基礎数学（第7回）

2008/10/20

$f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$= \{ x' \in \mathbb{R} \longmapsto (\cos x)\, x' \in \mathbb{R} \}$

比例定数

線形写像（比例関数）を本当は表している。

$f''(x) = -\sin x$

$= \{ (x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longmapsto \underline{(-\sin x)}\, x' y' \in \mathbb{R} \}$

二重線形写像

レポートI

a) $f(x, y) = \sin xy$

b) $f(x, y) = \cos xy$

c) $f(x, y) = e^{xy}$

d) $f(x, y) = \log xy \quad (x > 0,\ y > 0)$

$f'(x, y)$　x方向とy方向の微分

$f''(x, y)$　を求める。

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$　線形

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$　2重線形

conceptual

偏微分 — 数

とは何は。

$\tilde{\varphi}$　同一視　$\longleftarrow$　φ　が一つ決まる。

$L(V; L(V, W))$ 　　　$L(V, V; W)$

ψ　VからL(V; W)への線形写像の全体

$V \times V \to W$ の2重線形写像の全体

$x, y \in V$

$\tilde{\varphi} : x \in V \longmapsto \varphi(x, \cdot)$

$\cap$

$L(V; W)$

$\varphi : V \times V \to W$　2重 linear

$\psi : V \to L(V, W)$ の線形写像

$\hat{\psi}(x, y) = \psi(x)(y) \in W$

いった先が関数

$\hat{\psi}(x_1 + x_2, y) = \psi(x_1 + x_2)(y)$

$= \{ \psi(x_1) + \psi(x_2) \}(y)$

$= \psi(x_1)(y) + \psi(x_2)(y) = \hat{\psi}(x_1, y) + \hat{\psi}(x_2, y)$

$$\hat{\varphi}(x, y_1 + y_2) = \varphi(x)(y_1 + y_2)$$

$\in L(V;W)$

$$= \varphi(x)(y_1) + \varphi(x)(y_2)$$

$$= \hat{\varphi}(x, y_1) + \hat{\varphi}(x, y_2)$$

レポートⅡ

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\hat{\varphi}} \arrow[r, phantom, ""] & \varphi \arrow[l] \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
& \hat{\varphi} \arrow[from=1-1, bend right, "\text{もう一度戻す}"']
\end{tikzcd}$$

同一視 というのは、
これが同じものになるということを
かくにんする。

$$\begin{tikzcd}
\varphi \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & \hat{\varphi} \arrow[dl, bend left] \\
\hat{\hat{\varphi}} &
\end{tikzcd}$$

これを確認すること

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f'(x, y)$

あるいは

$f'(x)$　　線形写像

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　　$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f'(x)(e_1) = a_1$

$f'(x)(e_2) = a_2$　とおくと、

$f''(x)\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = a_1 x_1 + a_2 x_2$

$a_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x)$

x方向の偏微分

$a_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x)$

y方向の偏微分

$f'(x)\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = a_1 x_1 + a_2 x_2$

$= \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x} \ \frac{\partial f}{\partial y}\right]}_{(1\times 2)} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{(2\times 1)}$

$f''(x)$

$f: V \to W$ (一般では linear ではない)

$f'(x) \in L(V;W)$

$f': V \to L(V;W)$ (linear ではない)

$f''(x) \in L(V; L(V;W))$

$= L(V, V; W)$

$a \in V$

$b \in V$

$f''(x)(a)(b)$

$f'(x)(a)$

$(\forall d \in D)$

$df'(x)(a) = f(x + da) - f(x)$

$df''(x)(a) = f'(x + da) - f'(x)$ ← この式の両辺に (b) を右側からもってくる.

