No.

Date 2008. 12. 5

基礎数学　　55人

力の場 $\mathbf{f}(x)$　in 空間　$x \in \mathbb{R}^3$

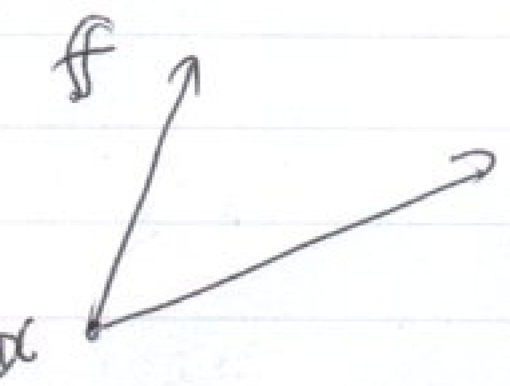
ベクトル場　「そういうものがある。」 (idealistic platonic な考え方

プラトンのイデア

ex) 「美は永遠である」

美：ことば

$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \quad d \in D$



$\mathbf{a}d$ 微小な変位

仕事　$\mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{a}d = (\mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{a})d$

↑内積

$\varphi : \mathbb{R}^3 \ni \mathbf{a} \longmapsto f(x) \cdot \mathbf{a} \in \mathbb{R}$　線形関数

