基礎数学(第8)

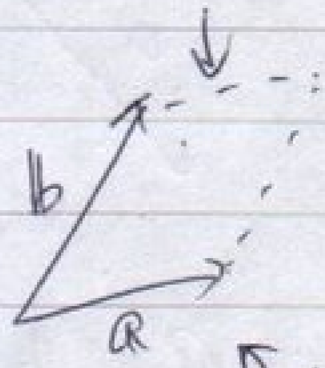
10/27/08

ベクトル積 — 結果はベクトル

外積　2×2 行列式　$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = |\mathbf{a}\ \mathbf{b}| = a_1 b_2 - a_2 b_1$

$-$　$+$ の積　平行四辺形　付号の付いた面積 — 幾何学的

幾何学的定義　　解析的な定義



$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$　$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

↺ $+$

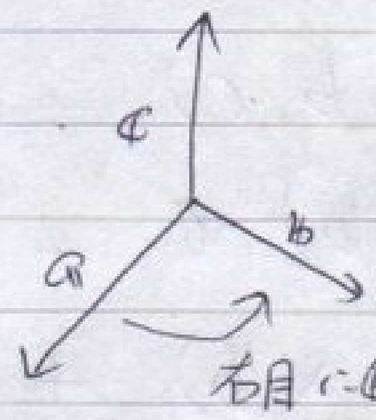
↻ $-$

空間のベクトル

$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ — 3次元のベクトルで はられる平行六面体

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$-$



右ねじに進む側に c … $+$

$-$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ … 平面を作る　— という空間のベクトル

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を決める。右手形になるようにする。

- 大きさ — は平行四辺形の面積
- 向き が必要 — $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 垂直にたてる。

内積　スカラー積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ — スカラーになる　　$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ — ベクトル

ベクトル

- 幾何学的定義

$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{a}$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \implies \mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$　零ベクトル — ぺちゃんこ

$(\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

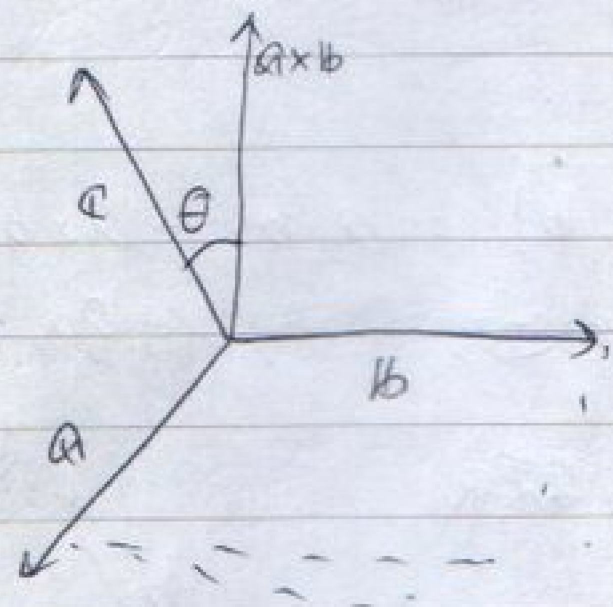
$\mathbf{a} \times (\beta \mathbf{b}) = \beta(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \times \mathbf{b} \overset{?}{=} \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}$

ベクトル と cベクトル の 内積をとる

$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$

平行四辺形の面積



$$V(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{b},\mathbf{c})=V(\mathbf{a}_1,\mathbf{b},\mathbf{c})+V(\mathbf{a}_2,\mathbf{b},\mathbf{c})$$

$$\{(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\times\mathbf{b}\}\mathbf{c}=V(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{b},\mathbf{c})$$

平行六面体ではられる体積

$$=V(\mathbf{a}_1,\mathbf{b},\mathbf{c})+V(\mathbf{a}_2,\mathbf{b},\mathbf{c})$$
$$=(\mathbf{a}_1\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}+(\mathbf{a}_2\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$$
$$=\{(\mathbf{a}_1\times\mathbf{b})+(\mathbf{a}_2\times\mathbf{b})\}\cdot\mathbf{c}$$

