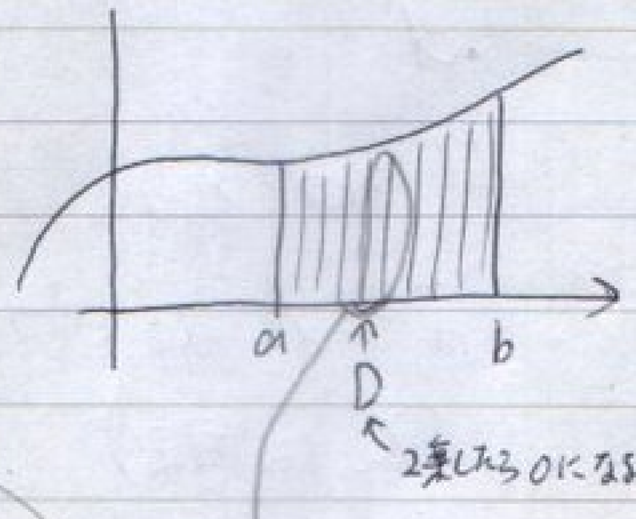
前回：積分

# 基礎数学（第9回）

2008/11/06

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

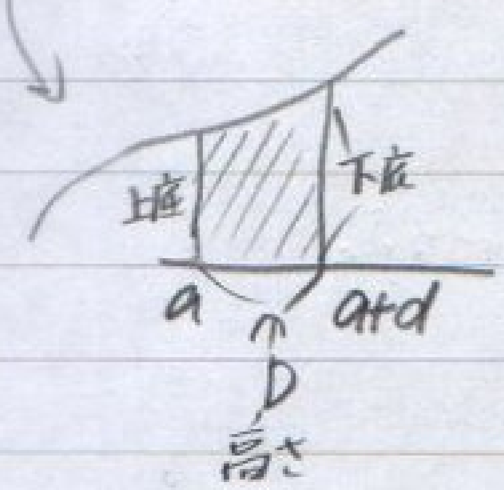



2乗したら0になる数.

$d \in D$

$$\int_a^{a+d} f(x)\,dx$$

物理数学でよく出てくる




台形の面積：

$$\frac{1}{2}\{f(a)+\underbrace{f'(a)d}_{\text{dをかけるとd}^2\text{になって消える。}}+f(a)\}d$$

$$= f(a)d$$

$= \underset{\text{上底}}{f(a)} \times d$（たて×よこ）

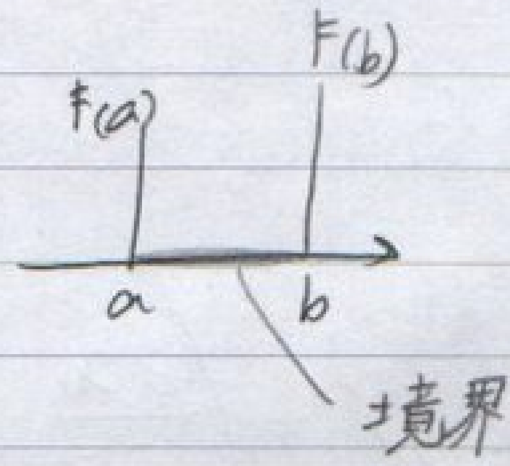
長方形の面積

## 微積分学の基本定理

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$F' = f$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$




aを固定

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

$$F(x+d) - F(x)$$

$$= \int_a^{x+d} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx$$

$$= \int_x^{x+d} f(x)\,dx$$

$$= \underbrace{f(x)}_{\text{微分係数}}\, d$$

（Kock-Lawvere より）

$F'(x) = f(x)$

Fはfの原始関数

$$\int_a^{a+d} f(x)\,dx = F(a+d) - F(a) \quad \left(= F(a) + F'(a)d \ \text{(Kock-Lawvereから)}\right)$$

$$= f(a)d$$

---

ベクトル解析

└ 空間(の中での話)

　└ 空間の全ての点に何らかの数値が対応する関数

物理量

スカラー場 (格点にスカラー)

場 (field)

ベクトル場 ― 空間の各点に何らかのベクトルが対応する関数

(ベクトルを対応させる)

a dogma (= 分法)

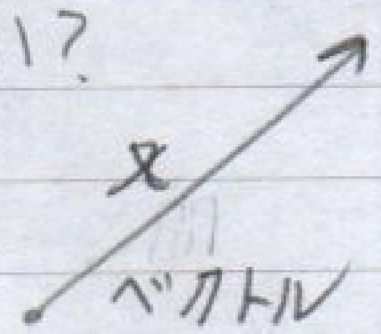
テンソル

n重線形

○ 力はベクトルか？

変位 $x$

└はベクトル




$\underbrace{F}_{\text{力から}F} \cdot \underbrace{x}_{\text{ベクトル}} = \underbrace{\text{仕事}}_{\text{スカラー}}$ (線形

力は、変位に作用してスカラーを出している。

答え：NO，力はベクトルではない。

力は、1次のテンソル (tensor)

└ものを抽象化する

単位がない

$x^2 + x$

正方形の面積

長さ

単位を考えれば、明確

空間の中の

曲線を考える。

$t \in [a, b] \longmapsto (x(t), y(t), z(t))$

parameter
(時刻)

$\varphi$: スカラー場

$\varphi = \varphi(x, y, z)$

$= \varphi(x(t), y(t), z(t))$

$(x(a), y(a), z(a)) \to (x(b), y(b), z(b))$

合成関数の微分

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\int_a^b \frac{d\varphi}{dt}\,dt = \int_a^b \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right\} dt$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) dt$$

最初スカラー場

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

ベクトル場

gradient (勾配)
こうばい

は、ベクトル場

$$0 \in D \xrightarrow{t} \mathbb{R}^3$$

$t(0) = x$

点$x$を基点とする接ベクトル

Dから空間への写像 のとき,
0のとき, $x$になる.

