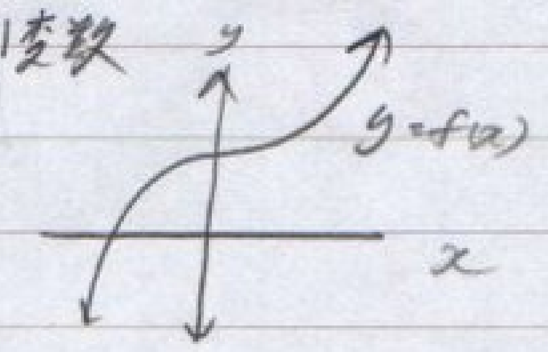
基礎数学　(6回目)　　10/15/08

微分

変数	多変数
微分	? 偏微分
合成関数の微分	?
高階微分	?

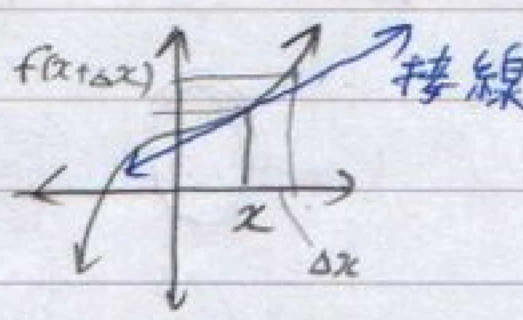
1変数



曲がっているのは和

↓ 微分

直っすぐにする



高校では 極限

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$ $\underline{x\text{を固定}}$

$f(x)=\sin x$ のとき,

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x$$

十分に Δx を小さくすると,

$$\Delta y \fallingdotseq f'(x)\,\Delta x \longleftarrow \text{比例関係}$$

$$= (\cos x)\,\Delta x$$

比例定数

3次元

接平面

3次元以上も扱える

代数

組形代数 (linear algebra)

1変数

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$　(一般には linear ではない)

微分 (mechanism)

を通して, x を固定すれば,

$f'(x)$ という <u>微分係数</u> が出てくる

xを動かしてみれば, $f': \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$　(一般には linear ではない)

もう一度この微分という mechanism を通してみれば,

$f''(x)$ が出てくる。

多変数

$f: V \longrightarrow W$ 　　V, W は有限次元の線形空間

$V=\mathbb{R}^n$ 　　$W=\mathbb{R}^m$

一般には linear ではない関数

$\frac{df}{dx}$

微分の mechanism が働いて、

$x \in V$

$df(x) = f'(x) : V \longrightarrow W$ 　linear（線形写像）

$\in L(V;W)$

(xを動かす→ $f' : V \longrightarrow L(\overset{\mathbb{R}^n}{V};\overset{\mathbb{R}^m}{W})$ 　（一般では linear ではない）

linear mapping の全体

空間

集合（もののあつまり）

$m \times n$ の行列で表せる。

mn 次元

$f'(x)$ 微分係数

$f'(x) \in \underbrace{L(\mathbb{R};\mathbb{R})}$ 　　線形関数 $\Delta x \longmapsto f'(x)\Delta x = \Delta y$

$\parallel$ 比例定数で決まる。

$\mathbb{R}$（同一視） 数

もう一回微分すれば $f'' : \mathbb{R} \rightarrow \underbrace{L(\mathbb{R};\ \underline{L(\mathbb{R};\mathbb{R})})}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$

$\parallel$

$L(\mathbb{R},\mathbb{R};\mathbb{R})$ 　　$\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

二重線形写像

$\varphi(x,y) = a\,xy$

$\parallel$

$\varphi(x\cdot 1, y\cdot 1)$ 　　一重線形写象の場合、

$\parallel$

$xy\,\underbrace{\varphi(1,1)}$ 　　$\varphi(x) = ax$

a の定数だけで決まる

高校の数学　　制約がある

$f(x,y)$: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は explicit に出してはいけない