任意のベクトル

$$\mathbf{x}\overset{?}{=}\mathbf{y}$$
$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{y}\cdot\mathbf{c}\quad(\forall\mathbf{c})$$
$$(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\mathbf{c}=0$$
$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2=0$$
$$\mathbf{x}=\mathbf{y}$$

ベクトルの長さ

$$\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\mathbf{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\qquad\text{標準基底}$$
$$\mathbf{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

直こうしている

$$\left[\begin{array}{l}\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_3=-\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_1=-\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_2=-\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3\end{array}\right.$$

$$\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_i=0$$
$$i=1,2,3$$

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$\shortparallel$ $\shortparallel$

$a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \times b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3$

やったね

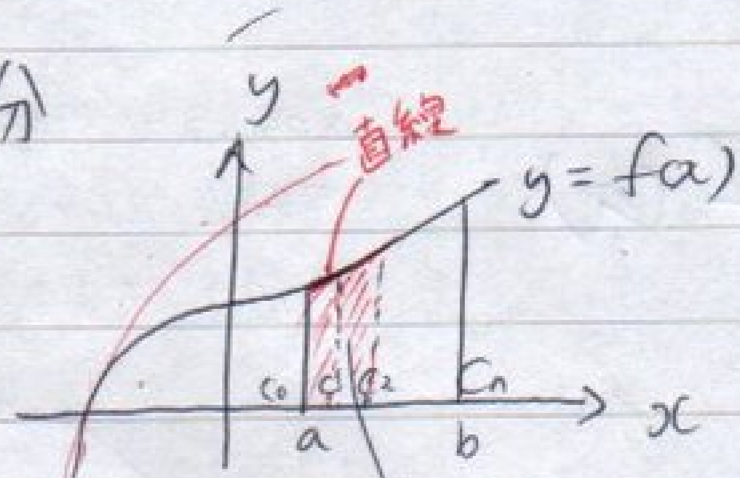
1億円!

◎ レポートⅠ

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を求めよ

お茶♡

積分



$f(c_0 + d_1) = f(c_0) + f'(c_0) d_1$

$\int_a^b f(x)\,dx$ — 定積分

↓

[a, b] の区間を細かく分ける。

C_a C_n
$\shortparallel$ $\shortparallel$
a b

細かくという意味は…

$d_1 = c_1 - c_0 \in D$

$d_2 = c_2 - c_1 \in D$

$\vdots$

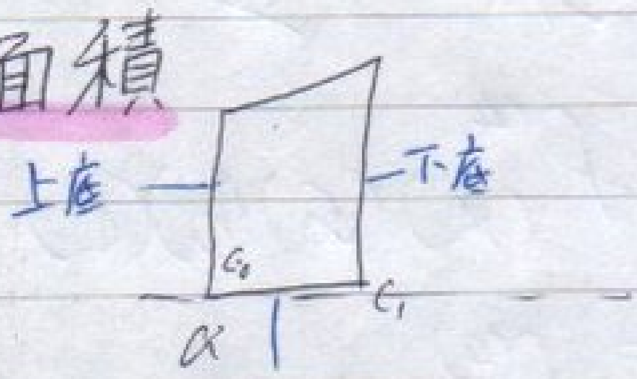
$d_n = c_n - c_{n-1} \in D$

どのくらい細かくかというと、
隣り合う点の差が D に入る
(2回かけたら 0 になる数)

[Kock-Lawvere の公理
あるいは 西村の慣性の法則]

$f(c_0 + d_1) = f(c_0) + f'(c_0) d_1$

台形の面積



積分の定義

$$\sum_{i=1}^{n} d_i f(c_{i-1})$$

$$\left[\underbrace{d_1}_{高さ} \times \frac{1}{2}\Big(\underbrace{f(c_0)}_{上底} + \underbrace{f(c_0) + f'(c_0) d_1}_{下底} \Big) \right]$$

$= d_1 f(c_0)$

すごく大事!