すると,

$\underline{df''(x)(a)(b)} = \underbrace{f'(x + da)(b)}_{\in W} - \underbrace{f'(x)(b)}_{\in W}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e_1$

a方向の微分は
これで与えられる

$V \longrightarrow W$

$x \longmapsto f'(x)(b)$

$f''(x)(e_1) = \quad = \frac{\partial f}{\partial x}(x)$

$f'(x)(e_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x)$

$f''(x)(e_i)(e_j)$

$i, j = 1, 2$

$f''(x)(e_1)(e_2)$ の場合

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ＝階の偏微分

4つ

Kock-Lawvereの公理

$f : D \to \mathbb{R}$

$(\exists! a \in \mathbb{R})(\forall d \in D)$

$f(d) = f(0) + d\underset{\mathbb{R}}{\underset{\Uparrow}{a}}$ ── ただ1つのaが定まる

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}$

$d \in D \longmapsto f(x+d) \in \mathbb{R}$

$f'(x)$

命題

$f : V \longrightarrow W \qquad x, a, b \in V$

$f''(x)(a)(b) = f''(x)(b)(a)$

$f''(x)$は2重

それがsymmetric

それの証明:

$V = \mathbb{R}^2$

$a = e_1$

$b = e_2$

$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

この二つがかかった形で証明する

両辺に$d_1 d_2$をかける $(\forall d \in D)$

$da = db \Leftrightarrow a = b$

証明： $d_1, d_2 \in D$

$$d_1 d_2 f''(x)(a)(b) = d_1 d_2 f''(x)(b)(a)$$

とひっつける.

が等しい (Kock-Lawvereの公理より)

左辺 $= d_2 \{f'(x + a d_1) - f'(x)\}(b)$

$= d_2 f'(x + a d_1)(b) - d_2 f'(x)(b)$

での微分

$= \{f(x + a d_1 + b d_2) - f(x + a d_1)\} - \{f(x + b d_2) - f(x)\}$

$= f(x + a d_1 + b d_2) - f(x + a d_1) - f(x + b d_2) + f(x)$

右辺 $= d_1 \{f'(x + d_2 b) - f'(x)\}(a)$

$= d_1 f(x + d_2 b)(a) - d_1 f'(x)(a)$

$= \{f(x + d_2 b + d_1 a) - f(x + d_2 b)\} - \{f(x + da) - f(x)\}$

$\Rightarrow f''(x)(a, b) = f''(x)(b, a)$

レポート III

$f : V \longrightarrow W$ (~~linear~~)

$x \in V$

a

b

c

$f'''(a)(b)(c)$

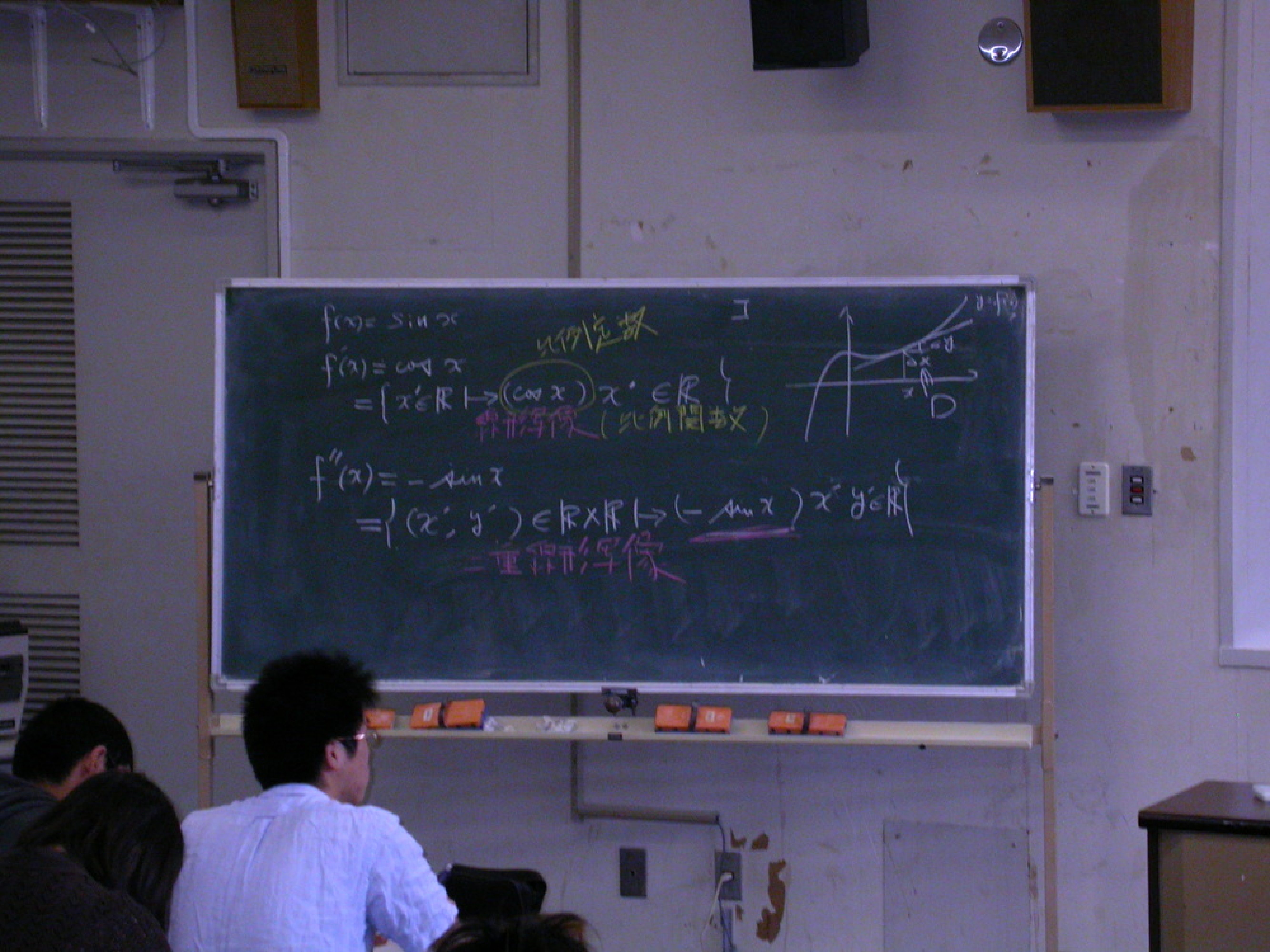
$$d_1 d_2 d_3 f'''(x)(a)(b)(c) = d_1 d_2 d_3 f'''(x)(c)(b)(a)$$