$x \longmapsto (\underline{y \longmapsto f(x,y)})$

対応させるものが 関数　　全体は関数

$\mathbb{R}$から $\{\mathbb{R}$から$\mathbb{R}$ への関数の全体$\}$ への関数

$V\times V \to W$ への 2重線形写像

$\varphi(x,y)$

xを固定して yを動かせば 線形写像 (xにかんして)
y　　〃　　x　　〃

$x\in V \longmapsto \{\underline{y\longmapsto \varphi(x,y)}\}$

xを固定　　線形写像 になっている。

$\Uparrow$

$V \longrightarrow L(V;W)$　　線形

$(\varphi_1+\varphi_2)(y) = \varphi_1(y)+\varphi_2(y)$

$\varphi(x_1+x_2, y) = \varphi(x_1,y)+\varphi(x_2,y)$

$x_1+x_2 \longmapsto \varphi(x_1,\cdot)+\varphi(x_2,\cdot) = \varphi(x_1+x_2,\cdot)$

結論

$L(V;L(V,W)) = L(V,V;W)$

同一視 できる

$\mathcal{L}(\mathbb{R};\mathcal{L}(\mathbb{R};\mathbb{R})) = \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R};\mathbb{R})$

$\varphi(x,y) = axy$

$x \mapsto (y \mapsto axy)$

ax を比例定数とする比例関係

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (linear) $\varphi(x) = ax$