微積分学の基礎定理

1次元

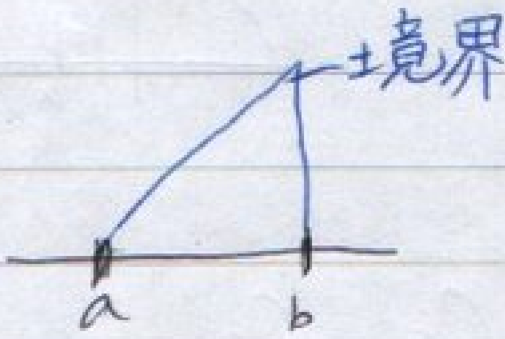
2次元　Stokesの定理

3次元　Gaussの発散定理

f　　f'

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

aからbまで微分したものを定積分すると、aとbの値で決まる。



定積分の定義

$$\int_a^b f'(x)\,dx$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i f(c_{i-1})$$

$$f(c_i) - f(c_{i-1})$$

$$\int_a^b f'(x)\,dx$$

$$f(c_1) - f(c_0)$$

$$f(c_2) - f(c_1)$$

$$f(c_3) - f(c_2)$$

$$\vdots$$

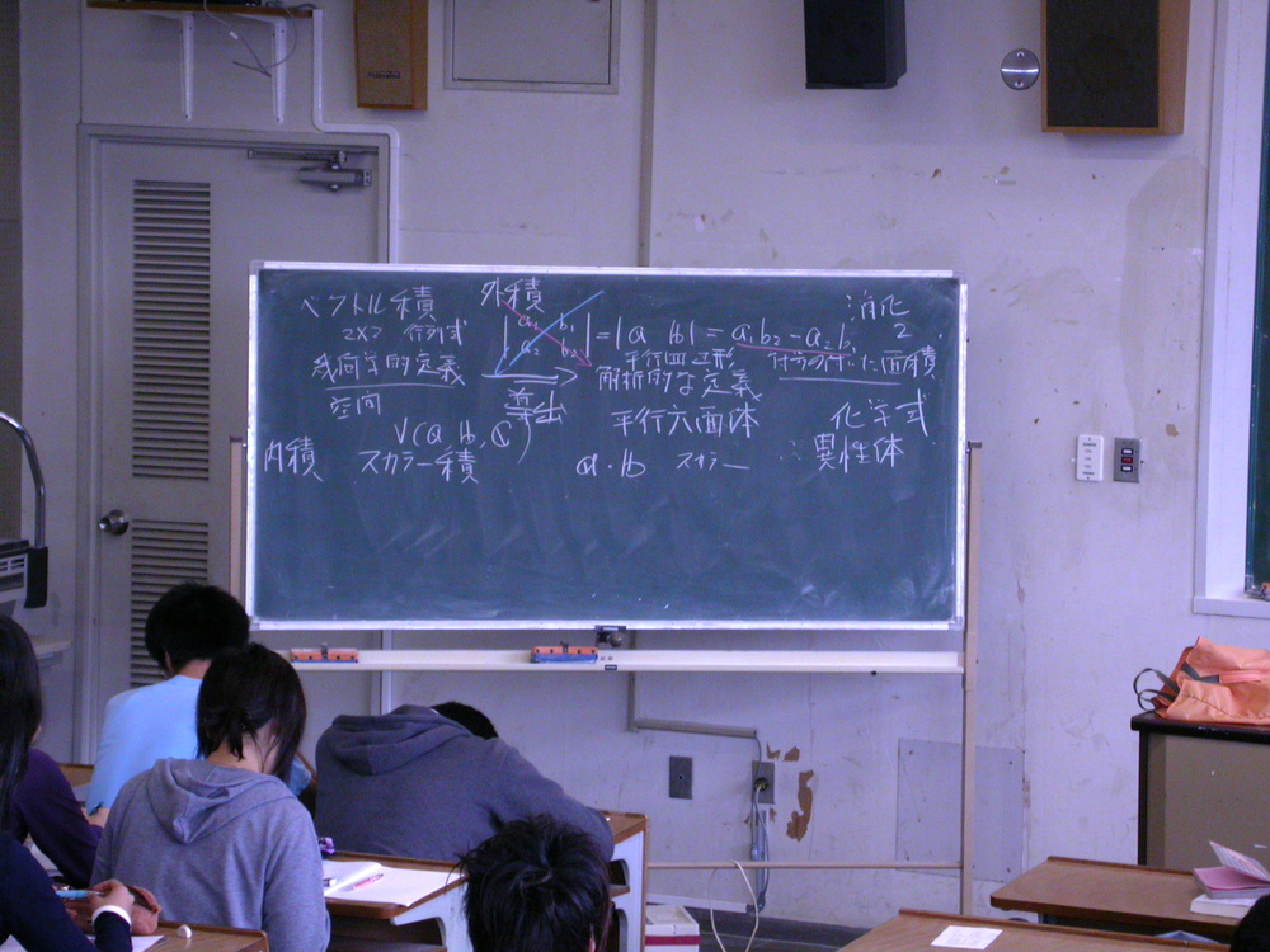
$$f(c_n) - f(c_{n-1})$$

レポートIV

$$f^{(4)}_{(x)}(a)(b)(c)(d)$$