我々は operational (pragmatic) に考えたい。

力はどうやって計測するのか？ → 「仕事」を計る。

力より仕事の方が先。

仕事 $\varphi = a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz$

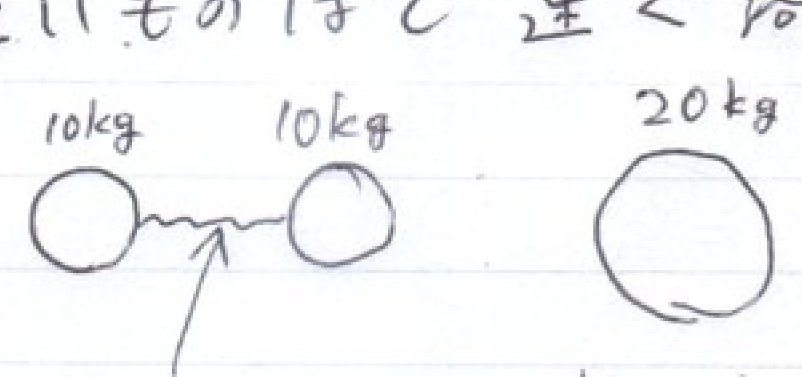
このときの (a_1, a_2, a_3) が $\mathbf{f}$。

a_1 がほしければ $\mathbf{e}_1 d$ だけうごかしてみればよい。

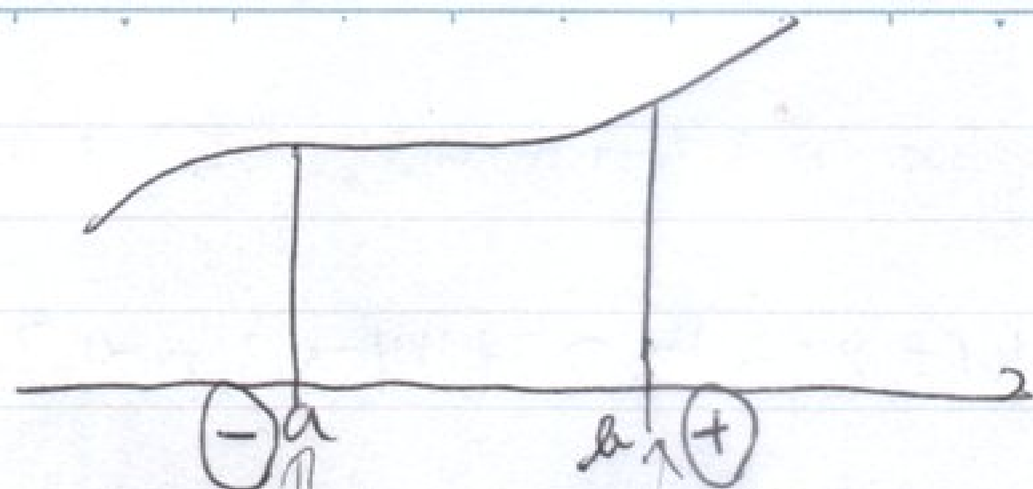
思考実験　Gedanken experiment

ex) ガリレオの思考実験

「重いものほど速く落ちる」の反証



ひもでむすぶと速くなるか？



点に＋と－をつける。

境界

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

それはKock-Lawvereの公理

無限小のレベルで微積分の基本定理がなりたつようにしておけば、有限のレベルでも微積分の基本定理がなりたつ
（ただ単に足していけばよい）

（この話を$\mathbb{R}^3$に一般化する）

ベクトル解析の主戦場は$\mathbb{R}^3$である。

曲線 $\gamma : \underbrace{[a, b]}_{\text{parameter}} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

特に、 $a = x$
$b = x + d$

いま、スカラー場φをかんがえる。

$\gamma(x) = \mathbf{x}$
$\gamma(x + d) = \mathbf{x} + \mathbf{a}\,d$ 〜 無限小のレベルにおける慣性の法則

$$\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{a}\,d) - \varphi(\mathbf{x}) = \underbrace{\varphi'(\mathbf{x})(\mathbf{a})}_{\text{1次の微分形式 } \omega}\,d$$

実はgrad

スカラー場は0次の微分形式

$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$
parameter

$\mathbb{R}^3$の各点に、$\mathbb{R}^3$から$\mathbb{R}$への線形写像を対応させるもの。

ω 1次の微分形式

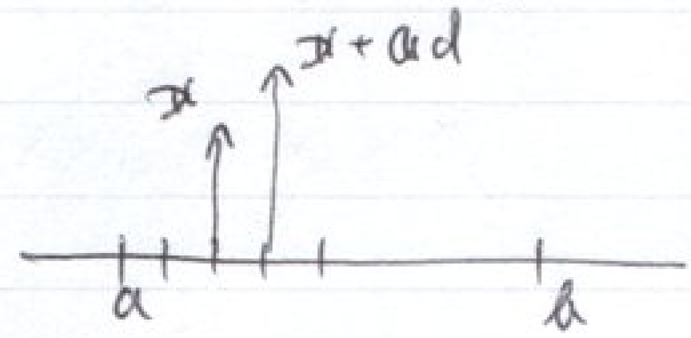
$\underbrace{x \in \mathbb{R}^3}_{\mathbb{R}^3\text{の各点}} \longmapsto \omega(x)$

これ自体が線型写像 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

例) 力とは $x \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (a \in \mathbb{R}^3 \longmapsto f(x) \cdot a)$