Kock-Lawvereの公理

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(d) = f(0) + \underset{\exists!}{\overset{\in \mathbb{R}}{a}}\, d$$

ただ1つに定まる

$$t(d) = x + ad \longleftrightarrow \underset{\mathbb{R}^3}{\overset{}{a}}$$

$a$だけで決まっている

$\left\{\begin{array}{l}\text{足し算} \\ \text{スカラー倍}\end{array}\right.$ ができる

(1重)線形写像 = 1次のtensor

$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

空間の点 : $x, y, z$

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

$$\varphi x = \varphi(xe_1 + ye_2 + ze_3)$$

$$= x\underbrace{\varphi(e_1)}_{a_1} + y\underbrace{\varphi(e_2)}_{a_2} + z\underbrace{\varphi(e_3)}_{a_3}$$ とおくと,

$$= xa_1 + xa_2 + xa_3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto xa_1 + ya_2 + za_3$$

点$x$における$\mathbb{R}^3$の接ベクトル空間

$x : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$dx$

└ $x$という関数の微分

$dy$,

$dz$.

tensor 場は

$\cancel{f}\, f\,dx + g\,dy + h\,dz$

$f = f(x, y, z)$

$g = g(x, y, z)$

$h = h(x, y, z)$

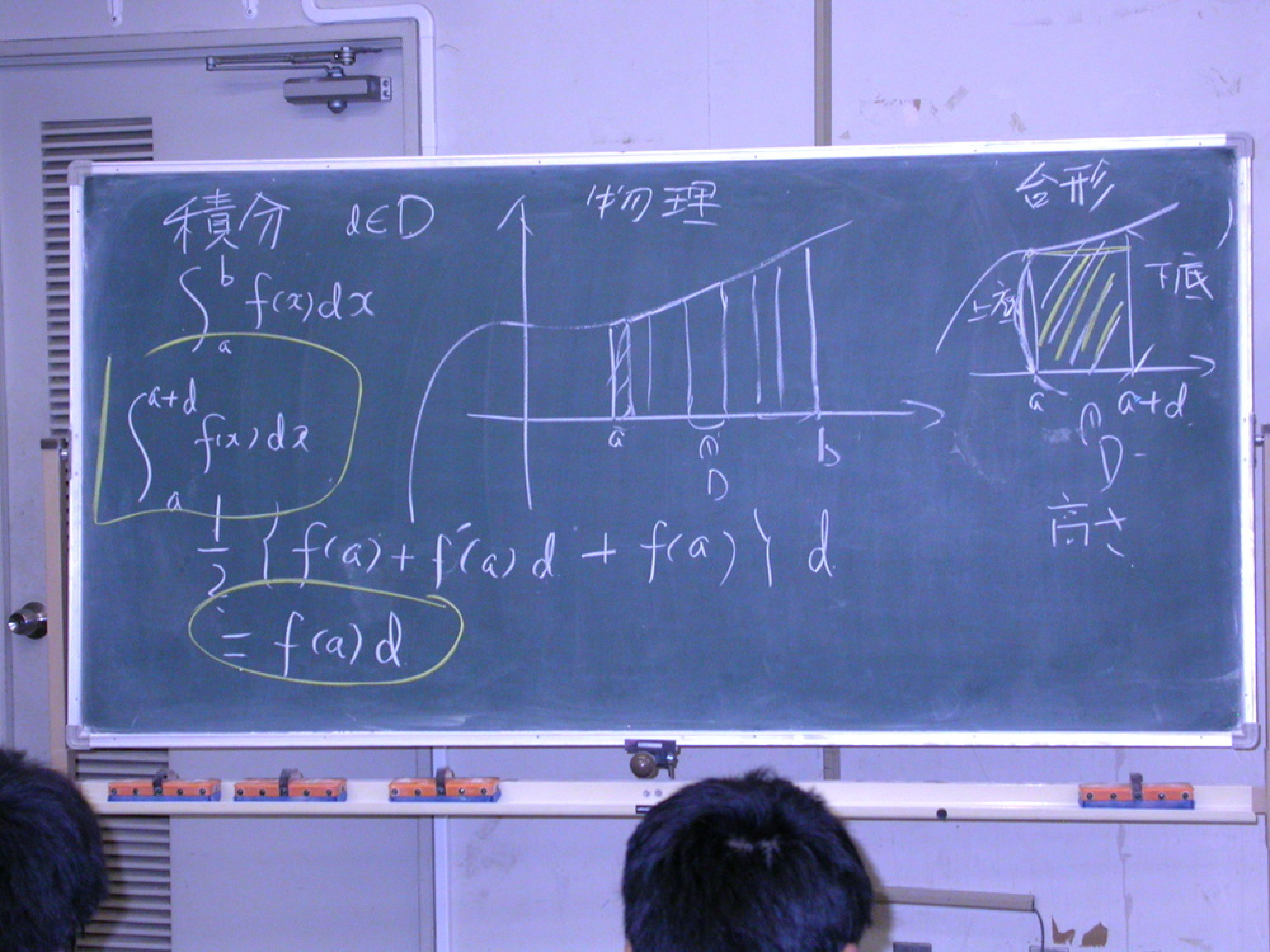
$t(\alpha) = x + a\alpha$

$D$

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$f(x)\, a_1 \alpha + g(x)\, a_2 \alpha + h(x)\, a_3 \alpha$