$$= f^{(4)}_{(x)}(d)(c)(b)(a)$$

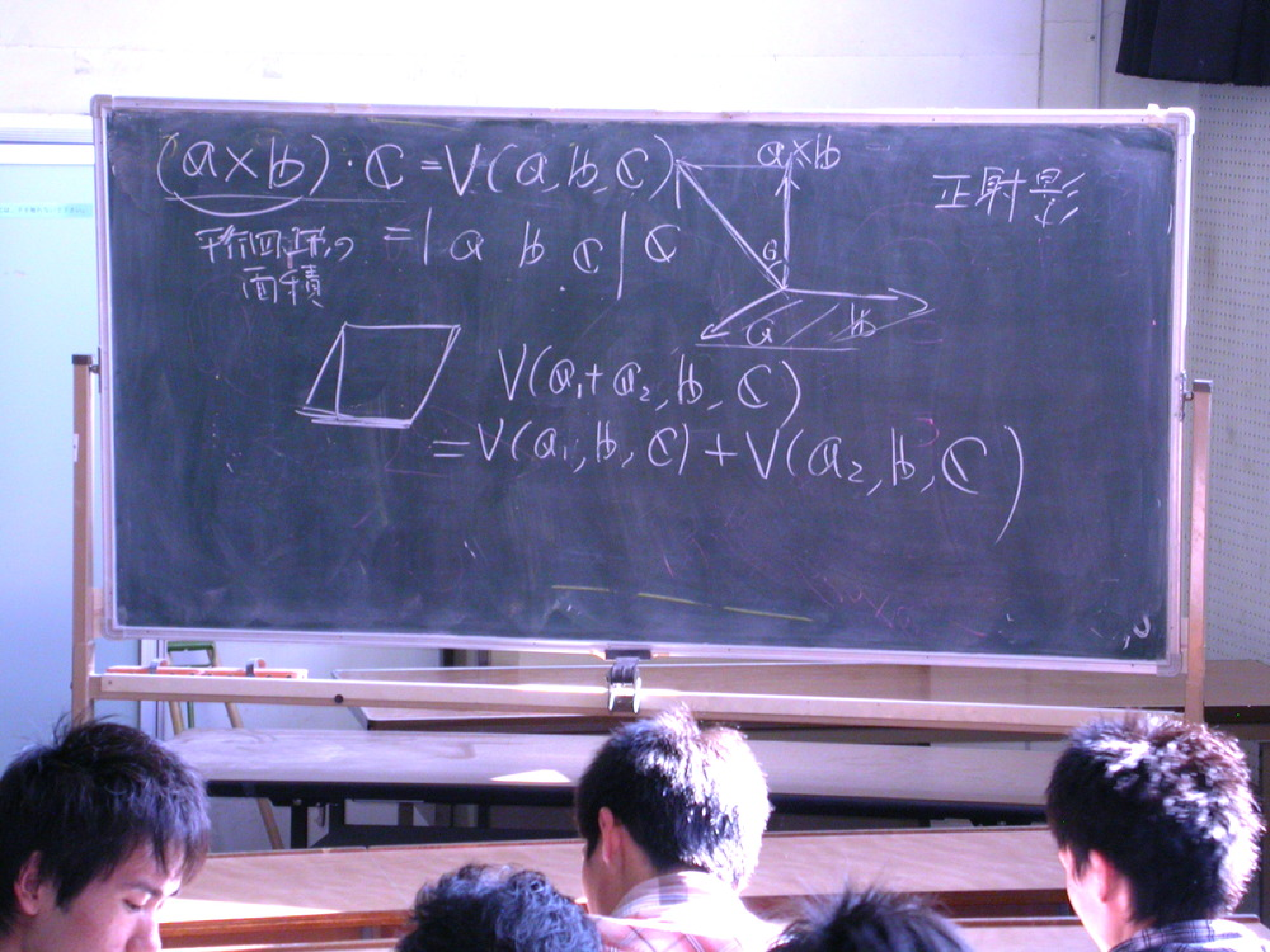
等しいということを示す。



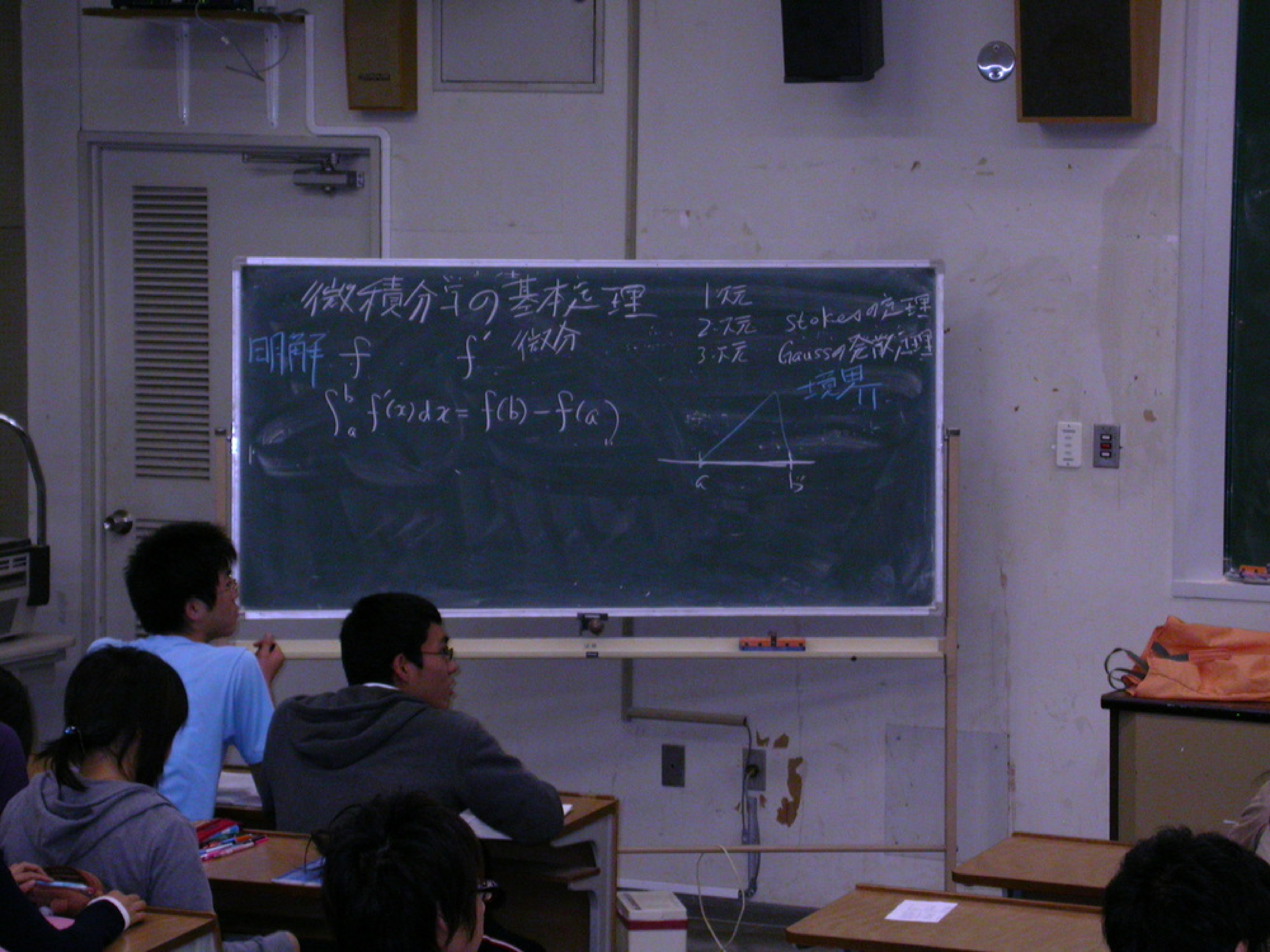
ベクトル積
2×2 行列式
幾何学的定義
空間
V(a, b, c)
内積 スカラー積
外積
=|a b|=a1b2−a2b1
平行四辺形
符号の付いた面積
解析的な定義
導出
平行六面体
a・b スカラー
消化
化学式
異性体