$$\int_\gamma \omega = \int \omega^{(x)}(a)\, d$$

← 線積分

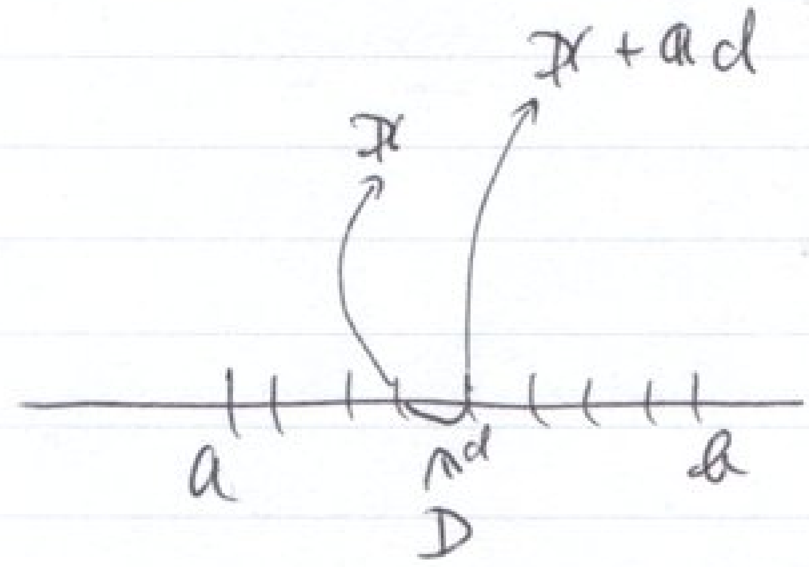


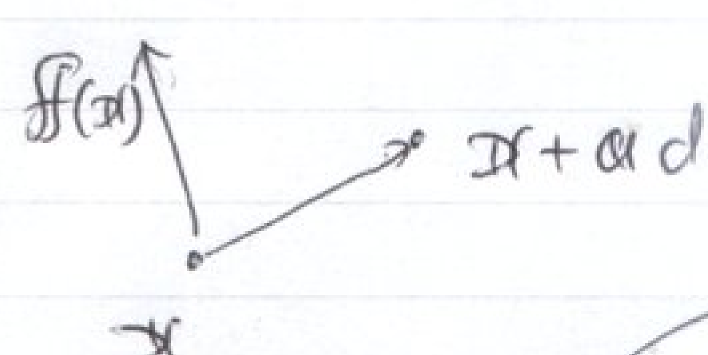
無限小のレベルでの、多変数の微積分学の基本定理

線積分

f : 力の場

$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$





$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$の線型関数

仕事は、$(f(x) \cdot a)\, d$

これをaからbについてやってたしあわせたもの。

これをωとおくと、

$$\int_\gamma \omega(x)(a)\, d = \int_\gamma f \cdot dx$$

3学期 (1)

12/5/08

力の場 in 空間

$\mathbf{a} \in$ $x \in \mathbb{R}^3$ $d \in D$

ベクトル場

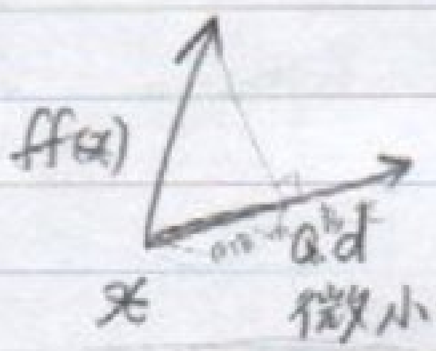
$\mathbf{ff}$ ← fの太字

$\mathbf{a}$ と同じこと。

ゼロ ベクトル

$\mathbb{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathbf{ff}(x)$



微小な変位

どれだけ

仕事 をするか

$\mathbf{ff}(x) \cdot \mathbf{a}d = (\mathbf{ff}(x) \cdot \mathbf{a})d$

内積

登った高さ　登った高さを求めるには 内積を使う

$\varphi : \underset{\mathbb{R}^3}{\underset{\cap}{\mathbf{a}}} \longmapsto \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{\mathbf{ff}(x) \cdot \mathbf{a}}}$　線形関数

力はベクトル場

↓

イデア　プラトン という人

idealistic　platonic

operational
pragmatic

計測

$\varphi = a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz$

↓が知りたければ

e_1の方向にそっていって

$e_1 d$

$(a_1, a_2, a_3) = \mathbf{ff}(x)$

Gedanken experiment
(思考実験)

