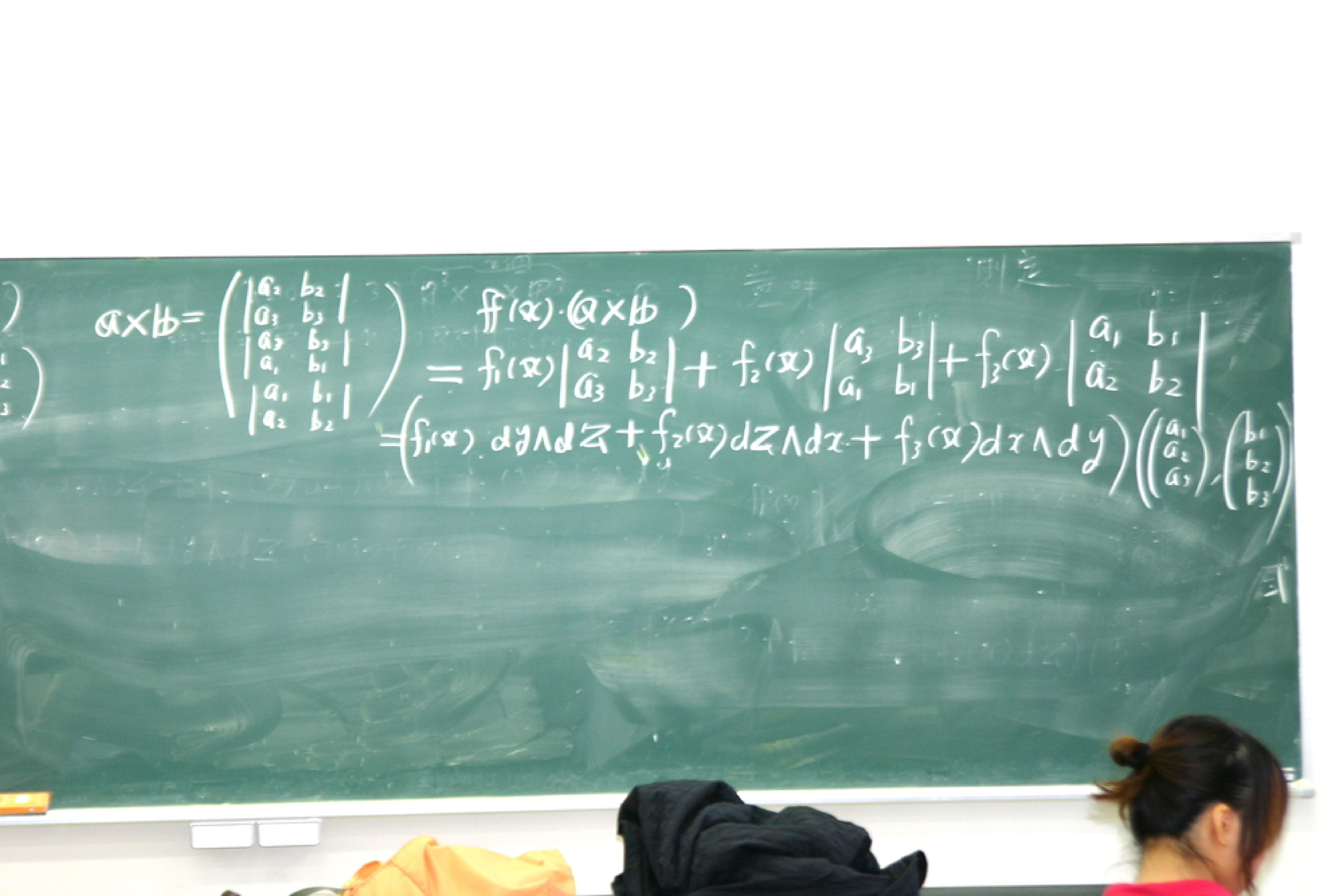
$$\mathbb{f}(x)\cdot\left(\mathbb{a}d_1 \times \mathbb{b}d_2\right) = \left(\mathbb{f}(x)\cdot\mathbb{a}\times\mathbb{b}\right)d_1 d_2.$$

$$(\mathbb{a},\mathbb{b}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{f}(x)\cdot\left(\mathbb{a}\times\mathbb{b}\right)$$