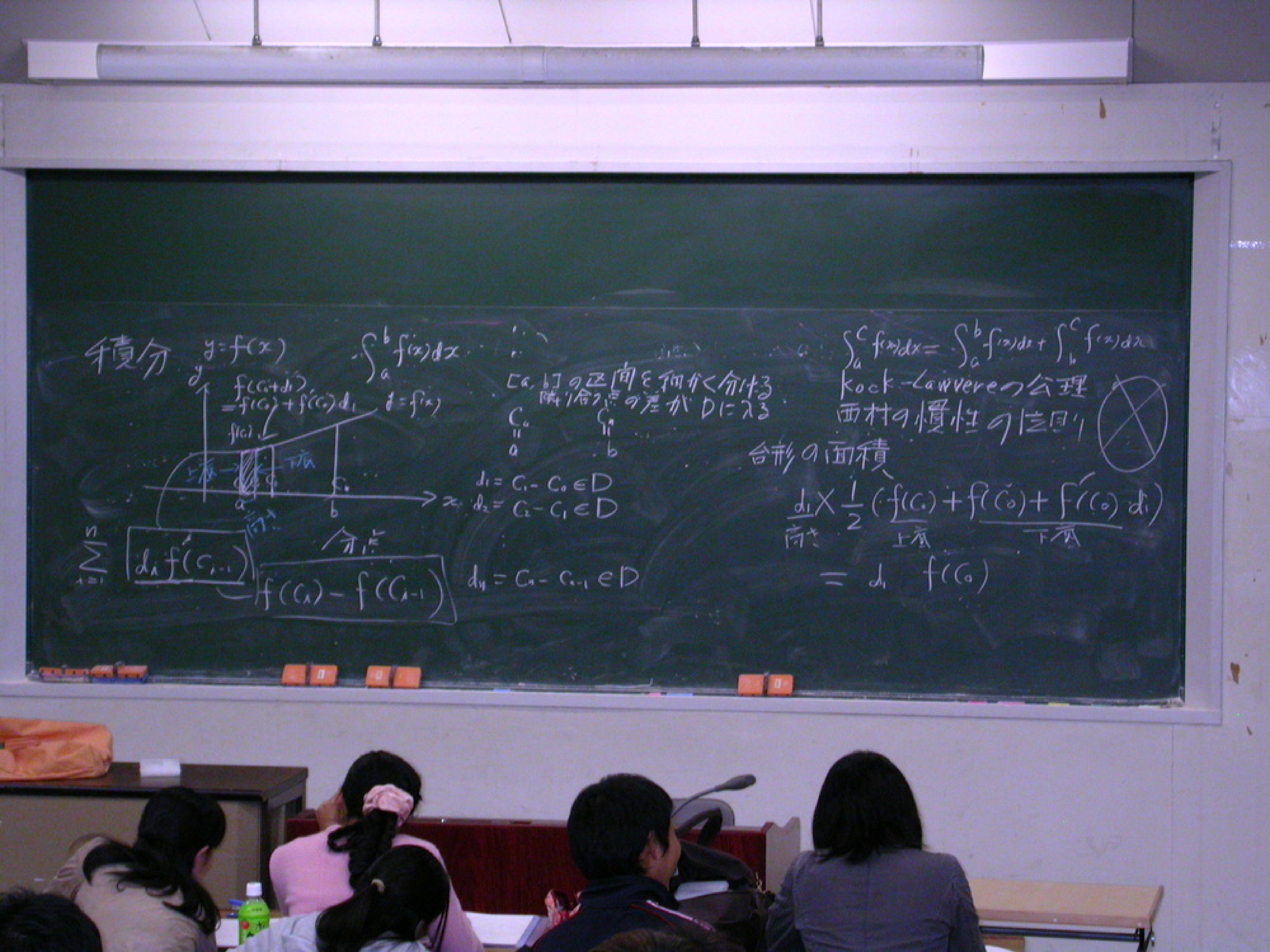
$a, b, a \times b$ ベクトル
大きさ 幾何学的定義
向き
$a \times a = -a \times a$
$a \times b = -b \times a \Longrightarrow a \times a = 0$
零ベクトル
$(\alpha a) \times b = \alpha (a \times b)$
$a \times (\beta b) = \beta (a \times b)$
$(a_1 + a_2) \times b \overset{?}{=} a_1 \times b + a_2 \times b$
$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$
c
a
b