昔の人：重いものほど速く落ちる

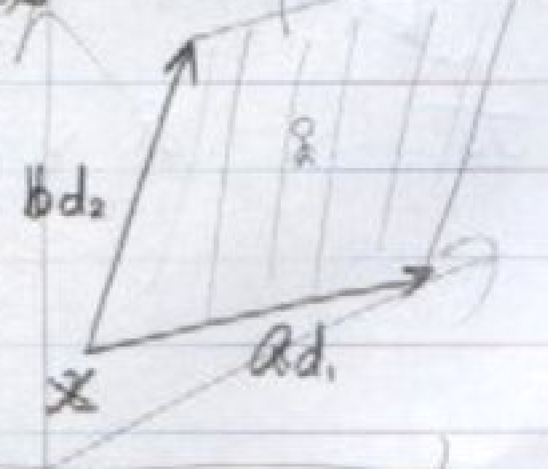
ガリレオ：10kg と 20kg

±曲面と数える

3次元の、風がどれだけ流れたか。

流れの場

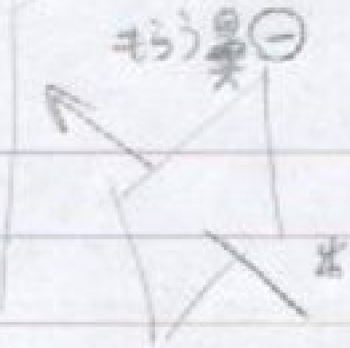
$\mathbb{f}$



一面を通過する物理量

$d_1, d_2 \in D$

$a, b \in \mathbb{R}^3$



+ − だから、共有している面は 0 ゼロになる

2つの無限小の変位をとる

単位時間どれだけ通過するか

立体でも、打ち消しあって 0になる

$\mathbb{f}(x)\cdot(a d_1 \times b d_2)$

垂直な向き

小さいへやの一つの面から出ている量

<u>仕事</u> $= \{\mathbb{f}(x)\cdot(a\times b)\}\, d_1 d_2$

外積で垂直な向きが分かる

<u>2重線形</u>　反対称（入れかえたら符号が変わる）
交対称
がでてくる

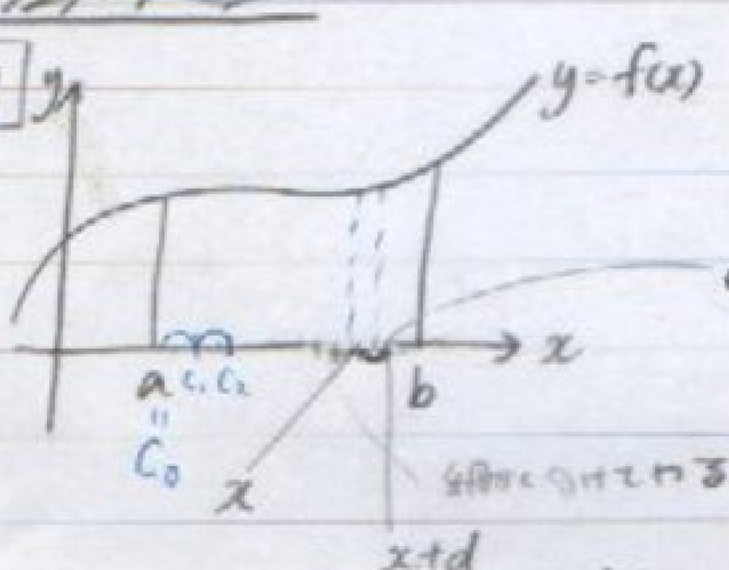
$$(a, b) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{f}(x)\cdot(a \times b) \in \mathbb{R}$$

└ 内積をとってやる

$$\varphi = a_1 dy \wedge dz + a_2 dz \wedge dx + a_3 dx \wedge dy$$

微積分の基本定理

積分の復習



とすると、

$$[\,] = \frac{1}{2}(f(x+d) + f(x))\,d$$
$$= \frac{1}{2}(f(x) + f'(x)d + f(x))\,d$$
$$= \frac{1}{2}(df(x) + \cancel{f'(x)d^2} + f(x)d)$$
$$= df(x)$$

$$\int_x^{x+d} f(x)\,dx = f(x)\,d$$

$\int_a^b f(x)\,dx$

$\shortparallel$

$= \sum_{i=1}^{n} d_i f(c_i)$

$c_i = c_{i-1} + d_i$

$F' = f$ とする

$$\left[\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\right]$$ 基本定理

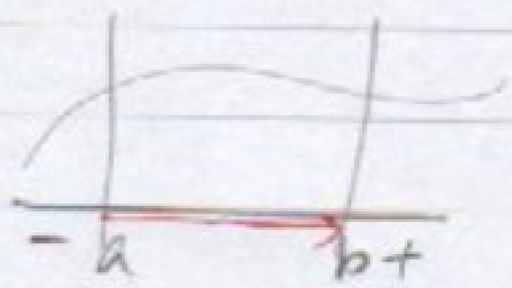
$a = x$
$b = x + d$ とおくと、

$F(x+d) - F(x) = f(x)d \quad (\forall d \in D)$

ただ1つ定まって、

(Kock - Lawvere の公理)