と

が同じということの証明.

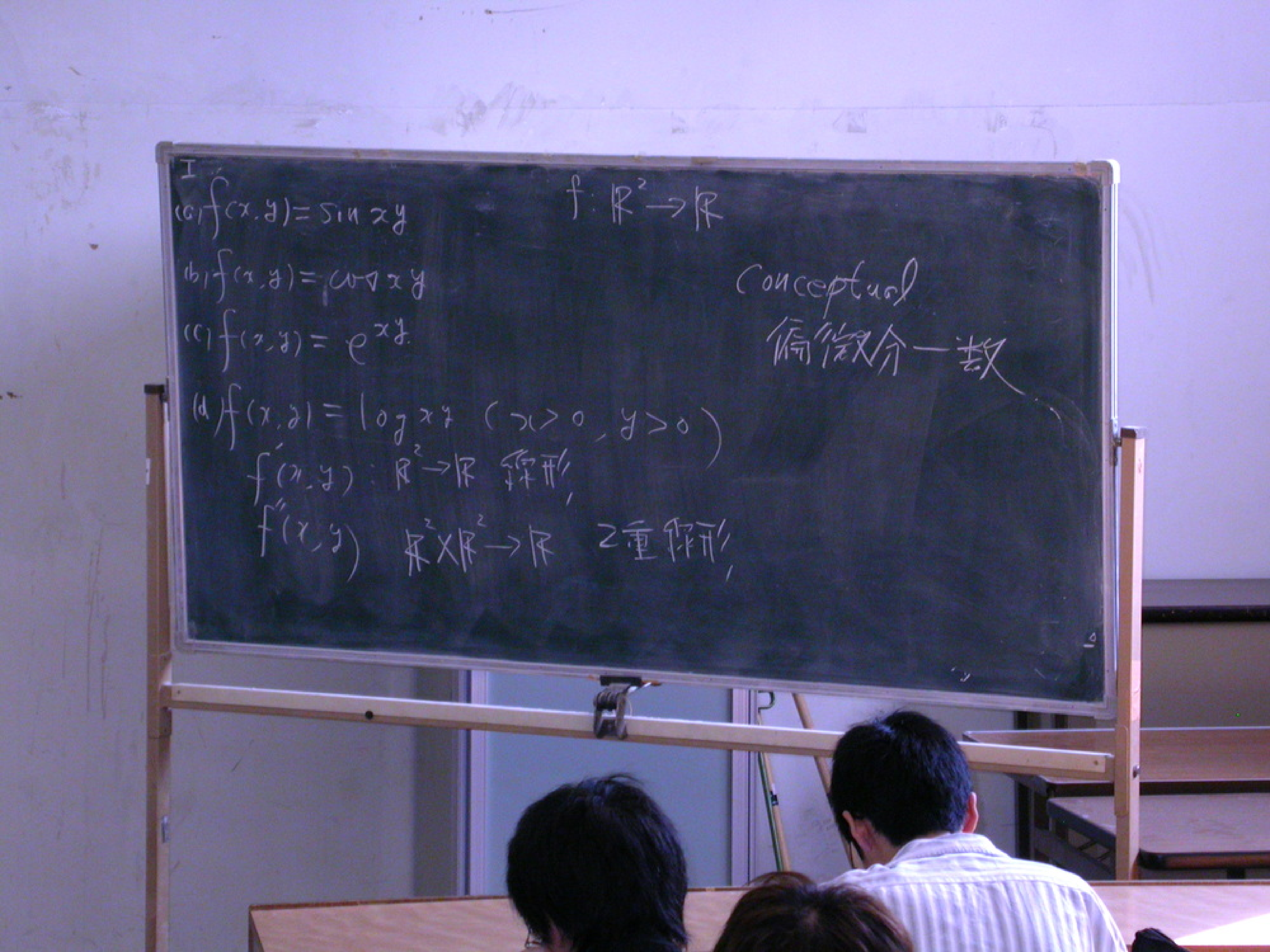
冪零無限小

レポート 10/30 due D705



f(x) = sin x
比例定数
f'(x) = cos x
= { x' ∈ ℝ ↦ (cos x) x' ∈ ℝ }
線形写像 (比例関数)
f''(x) = − sin x
= { (x', y') ∈ ℝ×ℝ ↦ (− sin x) x' y' ∈ ℝ }
二重線形写像
y = f(x)

$\tilde{\varphi}$: 同一視
$\mathcal{L}(V; \mathcal{L}(V, W))$
$\mathcal{L}(V, V; W)$
φ
ψ
Vから$\mathcal{L}(V, W)$への
線形写像の全体
$V \times V \to W$ の
2重linear写像の
全体
$x, y \in V$
$\varphi : V \times V \to W$ 2重linear
逆
$\tilde{\varphi}$ $x \in V \mapsto \varphi(x, \cdot)$
$\psi : V \to \mathcal{L}(V, W)$ の線形写像
$\mathcal{L}(V; W)$
$\hat{\psi}(x, y) = \psi(x)(y) \in W$
$\hat{\psi}(x_1 + x_2, y) = \psi(x_1 + x_2)(y)$
$= \{\psi(x_1) + \psi(x_2)\}(y)$
$= \psi(x_1)(y) + \psi(x_2)(y) = \hat{\psi}(x_1, y) + \hat{\psi}(x_2, y)$
$\mathcal{L}(V; W)$
$\hat{\psi}(x, y_1 + y_2) = \psi(x)(y_1 + y_2)$
$= \psi(x)(y_1) + \psi(x)(y_2)$
$= \hat{\psi}(x, y_1) + \hat{\psi}(x, y_2)$
II
$\tilde{\varphi} \leftarrow \varphi$
$\hat{\tilde{\varphi}}$
$\psi \to \hat{\psi}$
$\tilde{\hat{\psi}}$