$a, b, \quad a \times b$ ベクトル
大きさ 幾何学的定義
向き
$a \times a = -a \times a$
$a \times b = -b \times a \implies a \times a = 0$
I
$(\alpha a) \times b = \alpha(a \times b)$
$a \times (\beta b) = \beta(a \times b)$
$(a_1 + a_2) \times b = a_1 \times b + a_2 \times b$
2重線形性
$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$
$a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \quad b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$
零ベクトル
$a_1 e_1 \times b_2 e_2 = a_1 b_2 \underbrace{e_1 \times e_2}_{e_3}$
$\{(a_1 + a_2) \times b\} \cdot c = V(a_1 + a_2, b, c)$
$= V(a_1, b, c) + V(a_2, b, c)$
$= (a_1 \times b) \cdot c + (a_2 \times b) \cdot c$
cと内積 $= \{(a_1 \times b) + (a_2 \times b)\} \cdot c$
$e_1 \times e_2 = e_3 = -e_2 \times e_1$
$e_2 \times e_3 = e_1 = -e_3 \times e_2$
$e_3 \times e_1 = e_2 = -e_1 \times e_3$
$i = 1, 2, 3$
$e_i \times e_i = 0$
$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$c = x - y$
$x \overset{?}{=} y$
$x \cdot c = y \cdot c \; (\forall c)$
$(x - y) \cdot c = 0$
$\|x - y\|^2 = 0$
$x = y$