$\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (2重線形) $\varphi(x,y) = axy$

$\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (3重) $\varphi(x,y,z) = axyz$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (linear)

$\varphi(x_1,x_2) = a_1x_1 + a_2x_2$ 2つの数

$\varphi : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (2重線形)

$\varphi\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right) = \sum_{i,j=1,2} a_{ij}x_iy_j$ 4つの数

$\varphi : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\varphi\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}\right) = \sum_{\substack{i,j\\=1,2}} a_{ijk}x_iy_jz_k$

来週: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (一般ではlinearではない)

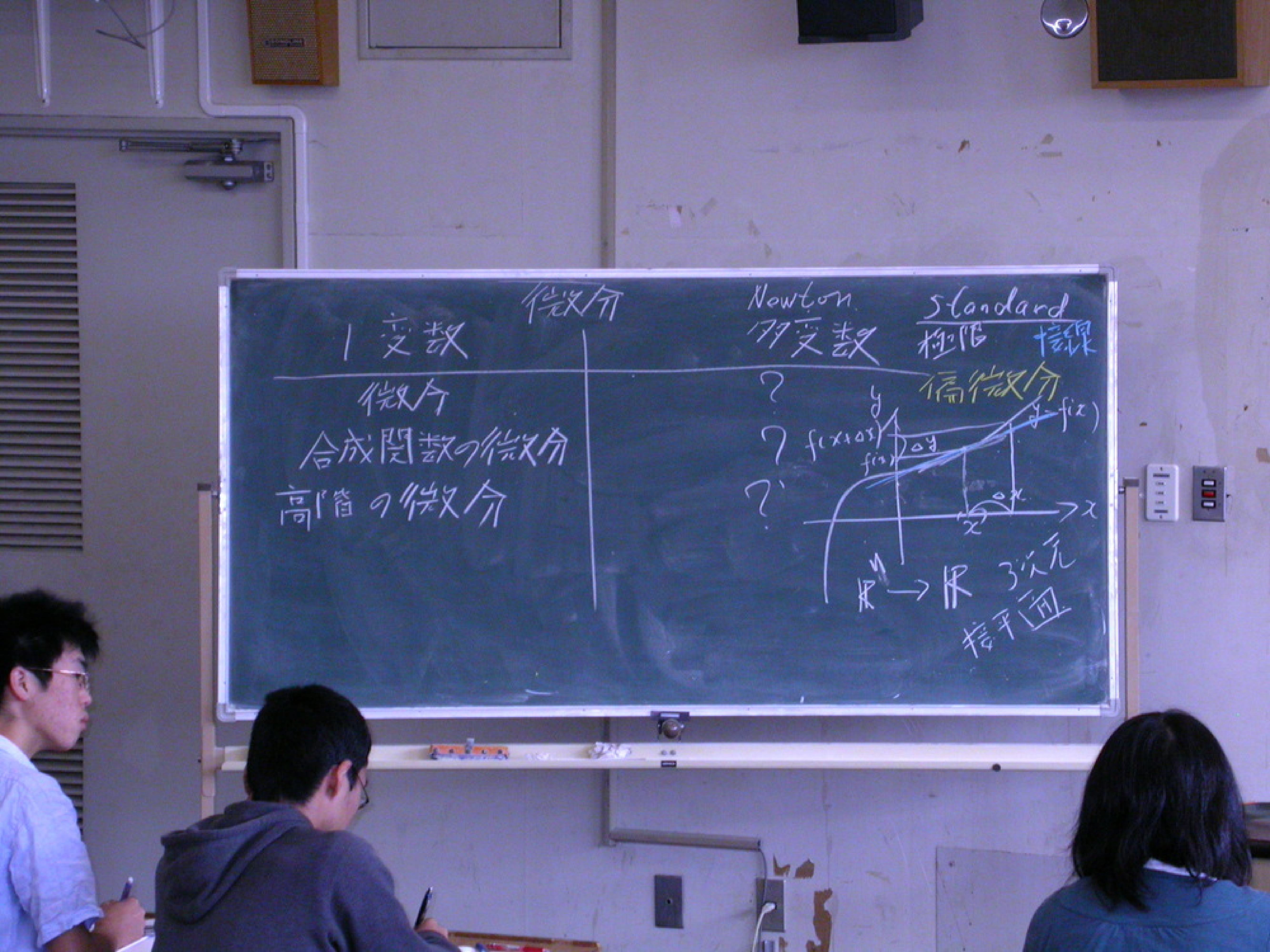
$f'(x)$ は $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ へのlinearな関数となる。