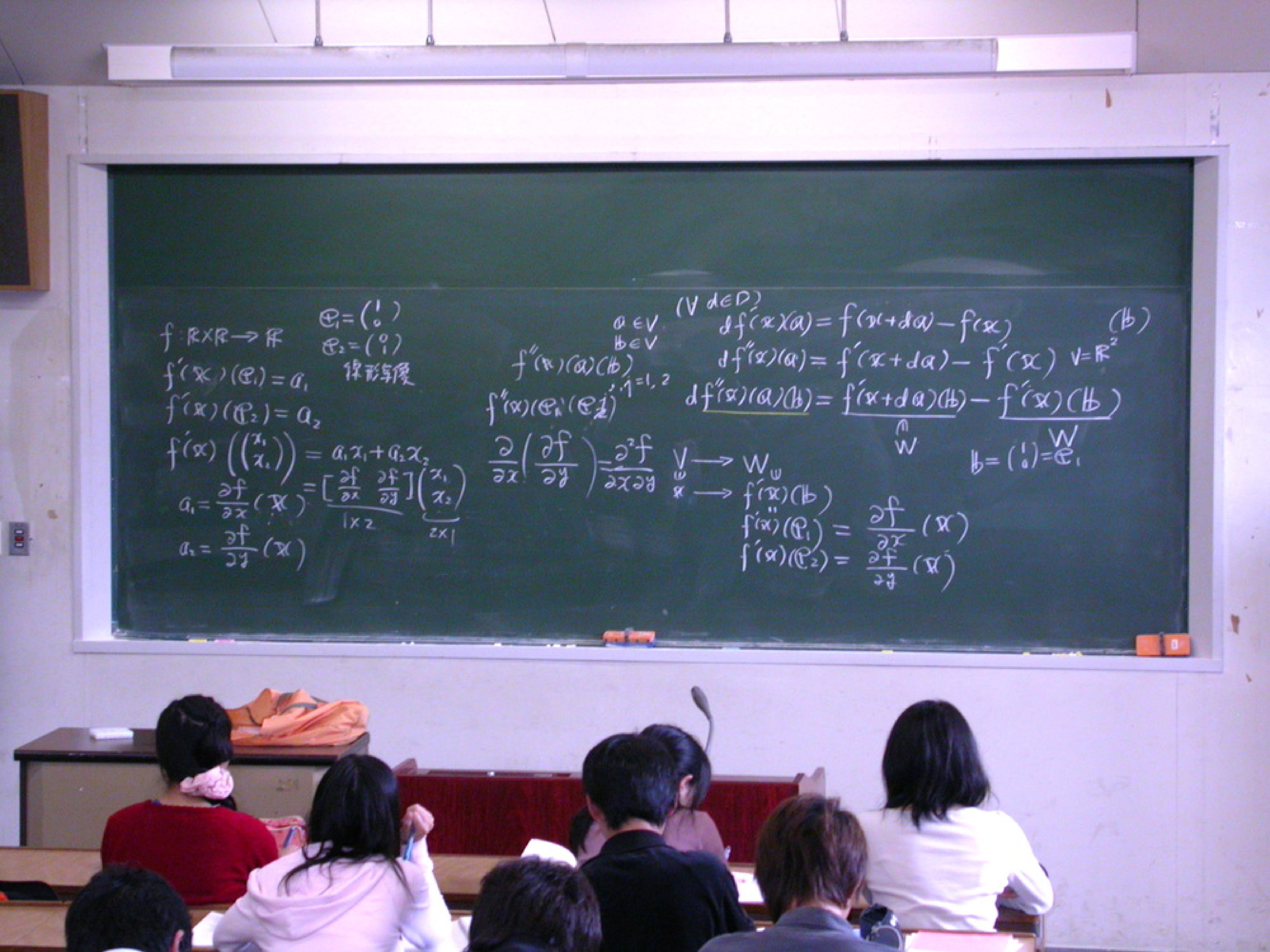

I
(a) $f(x,y) = \sin xy$
(b) $f(x,y) = \cos xy$
(c) $f(x,y) = e^{xy}$
(d) $f(x,y) = \log xy \quad (x>0,\ y>0)$
$f'(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 線形
$f''(x,y) \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 2重線形
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
Conceptual
偏微分一数