$= \{ f(x)\, a_1 + g(x)\, a_2 + h(x)\, a_3 \} \alpha$

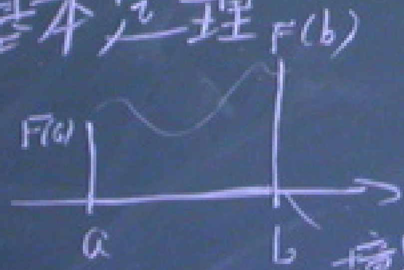


積分 $d \in D$
$\int_a^b f(x)\,dx$
$\int_a^{a+d} f(x)\,dx$
$\frac{1}{2}\{f(a)+f'(a)d+f(a)\}d$
$\fallingdotseq f(a)d$
物理
a
D
b
台形
上底
下底
a
a+d
D
高さ

# 微積分学の基本定理

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$F' = f$




$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^{a+d} f(x)\,dx = F(a+d) - F(a) = \int_x^{x+d} f(x)\,dx = f(x)d$$

$$= f(a)d.$$

aを固定

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

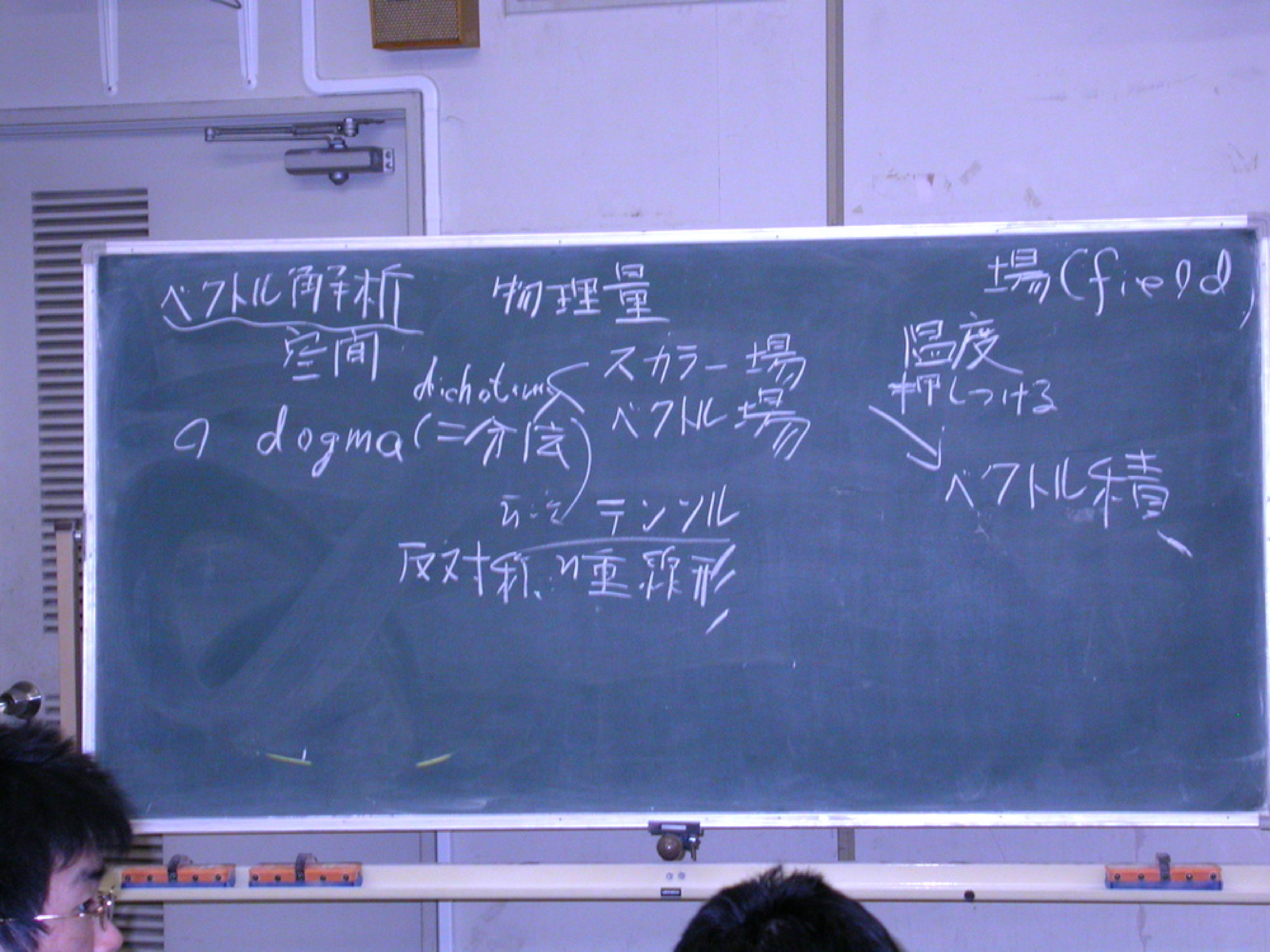
境界 $F(x+d) - F(x)$

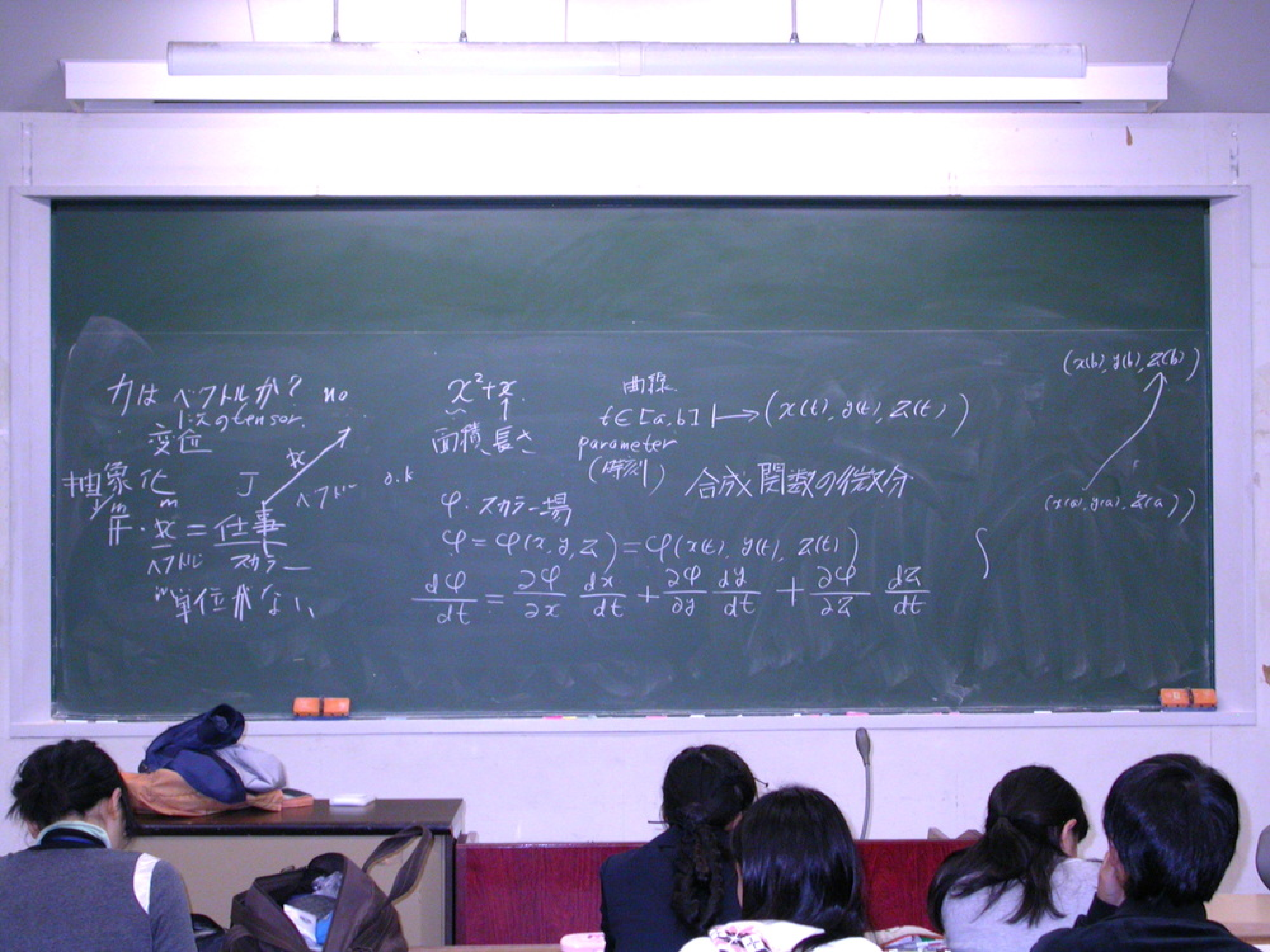
$$= \int_a^{x+d} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx$$

Kock-Lawvere.