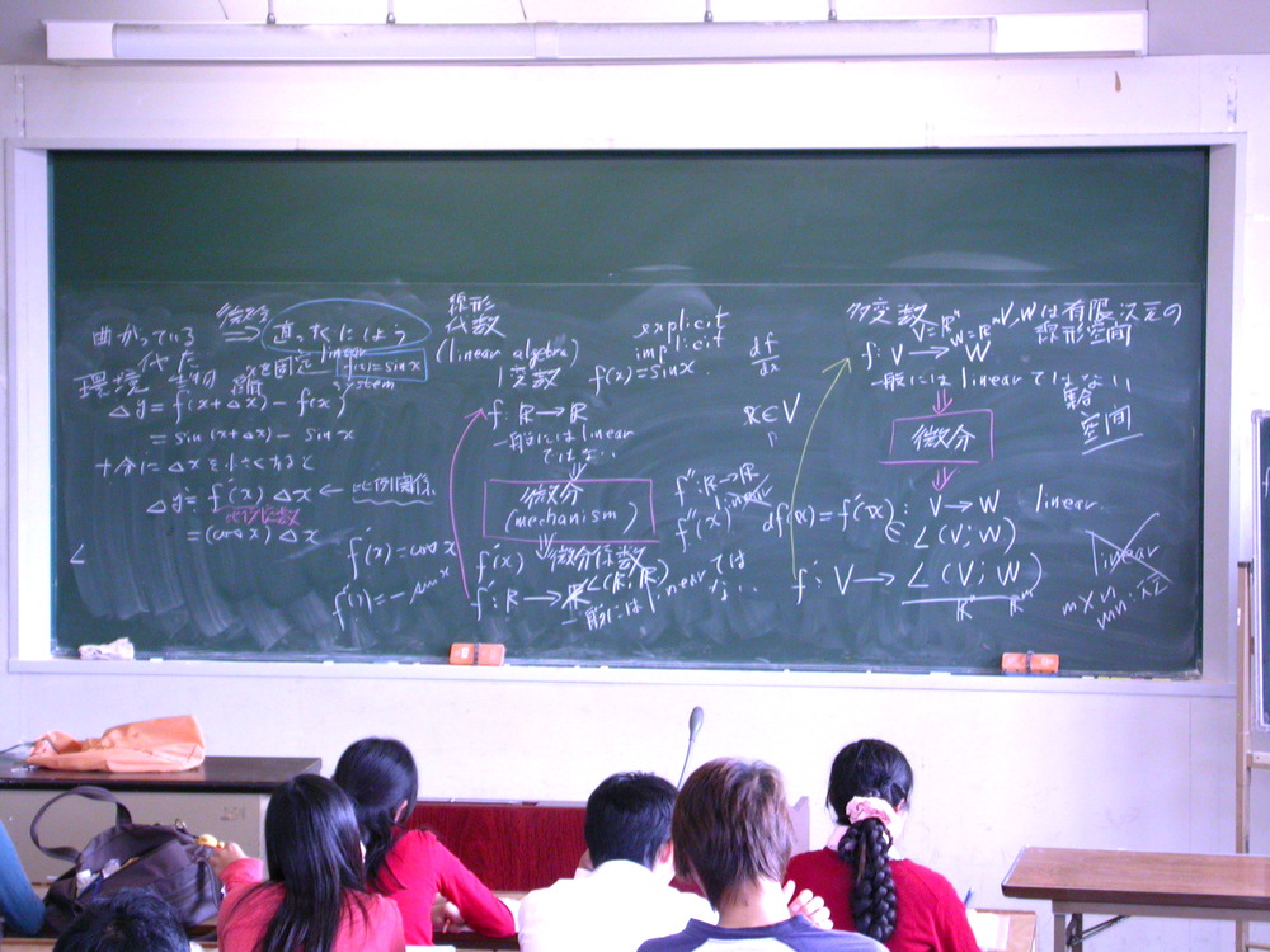
$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ ですべて決まる