± を決める → 点に向きを決める



境界 $(b) - (a)$

$\boxed{\text{無限小のレベルでの微積分の基本定理}}$

ベクトル解析

主戦場 $= \mathbb{R}^3$

曲線 $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$a = x$
$b = x + d$

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ への線形写像が出てくる

多変数の微分

スカラー場 φ

$\boxed{\text{無限小のレベルにおける慣性の法則}}$

$\varphi($ $\quad \gamma(x+d) = x + ad \quad (\forall d \in D)$

gradに関する基本定理 が決まるように成り立っている

$$\left[\varphi(x + ad) - \varphi(x) = \varphi'(x)(a)d\right]$$

境界での差 を表わしている

$\varphi(x) \cdot a \cdot \varphi(x)$

非常に小さい積分

・ が出てくる

φ' : 1次の微分形式

grad

各点に、$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}$ への線形写像を対応させてる

$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ 曲線

parameter

各点に対して、

ω 1次の微分形式

$x \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \omega(x)$

線形写像 : $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R} \longmapsto$

$(a \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{f}(x) \cdot a)$

xにおける線形写像

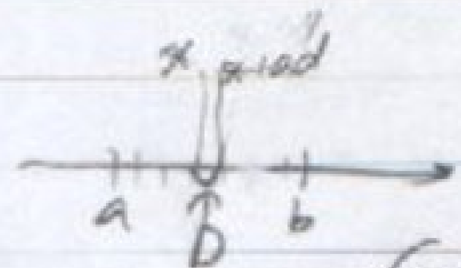
$\int_\gamma \omega = \underbrace{\omega(a)}_{\text{これで数が決まる}} d$

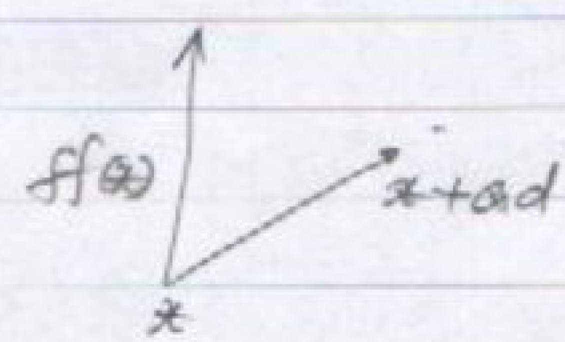
線積分

$\mathbb{f}$ 力の場

$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\int_\gamma \mathbb{f} \cdot d\gamma$





$a \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

関数 → ω とおく

$(\mathbb{f}(x) \cdot a) d$

1次の微分形式

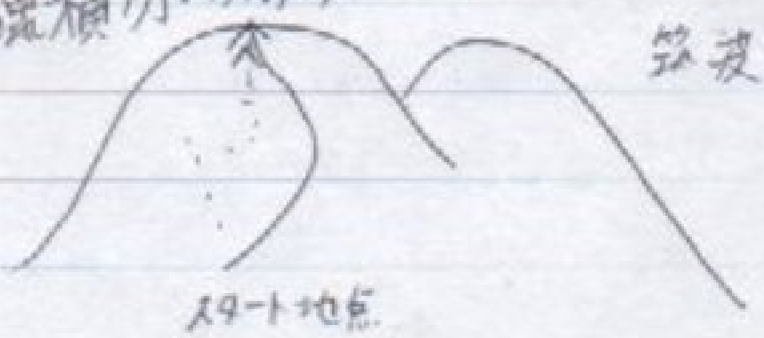
これをすべての区間で加えたもの が、線積分

点 $x \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (a \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{f}(x) \cdot a \in \mathbb{R})$

線形関数

これを ω とおいている.

線積分の概念



筑波山を登る

疲れる量は同じ

(2) 12/12/08

ベクトル解析

場を扱う ― 空間の各点に物理量を割当てる.

ベクトル解析では ベクトル場になる

スカラー場 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

・ベクトル場 ― $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

空間の各点

e_1, e_2, e_3 標準基底

で扱うもの

力の場 ― 線積分

要となる

流れの場 ― 面積分

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \qquad f_1(x)e_1 + f_2(x)e_2 + f_3(x)e_3$$

基底となっている

対応させることができる!

n次の
微分形式 $(n = 0, 1, 2, 3)$

n個

$\mathbb{R}^3 \times \cdots \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

反対称な n重線形写像 ― n次の反対称 tensor という。

$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

スカラ

☆ 0次の場合, スカラー場と同じこと.