$$F'(x) = f(x)$$

Fはfの原始関数


ベクトル解析
空間
物理量
場(field)
スカラー場
ベクトル場
a dogma(二分法)
温度
押しつける
ベクトル積
テンソル
反対称、多重線形

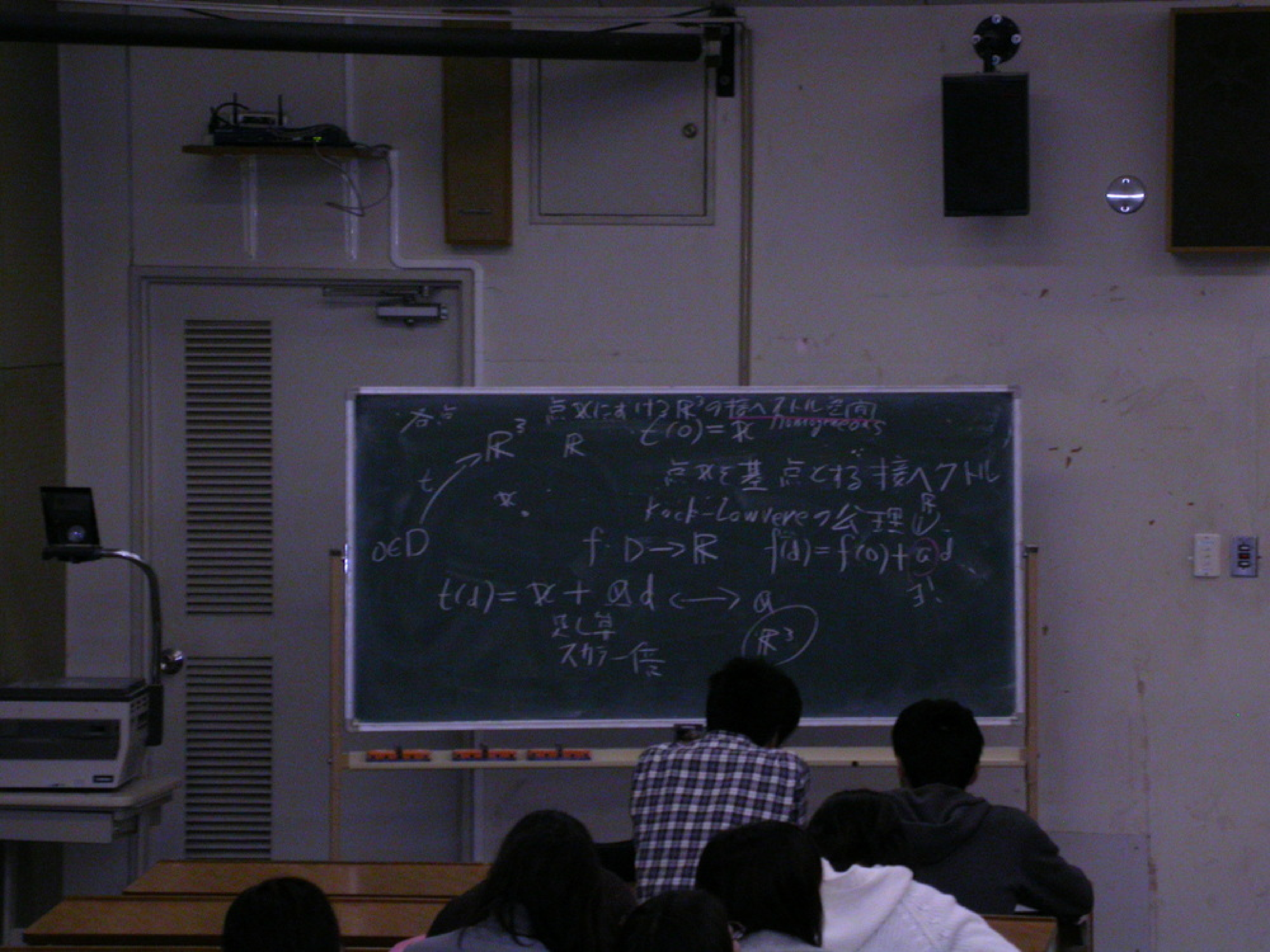

力は ベクトルか? no
1次のtensor
変位
抽象化 J
m
F・x = 仕事
ベクトル スカラー
単位がない
x
ベクトル o.k
x² + x
面積 長さ
曲線
t ∈ [a, b] ⟼ (x(t), y(t), z(t))
parameter
(時刻)
合成関数の微分
φ: スカラー場
φ = φ(x, y, z) = φ(x(t), y(t), z(t))
dφ/dt = ∂φ/∂x dx/dt + ∂φ/∂y dy/dt + ∂φ/∂z dz/dt
(x(b), y(b), z(b))
(x(a), y(a), z(a))

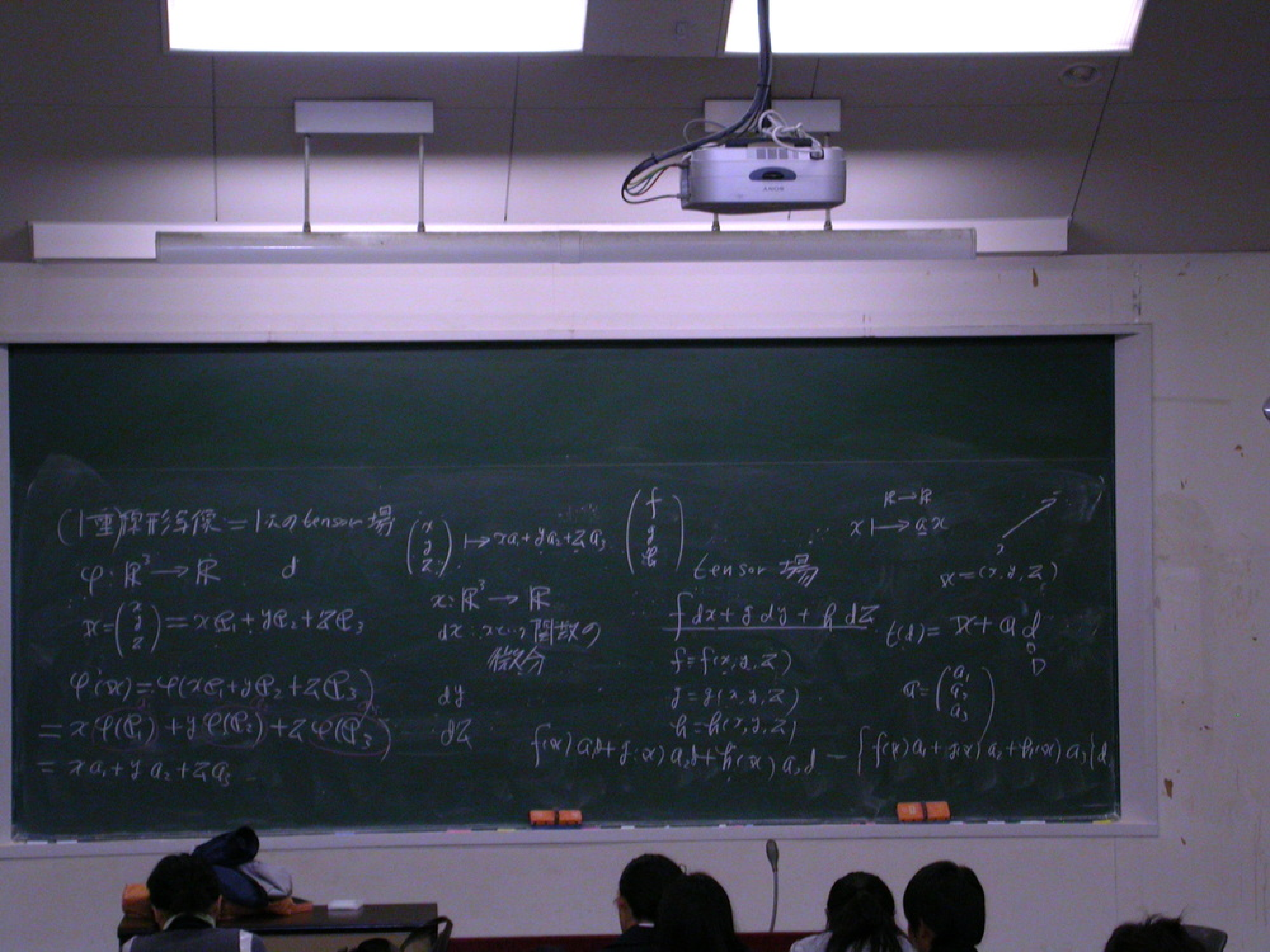
$$\int_a^b \frac{d\varphi}{dt}\,dt = \int_a^b \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt} \right\} dt$$