$a_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}$, $a_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}$

$f''(x)$ は $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (2重linear) $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$

$f'''(x)$ $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$


微分
1変数
微分
合成関数の微分
高階の微分
Newton
多変数
?
?
?
Standard
極限
接線
偏微分
y
f(x+Δx)
Δy
f(x)
y=f(x)
x
Δx
x
R^n → R
3次元
接平面



曲がっている
直っすぐにしよう
linear
f(x)=sin x
system
環境
Δy = f(x+Δx) − f(x)
= sin(x+Δx) − sin x
十分にΔxを小さくすると
Δy ≒ f'(x) Δx ← 比例関係
比例定数
= (cos x) Δx
線形
代数
(linear algebra)
1変数
f(x)=sin x
explicit
implicit
df/dx
f: R → R
一般にはlinearではない
微分
(mechanism)
微分係数
f'(x) = cos x
f''(x) = −sin x
f'(x)
f': R → R
一般にはlinearではない
f'': R → R
f''(x)
x∈V
多変数
V,Wは有限次元の線形空間
f: V → W
一般にはlinearではない
微分
V → W linear
df(x) = f'(x): V → W
∈ L(V; W)
f': V → L(V; W)
空間

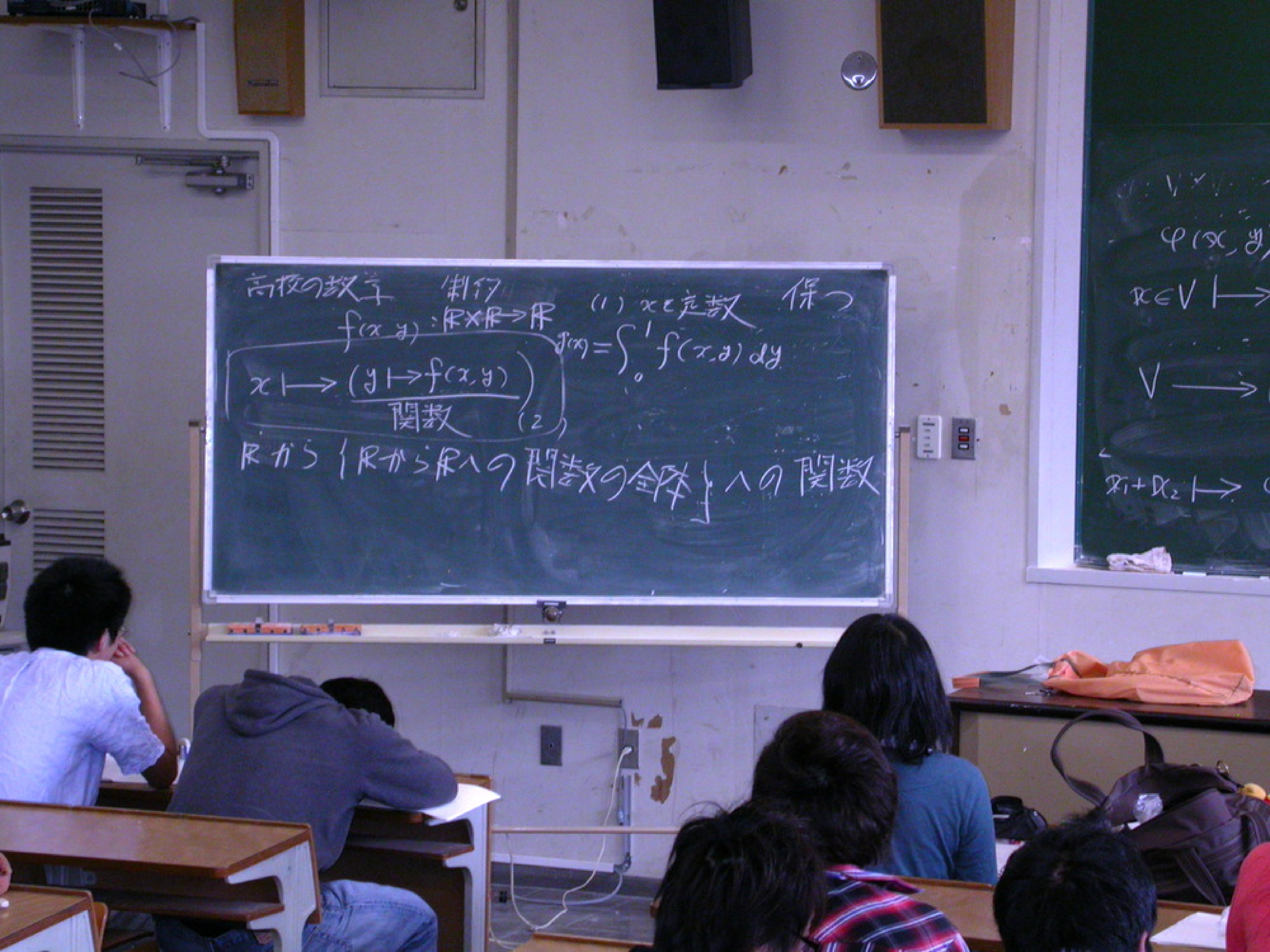
$\overset{\in \mathbb{R}}{f'(x)}$ 微分係数　　線形関数 $\varphi(x)=ax$

$f'(x) \in \underbrace{L(\mathbb{R};\mathbb{R}) = \mathbb{R}}_{\text{同一視}}$　　$\Delta x \longmapsto f'(x)\Delta x = \Delta y.$