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

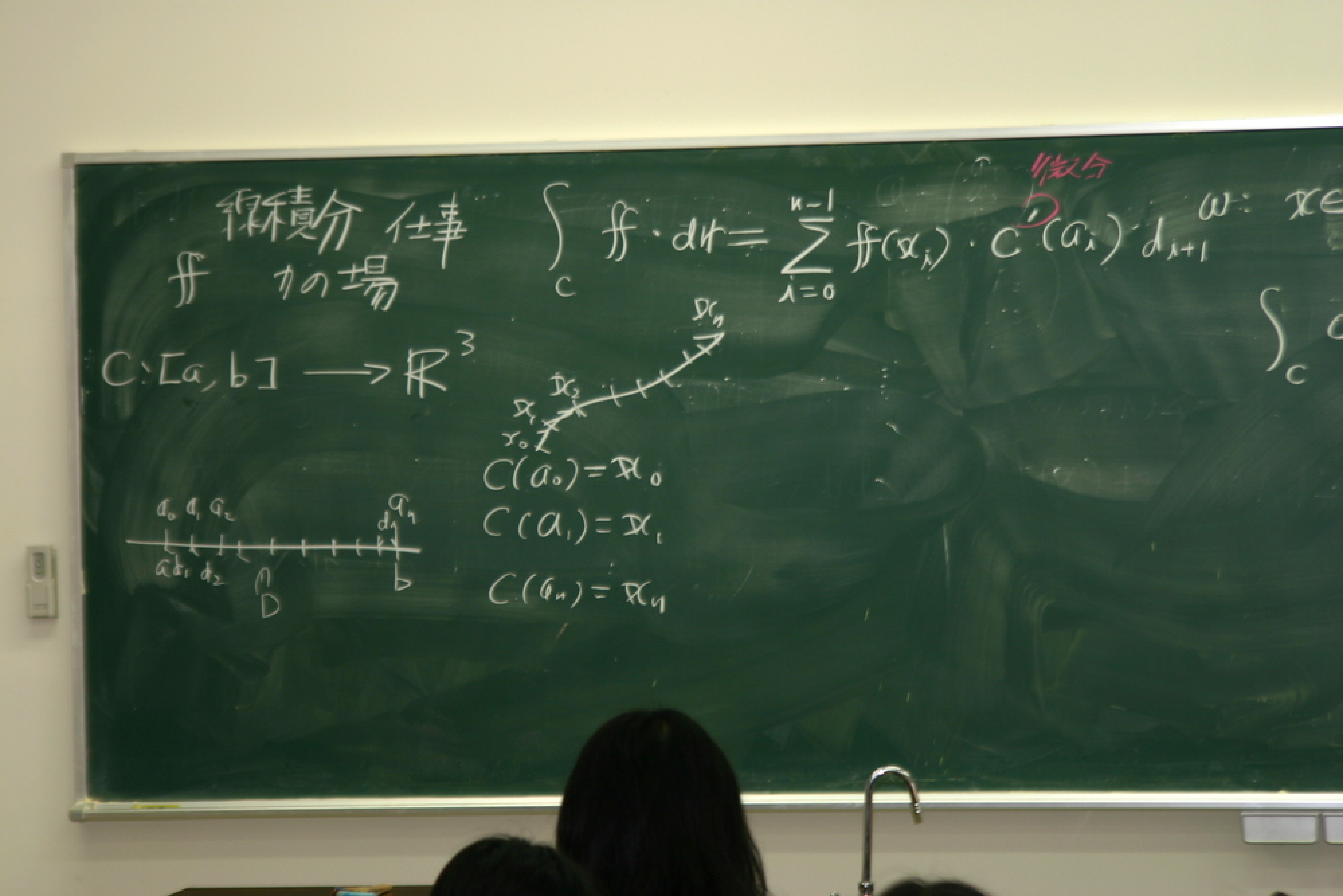
$$\mathbb{a}\times\mathbb{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$= (f_1$



$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$
$\mathbf{f}(x)\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$
$= f_1(x)\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix} + f_2(x)\begin{vmatrix}a_3&b_3\\a_1&b_1\end{vmatrix} + f_3(x)\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}$
$= (f_1(x)\,dy\wedge dz + f_2(x)\,dz\wedge dx + f_3(x)\,dx\wedge dy)\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right)$