$x \in V \quad f : V \to W$ ~~linear~~

$f'(x) \in \mathcal{L}(V;W)$

$f' : V \to \mathcal{L}(V;W)$ ~~linear~~

$f''(x) \in \mathcal{L}(V;\mathcal{L}(V;W)) = \mathcal{L}(V,V;W)$


$f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$
$e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
線形写像
$f'(x)(e_1) = a_1$
$f'(x)(e_2) = a_2$
$f'(x)\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = a_1x_1 + a_2x_2$
$a_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x)$
$= \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\right]}_{1\times 2}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}}_{2\times 1}$
$a_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x)$
$a \in V$
$b \in V$
$f''(x)(a)(b)$
$f''(x)(e_i)(e_j)$ $i,j=1,2$
$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$
$(\forall d \in D)$
$df(x)(a) = f(x+da) - f(x)$
(b)
$df'(x)(a) = f'(x+da) - f'(x)$ $V=\mathbb{R}^2$
$df''(x)(a)(b) = f'(x+da)(b) - f'(x)(b)$
W
W
$b = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = e_1$
$V \longrightarrow W$
$x \longrightarrow f'(x)(b)$
$f'(x)(e_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)$
$f'(x)(e_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x)$

$$f : V \longrightarrow W$$

右辺 $= d_1\{f'(\mathbf{x} + d_2\mathbf{b}) - f'(\mathbf{x})\}(\mathbf{a})$

$= d_1 f'(\mathbf{x} + d_2\mathbf{b})(\mathbf{a}) - d_1 f'(\mathbf{x})(\mathbf{a})$

$= \{f(\mathbf{x} + d_2\mathbf{b} + d_1\mathbf{a}) - f(\mathbf{x} + d_2\mathbf{b})\}$

$- \{f(\mathbf{x} + d_1\mathbf{a}) - f(\mathbf{x})\}$

Kock-Lawvereの公理 $_{V=\mathbb{R}^2}$

命題 $f : V \to W$ $x, a, b \in V$ symmetric $d_1, d_2 \in D$ …… $(\forall d \in D)$

$da = db \Rightarrow a = b$

$f : D \to \mathbb{R}$

$(\exists ! a \in \mathbb{R})(\forall d \in D)$

$f(d) = f(0) + d\,a$

$a = e_1$

$b = e_2$

$$f''(x)(a)(b) = f''(x)(b)(a)$$

$$d_1 d_2 f''(x)(a)(b) = d_1 d_2 f''(x)(b)(a)$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$