$\varphi(x,y) = axy.$

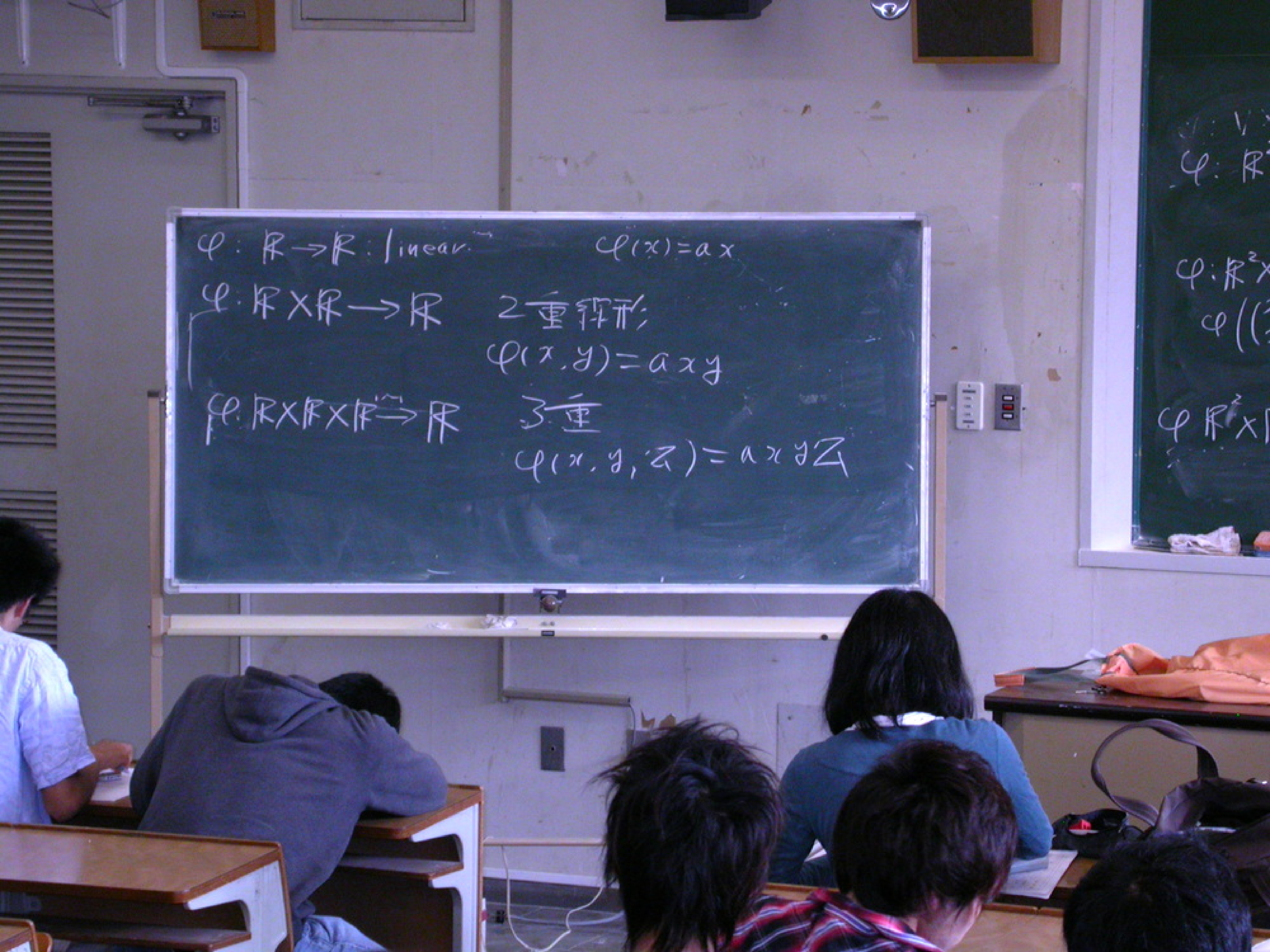
$$f'' : \mathbb{R} \longrightarrow \underbrace{L(\mathbb{R}; \underbrace{L(\mathbb{R};\mathbb{R})}_{\mathbb{R}})}_{\shortparallel} = \mathbb{R} \qquad \overset{\shortparallel}{\varphi}(x1, y1) = xy\,\underbrace{\varphi(1,1)}_{a}$$