ベクトル解析

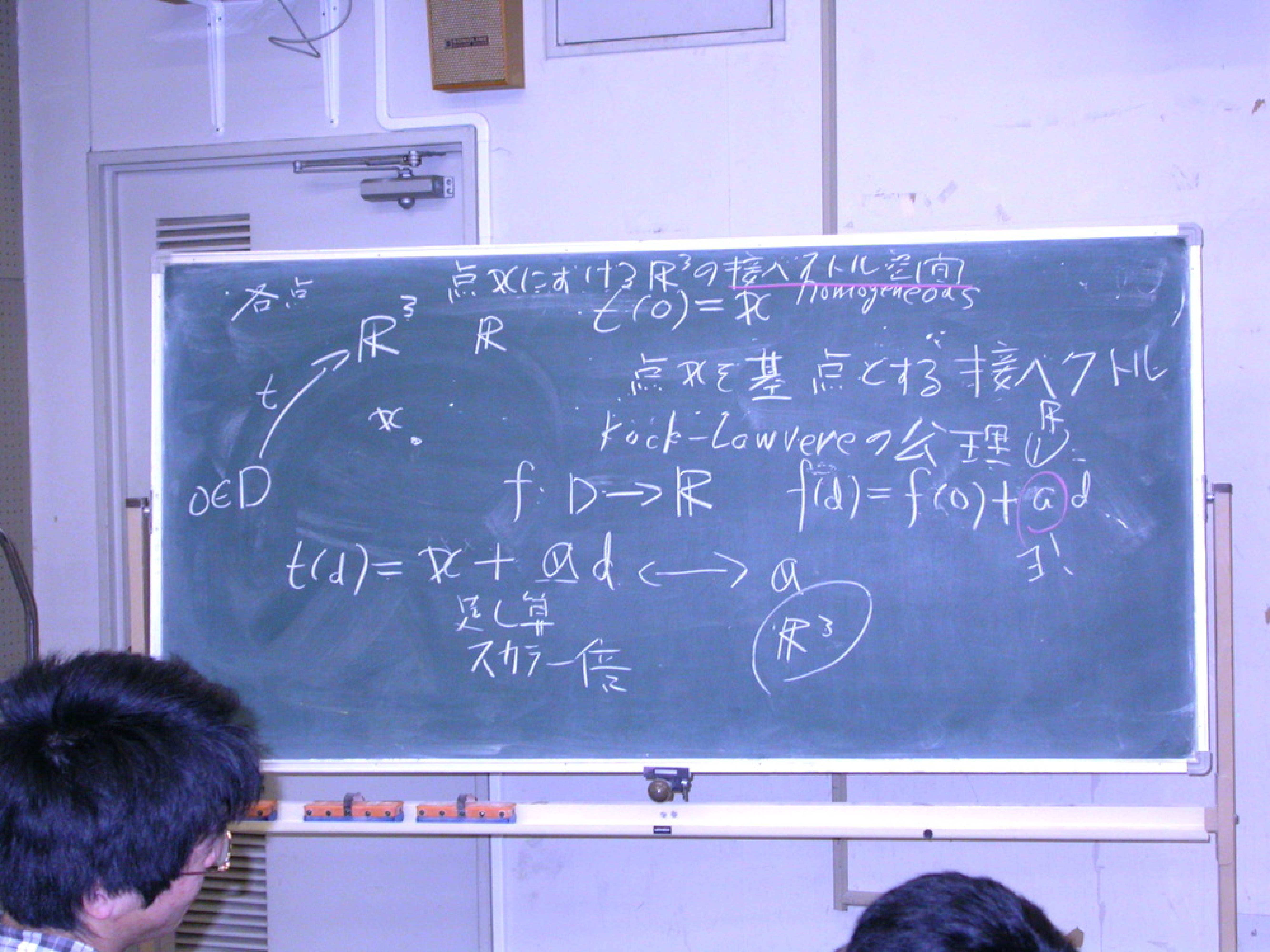
$$= \int_a^b \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \cdot \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) dt$$