・1次の反対称テンソルは

基底となっている

$$f_1(x)dx + f_2(x)dy + f_3(x)dz$$

とかける.

によって d_1, d_2, d_3 はかわってくる.

・2次

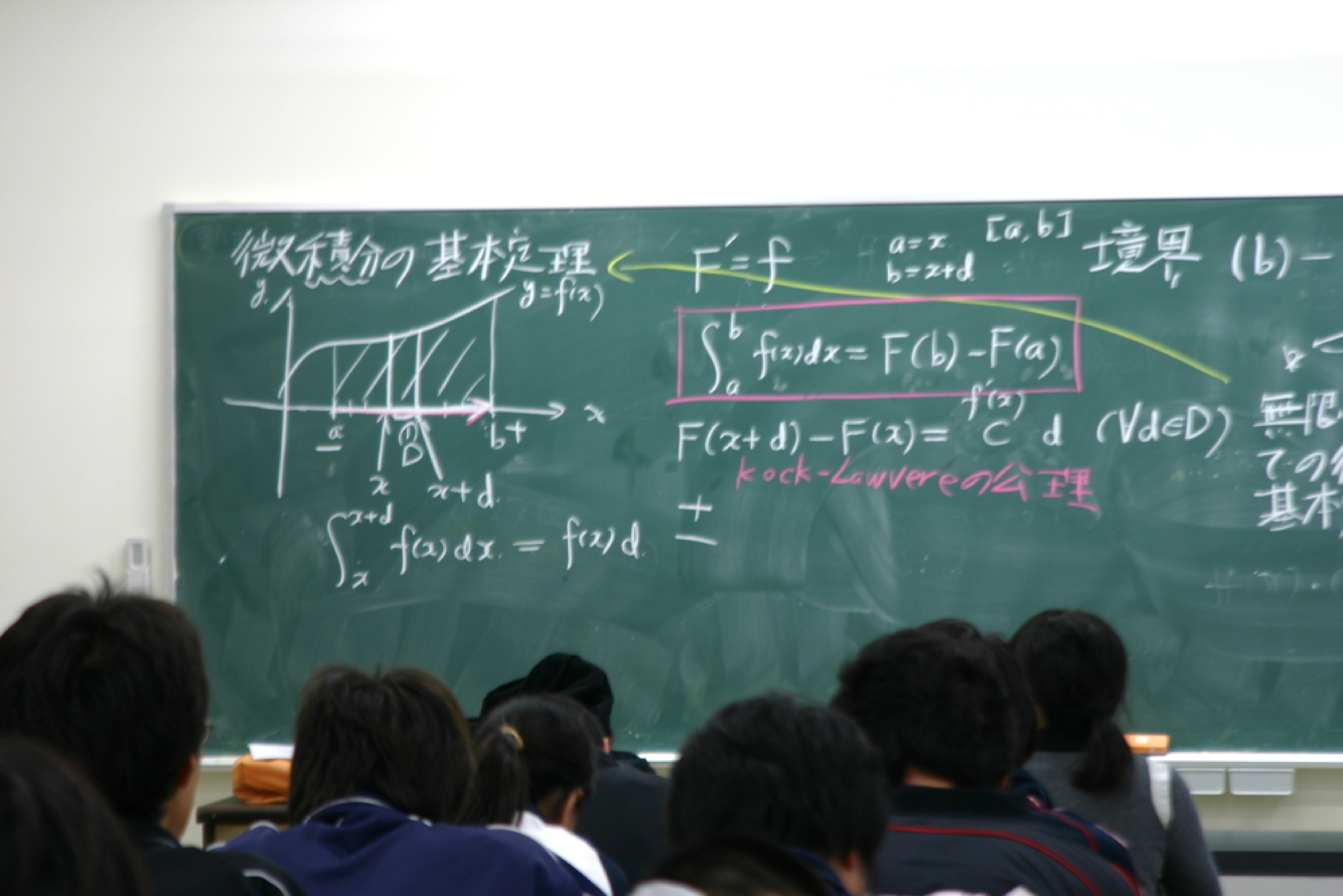
$$f_1(x)dy \wedge dz + f_2(x)dz \wedge dx + f_3(x)dx \wedge dy$$