仕事
力の場
C:[a, b] → R^3
∫_C f · dr = Σ_{i=0}^{n-1} f(x_i) · C'(a_i) · d_{i+1}
ω: x∈R^3 ↦ { a∈R^3 ↦ f(x) · a
ω(x)(a)
ωは1次の反対称 tensor
∫_C ω = Σ_{i=0}^{n-1} ω(x_i)(C'(a_i)) d_{i+1}
C(a_0) = x_0
C(a_1) = x_1
C(a_n) = x_n



線積分 仕事
$\mathbb{F}$ 力の場
$\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{F}(x_i) \cdot C'(a_i)\, d_{i+1}$
微分
$\omega : x \in$
$C : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$
x_0 x_1 x_2 x_n
$C(a_0) = x_0$
$C(a_1) = x_1$
$C(a_n) = x_n$
a_0 a_1 a_2 a_n
a d_1 d_2 d_n b
D

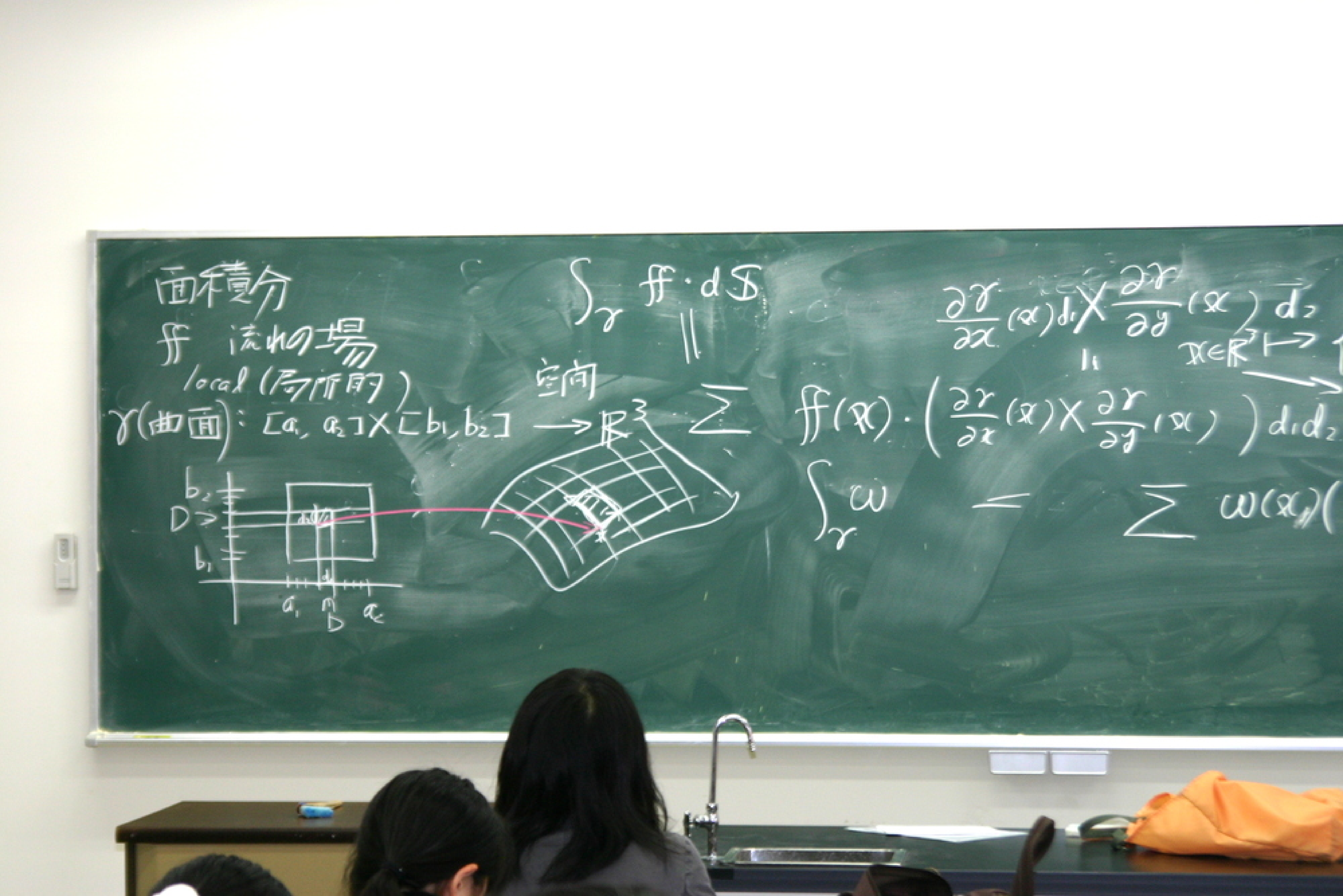
ωは1次の(反対称) tensor

$\omega : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \left\{ a \in \mathbb{R}^3 \mapsto \underbrace{f(x) \cdot a}_{\omega(x)(a)} \right\}$