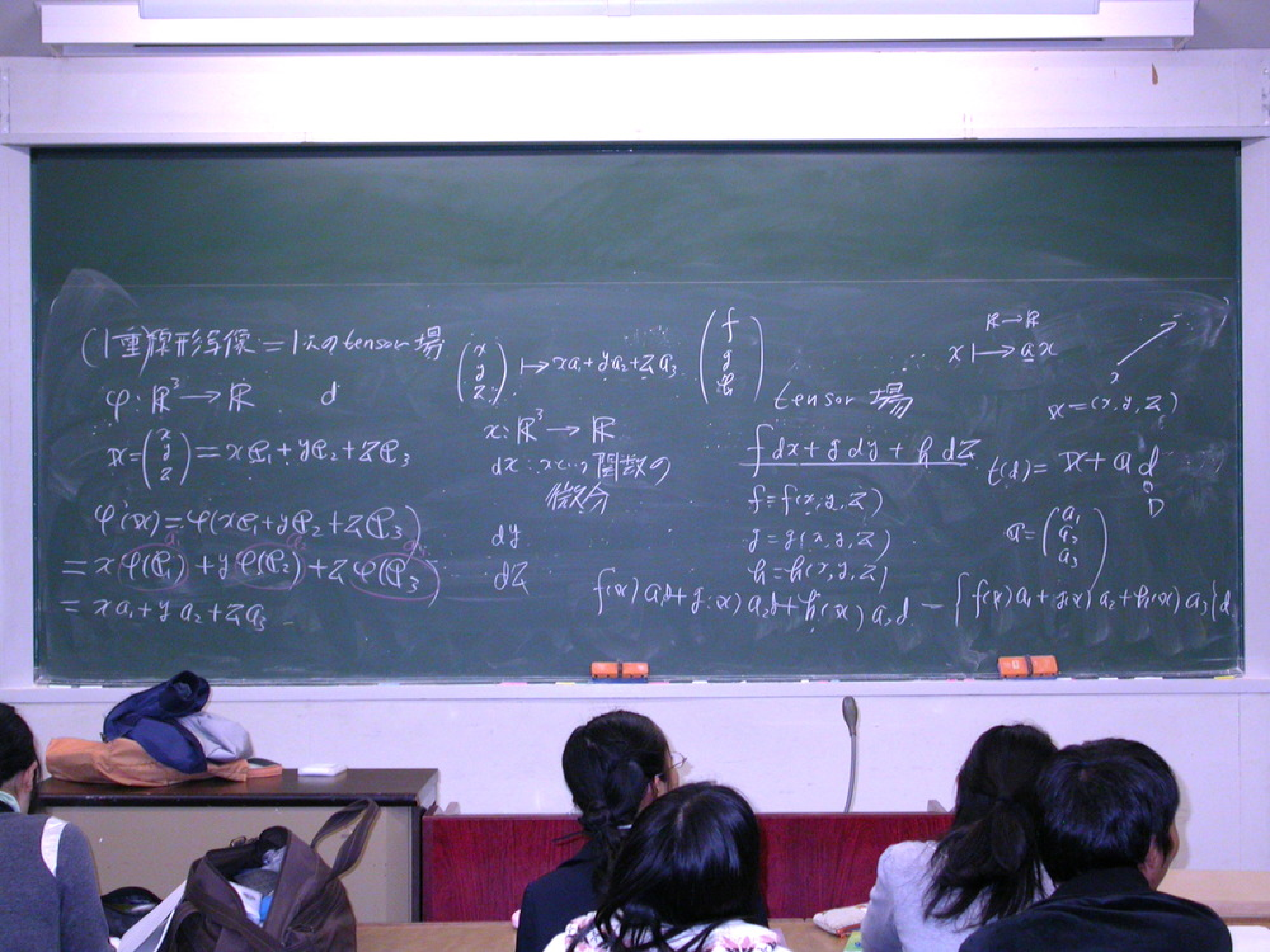
$$\mathrm{grad}\,\varphi = \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)$$