Gedanken experiment
(思考実験)
流れの場
平行四辺形
単位時間
ベクトル場
idealistic
platonic
operational
pragmatic
(プラグマティズム)
計測
仕事
微小変位
QUIKSILVER

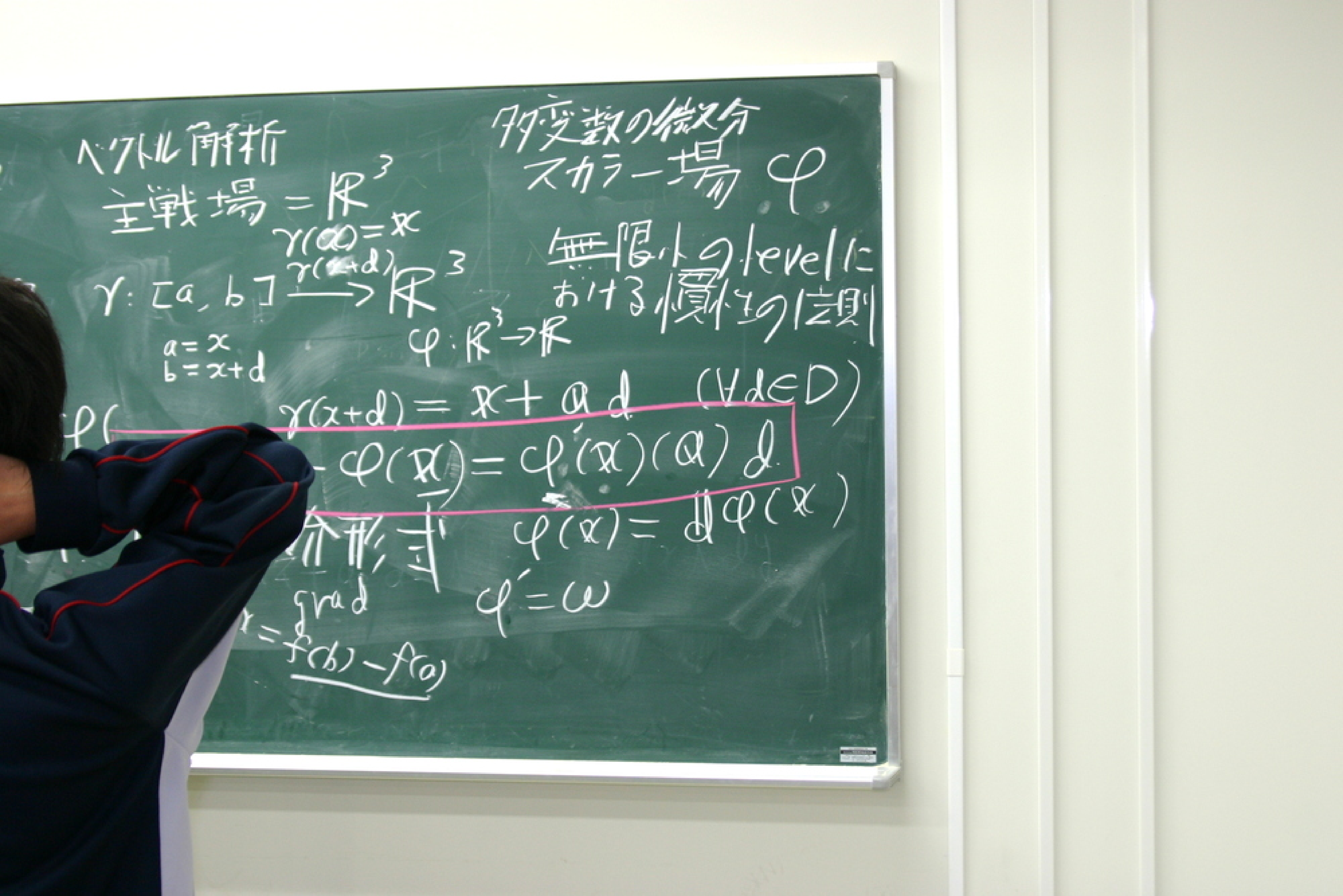
美は永遠である
力
空間
場
ベクトル場
プラトン
d∈D イデア
φ: a ↦ f(x)·a
線形 関数
Gedanken
idealistic
platonic
operational
pragmatic
(プラグマティズム)
(a1, a2, a3) = f(x)
計測
φ = a1dx + a2dy + a3dz
微小な変位
仕事
f(x)·ad = (f(x)·a)d