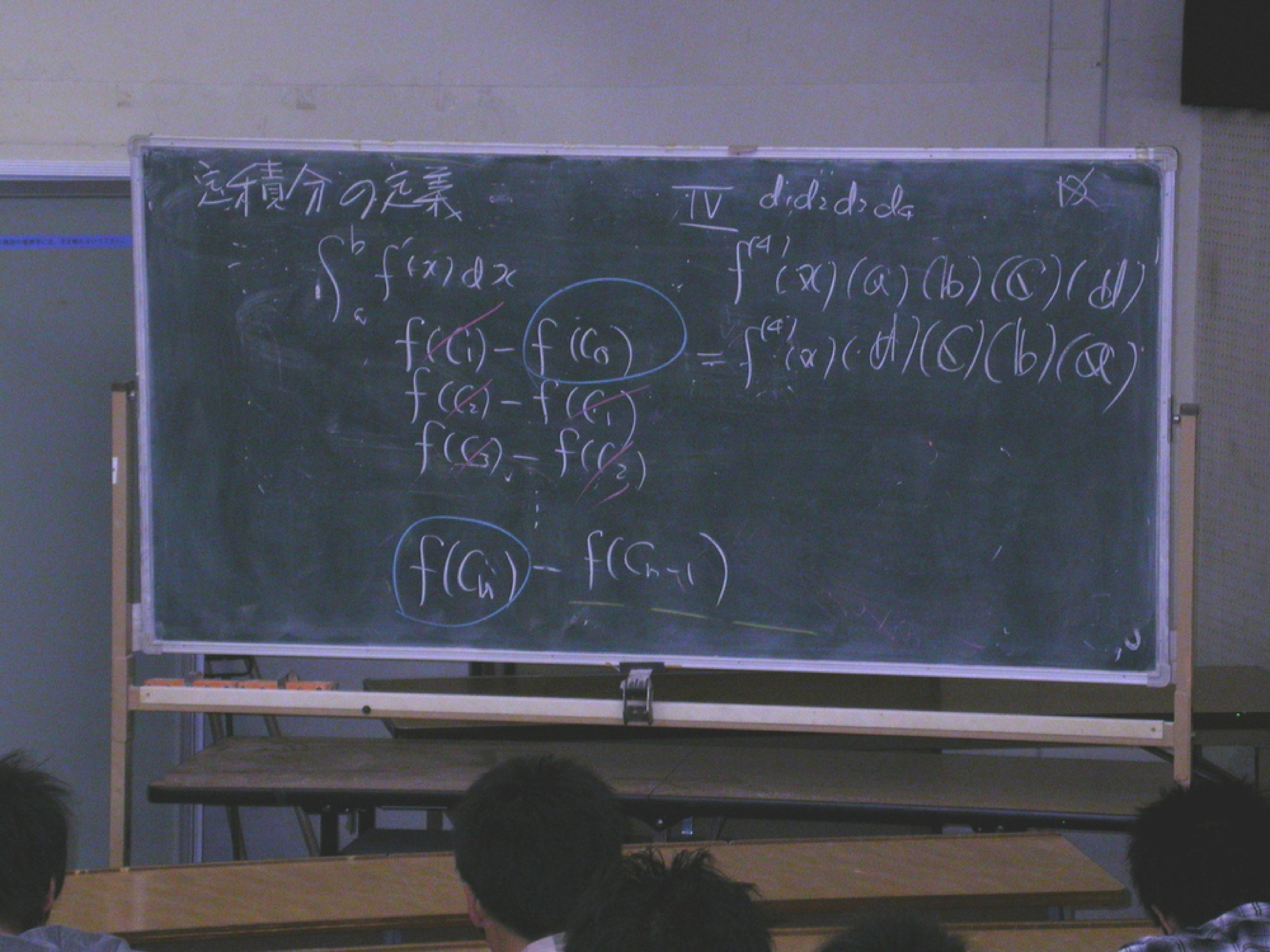


(a×b)·c = V(a, b, c)
a×b
正射影
平行四辺形の
面積
= |a b c| c
θ
a
b
V(a1+a2, b, c)
= V(a1, b, c) + V(a2, b, c)


微積分学の基本定理
明解 f
f' 微分
∫_a^b f'(x)dx = f(b) − f(a)
1次元
2次元 Stokesの定理
3次元 Gaussの発散定理
境界
a
b



積分
$y=f(x)$
$\int_a^b f(x)dx$
$f(c_0+d_1)$
$=f(c_0)+f'(c_0)d_1$
$y=f(x)$
$f(c_0)$
上底
下底
向き
分点
$\sum_{\lambda=1}^{n} d_\lambda f'(c_{\lambda-1})$
$f(c_\lambda)-f(c_{\lambda-1})$
[a, b]の区間を細かく分ける
隣り合う点の差がDに入る
$c_0 = a$
$c_n = b$
$d_1 = c_1 - c_0 \in D$
$d_2 = c_2 - c_1 \in D$
$d_n = c_n - c_{n-1} \in D$
$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
Kock-Lawvereの公理
台形の面積
$d_1 \times \frac{1}{2}(f(c_0) + f(c_0) + f'(c_0)d_1)$
向き
上底
下底
$= d_1 f(c_0)$


定積分の定義
$\int_a^b f'(x)\,dx$
$f(c_1) - f(c_0)$
$f(c_2) - f(c_1)$
$f(c_3) - f(c_2)$
$\vdots$
$f(c_n) - f(c_{n-1})$
IV $d_1 d_2 d_3 d_4$
$f^{(4)}(x)(a)(b)(c)(d)$
$= f^{(4)}(x)(d)(c)(b)(a)$

18回目

西村先生・みなさま:

昨日（10/27）の3限、「基礎数学」（西村先生）の2学期8回め（通算18回め）を
聴講しました。教室は2B412です。

出席者は、65名（前回は65名；昨年同期は25名）＋教員1名（私）+TA1名(桑田)です。
出席者は完全に下げどまりました。昨年度の2.6倍!です。

内容は,

- 行列式（2次, 3次）とベクトル積の復習
- 積分の定義

などでした。次回からいよいよベクトル解析です。

--
奈佐原　顕郎　（旧姓西田）
筑波大学農林工学系