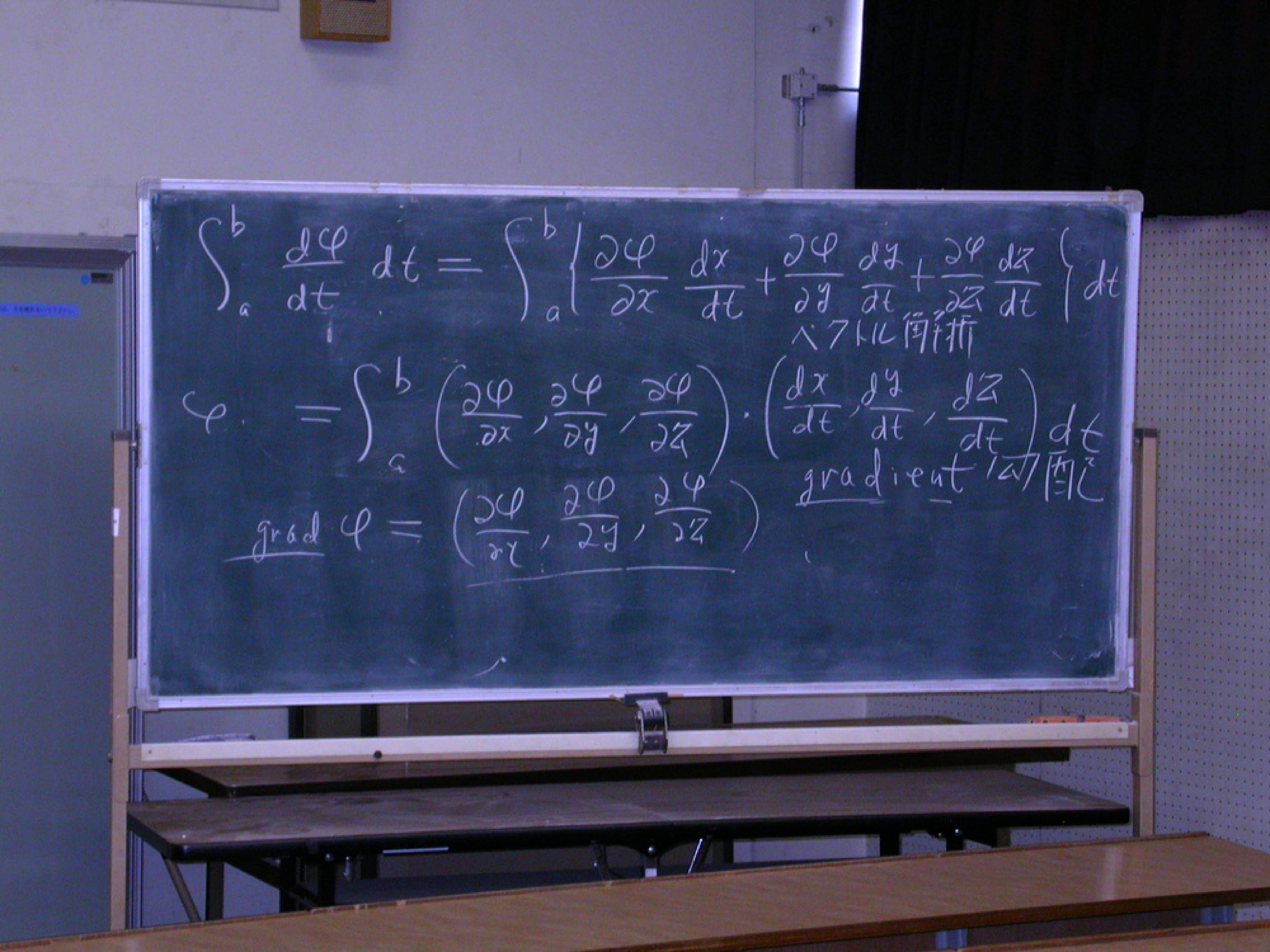

各点
点xにおけるR³の接ベクトル空間
t(0)=x
点xを基点とする接ベクトル
Kock-Lawvereの公理
0∈D
f: D→R
f(d)=f(0)+ad
∃!
t(d)=x+ad ⟷ a
足し算
スカラー倍



(1重)線形写像 = 1次のtensor場
$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$
$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3)$
$= x\varphi(\mathbf{e}_1) + y\varphi(\mathbf{e}_2) + z\varphi(\mathbf{e}_3)$
$= xa_1 + ya_2 + za_3$
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto xa_1 + ya_2 + za_3$
$x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$dx$ : $x$という関数の微分
$dy$
$dz$
$\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$
tensor場
$f\,dx + g\,dy + h\,dz$
$f = f(x, y, z)$
$g = g(x, y, z)$
$h = h(x, y, z)$
$f(\mathbf{x})a_1 d + g(\mathbf{x})a_2 d + h(\mathbf{x})a_3 d = \{f(\mathbf{x})a_1 + g(\mathbf{x})a_2 + h(\mathbf{x})a_3\}d$
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto ax$
$\mathbf{x} = (x, y, z)$
$\ell(d) = \mathbf{x} + \mathbf{a}d$
$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$


点xにおけるR³の接ベクトル空間
homogeneous
各点
t(0)=x
R³
R
t
x
点xを基点とする接ベクトル
Kock-Lawvereの公理
0∈D
f: D→R
f(d)=f(0)+ad
∃!
t(d)=x+ad ⟷ a
R³
足し算
スカラー倍


(1重)線形写像 = 1次のtensor場
φ: R³ → R
d
x = (x, y, z) = x e1 + y e2 + z e3
φ(x) = φ(x e1 + y e2 + z e3)
= x φ(e1) + y φ(e2) + z φ(e3)
= x a1 + y a2 + z a3
(x, y, z) ↦ x a1 + y a2 + z a3
x: R³ → R
dx : x という関数の微分
dy
dz
(f, g, h)
tensor場
f dx + g dy + h dz
f = f(x, y, z)
g = g(x, y, z)
h = h(x, y, z)
f(x) a1 d + g(x) a2 d + h(x) a3 d = {f(x) a1 + g(x) a2 + h(x) a3} d
R → R