Gedanken experiment
(思考実験)
流れの場
平行四辺形
単位時間
10kg 10kg 20kg
b d2
a d1
f(x)·(a d1 × b d2)
= {f(x)·(a × b)} d1 d2
φ = a1 dy∧dz + a2 dz∧dx + a3 dx∧dy
(a, b) ∈ R^3 × R^3 ↦
f(x)·(a × b) ∈ R


微積分の基本定理
F' = f
∫ f(x)dx = F(b) - F(a)
F(x+d) - F(x) = f(x) d (∀d∈D)
Kock-Lawvereの公理
境界
無限小のlevelでの微積分の基本定理
ベクトル解析
スカラー場 φ


微積分の基本定理
F′=f
a=x
b=x+d
[a,b]
境界 (b)−
y=f(x)
∫_a^b f(x)dx = F(b)−F(a)
F(x+d)−F(x) = f′(x) d (∀d∈D)
kock-Lawvereの公理
∫_x^{x+d} f(x) dx = f(x) d
無限
ての
基本


[a, b]
境界
(b) − (a)
x+αd
−F(a)
f'(x)
αd
C d (∀d∈D)
の公理
無限小のlevel
での微積分の
基本定理
曲線
ベクトル解析
主戦場 = R^3
γ: [a, b] → R^3
a = x
b = x+d
φ(
γ(x+d) = x + αd (∀d∈D)
φ(x+αd) − φ(x) = φ'(x)(α)d
φ'(x) = dφ(x)
多変数の微分
スカラー場 φ
無限小のlevelにおける慣性の法則


ベクトル解析
主戦場 = R^3
γ: [a, b] → R^3
a = x
b = x+d
φ: R^3 → R
多変数の微分
スカラー場 φ
無限小のlevelにおける慣性の法則
γ(x+d) = x + a d (∀d∈D)
φ(x) = φ′(x)(a) d
φ(x) = dφ(x)
φ′ = ω
形式
grad
f(b) − f(a)

線積分
力の場
ベクトル解析
主戦場 = R^3
多変数の微分
スカラー場 φ
無限小のlevelでの微積分の基本定理
線形関数
QUIKSILVER

21回目

西村先生・みなさま:

遅くなりましたが, 12/04の3限、「基礎数学」(西村先生)の3学期1回め(通算21回め)
を聴講しました。教室は、時間割に書いてあるのとは違い、2学期とも違い、1学期後半
と同じ、1E203に戻りました。

出席者は、55名(前回は65名;昨年同期は33名)＋教員1名(私)です。前回(2学期末)
から10人も減少したのは遺憾です。教室変更を多くの学生が忘れていたのでしょうか。

内容は,
- 一次の微分形式(力と仕事を例にとって)
- その積分(線積分)

などでした。

おそらく学生は、理解できていません。それは、数学的な困難にあるのではなく、板書や
話の展開が整理されていないからだと思います。学生の質問に対して、先生は、それまでの
話とは別の角度から説明しようとされますが、むしろ学生は、先生の話の本筋をきちんと
トレースしたいと考えているのであり、そのためには、話の筋をきれいに整理して、変数や
記号の衝突をできる限り避け、板書の流れを一本化し、ひとつひとつの言葉と記号をきっちり
と確認して頂くことが必要かと思います。それが固まっていない段階で観念的・概念的な
説明をされるのは、かえって混乱を来たし、きちんとした数学の理解にはつながらないと
思います。

私は授業の前に、板書をノートにリハーサルしますが、他の先生方は、それをなさらない
のでしょうか？

--
奈佐原　顕郎　(旧姓西田)
筑波大学農林工学系