$d \in D \mapsto f(x+d) \in \mathbb{R}$

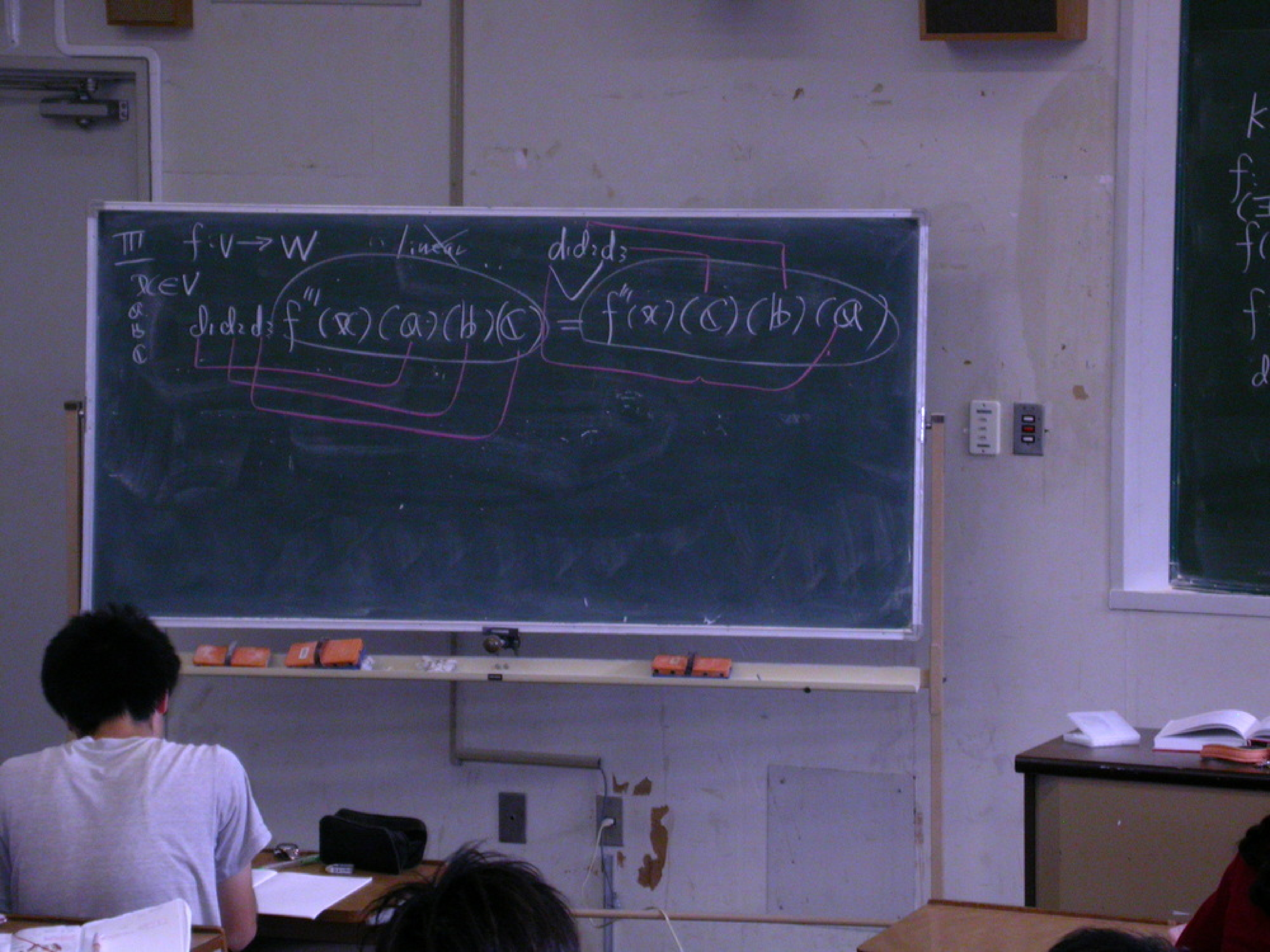
$f'(x)$

$$左辺 = d_2 \{ f'(x + a d_1) - f'(x) \}(b)$$

$$= d_2 f'(x + a d_1)(b) - d_2 f'(x)(b)$$

$$= \{ f(x + a d_1 + b d_2) - f(x + a d_1) \} - \{ f(x + b d_2) - f(x) \}$$

$$= f(x + a d_1 + b d_2) - f(x + a d_1) - f(x + b d_2) + f(x)$$


III f: V → W ∴ linear
x ∈ V
a
b
c
d1d2d3 f'''(x)(a)(b)(c) = f'''(x)(c)(b)(a)
d1d2d3

17回目

西村先生・みなさま:

昨日(10/20)の3限、「基礎数学」(西村先生)の2学期7回め(通算17回め)を
聴講しました。教室は2B412です。

出席者は、65名(前回は63名;昨年同期は31名)+教員1名(私)+TA1名(桑田)です。

まず、R2からRへの具体的ないくつかの多変数関数に関して、二階導関数(R2×R2から
Rへの線型写像)を求めるレポート課題が出ました。
次に、L(V; L(V; W))とL(V, V; W)が同一視できることが述べられ、その証明も
レポート課題になりました。
最後に、2階微分係数が対称であること、つまり偏微分の順序の入れ替えができることが
証明され、3階微分係数が対称であることを示すレポート課題が出ました。

次回からベクトル解析に入るそうです。ベクトル解析がわかるかどうかで、3学期の
電磁気学が天と地ほど違って見えるとおっしゃって下さいました。

おそらく、今回が難しさのピークだと思われます。しかし、学生は粘り強く聞いて
いました。居眠りもほとんどありません。昨年度より人数的にもモチベーションも、
大きく進歩していると思います。西村先生、本当にありがとうございます。

ひとつご提案させて頂きたいのですが、多変数関数の微分係数を、昨年は
df(x)(a)と書かれていましたし、今年も最初はそう書かれていましたが、現在は
f'(x)(a)とかf''(x)(a)(b)と書かれています。こちらのほうが、学生にとって
混乱は少ないと思います。もし他で不都合がなければ、来年度からは、最初から
こちらで統一して書いて頂くのがよろしいのではないでしょうか?

--
奈佐原 顕郎 (旧姓西田)
筑波大学農林工学系