x ↦ a x
x = (x, y, z)
t(d) = x + a d
a = (a1, a2, a3)



$\int_a^b \frac{d\varphi}{dt}\,dt = \int_a^b \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt} \right\} dt$
ベクトル解析
$\varphi \quad = \int_a^b \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) dt$
gradient 勾配
$\mathrm{grad}\,\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$

# 19回目

西村先生・みなさま:

今日(11/06)の3限､｢基礎数学｣(西村先生)の2学期9回め(通算19回め)を
聴講しました。教室は2B412です。

出席者は､64名(前回は65名;昨年同期は32名)＋教員1名(私)です。いつもの

TAの桑田君は卒研要旨提出に追われていたので、欠席させました。

内容は,
- 積分(微積分学の基本定理)
- ベクトル解析: 接ベクトル, 接ベクトル空間, 1次のテンソル場

などでした。

--
奈佐原　顕郎　(旧姓西田)
筑波大学農林工学系

奈佐原先生の説明に少し補足させていただきます。昨年度との大きな違いは、今年度
はTensorを強く前面に出してきています。
昨年度も話さなかったわけではありませんが、多変数の函数のn階の微分係数は実
はn次の(対称)Tensorであることを、奈佐原先生の強力なSupportもあり、多くの
受講生が理解しています。昨年度は、ここでしくじり、大きく受講者を減少させました
が、今年度はそういう現象が全くみられません。特に、6日の講義では話しませんで
したが、勾配(Gradient)は1階の微分係数に他ならないことを次回の講義でちゃん
と説明します。よくベクトル解析でされている、3方向の偏微分を合わせてベクトル
にするという話ですと、なんとも不恰好で、まずこれが座標変換にたいして独立な意
味を持っていることを確認する必要があります。難しくはありませんが、面倒くさい
話で、最初から座標に依存しない定義を与えておけば、簡明です。ベクトル解析とい
うのは、稀代の詐欺師で、すべての物理量はScalarかVectorであるというトンデモ
ナイDogmaを信奉しており、物理量として自然に現れるTensorを覆い隠す形になっ
ています。6日の講義でも話しましたが、変位Vectorは確かにVectorですが、力は
Vectorではなく、1次のTensorであることは、次回の講義で微塵の曇りもない形で、
話すつもりです。ベクトル解析ではTensorがないので、力のような1次のTensorと、
束密度Vectorのような2次の(反対称)Tensorが、単に記述に3成分必要という単純
な理由で、どちらもVectorと呼ばれています。後者にたいしてDivを適用することは、
なんら問題ありませんが、前者にたいしてDivを適用するのは、馬鹿げた話です。それ
と講義をしていて気がついたのですが、こういうTensorの話と冪零無限小をもちいた
微積分は意外と相性がいいと思います。残すところは11回となりましたが、今後も
生物資源の諸先生方のご指導を賜れば、幸いです。

西村泰一
筑波大学数学系