$\ldots) \, d_{i+1}$

$$\int_c \omega = \sum_{i=0}^{n-1} \omega(x_i)(c'(a_i)) \, d_{i+1}$$

面積分
流れの場
local (局所的)
空間


面積分
ff 流れの場
local (局所的)
γ(曲面): [a1, a2] × [b1, b2] → R³
空間
∫γ ff · dS
Σ ff(x) · (∂γ/∂x (x) × ∂γ/∂y (x)) d1d2
∂γ/∂x (x) d1 × ∂γ/∂y (x) d2
x∈R² ↦
∫γ ω = Σ ω(xi)(

2次の微分形式
(a, b) ∈ R³ × R³ ↦ f(x) · (a × b)
ω(x)(a, b)
= f₁(x) dy ∧ dz + f₂(x) dz ∧ dx + f₃(x) dx ∧ dy

22回目

西村先生・みなさま:

遅くなりましたが, 12/12の3限、「基礎数学」(西村先生)の3学期2回め(通算22回め)
を聴講しました。教室は1E203です。出席者は、55名(前回も55名;昨年同期は32名)
+教員1名(私)+TA2名(中井さん・中西さん)です。

内容は, 前回の内容をかなりトレースしたあと、微分形式による面積分まで説明
されました。

私にとっては、今年度、これまでで最も面白かった回でした。力の場と流れの場が
どう違うか、それぞれがどのように微分形式で表現されるか、線積分や面積分が
微分形式でどのように表現されるか、丁寧・明快に説明されました。次回はいよいよ
ストークスの定理だそうです。楽しみです。

授業後、2人の学生が私の研究室に質問に来ました。「全くわからない」と言って
いましたが、

- 「反対称n重線形写像」と「n次の反対称tensor」と「n次の交代形式」は同じもの。

- 空間の各点に「反対称n重線形写像」が割り当てられているような数学的な存在を
「n次微分形式」というのだということ。

の2つがわかっていませんでした。これらは定義ですから、説明すれば「ああそうか」
と納得してくれました。ところが学生のノートには、これらの定義がきちんと書かれて
いません。式は書かれていても、それが微分形式の定義であるとは書かれていないので、
学生は何が微分形式なのかがわからないのです。

線型写像や線型空間のときもそうですが、大事な定義の宣言を、途中から口頭で
済ませてしまったら、学生には伝わりません。定義の式だけでなく、それが何の定義
であるかまで、黒板に明記して頂かないと、学生は簡単にlostします。それは世話の
焼きすぎと思われるかもしれませんが、質問に対応する教員の負担や、そこでdrop
outしてしまう学生のケアまで考えれば、それは十分に報われることだと思います。

中井さんが書かれていましたが、dxやdyの定義も、多くの学生はわかっていないと
思います。物理学や数理科学演習で使われるdxやdyと、ここで使われているdxやdy
が違うものだということもわかっていないかもしれません。dx^dyがR^3×R^3-Rの
交代形式であることも、学生の多くは忘れてしまっていると思います。ただ、学生が
忘れていることを毎回説明しなおすよりも、以前のノートを見直させて、自力でみつけて
(思い出して)ごらん、と、時間を与えていただくのがいいのではないでしょうか?

中井さん・中西さんの補習が機能しているように思います。補習の機会があることを、
再度、アナウンスして頂くのも有効だと思います。

総じて、先生の講義は、ぴしっと情報を学生に伝達することに成功しているとは
思えません。考えさせて理解させる以前に、定義などの情報は正確に伝えるべきだと
思います。しかし、先生の講義で展開される数学はとてもシンプルで深くて、本当に
素晴らしいといつも思います。

--
奈佐原　顕郎　(旧姓西田)
筑波大学農林工学系