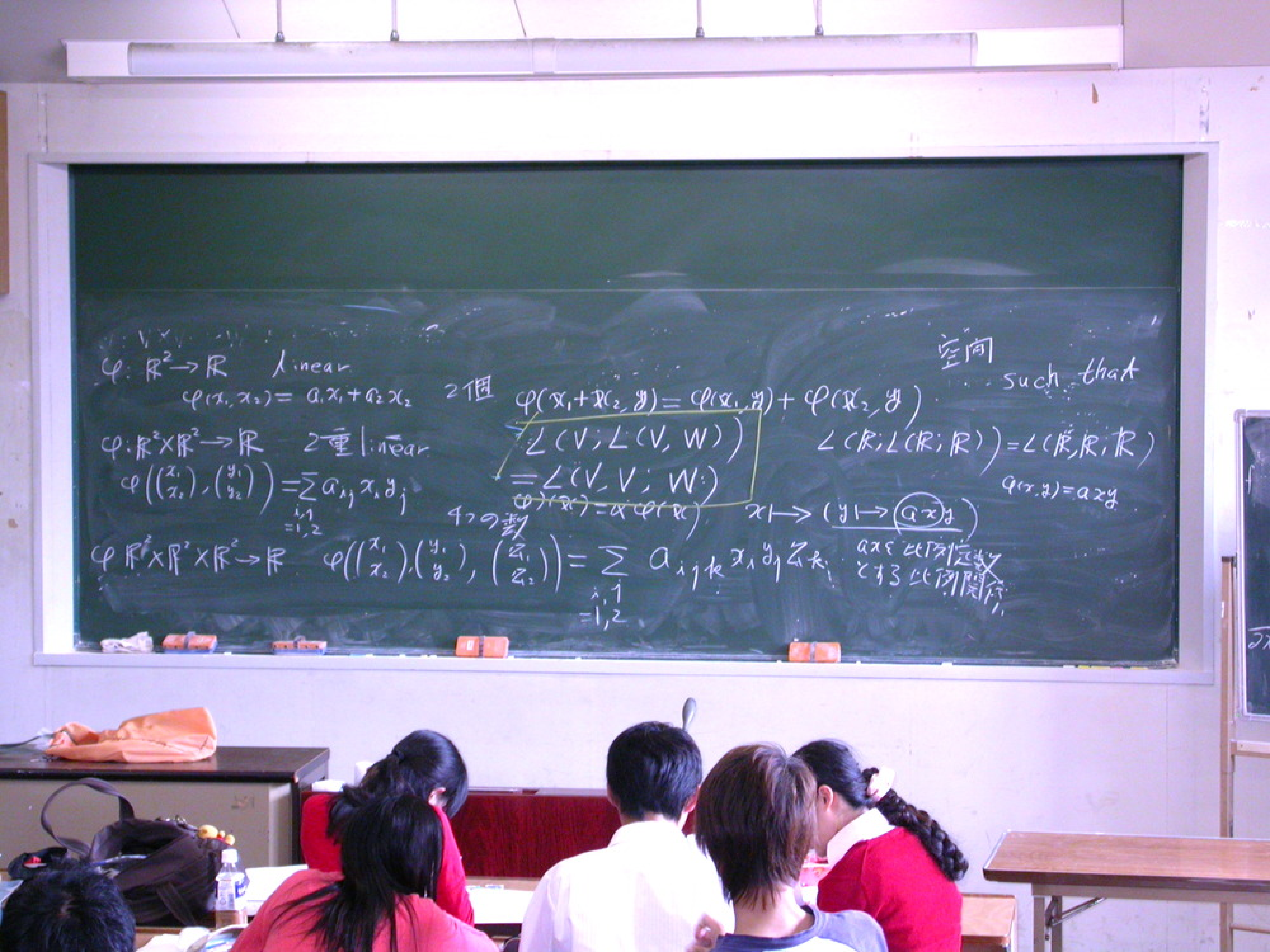
$L(\mathbb{R},\mathbb{R};\mathbb{R})$　$\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$　二重linear.



高校の数学
(1) xを定数
保つ
f(x,y): R×R→R
g(x)=∫0 1 f(x,y)dy
x ↦ (y ↦ f(x,y))
関数
(2)
Rから{RからRへの関数の全体}への関数
φ(x,y)
x∈V ↦
V →
x1+x2 ↦

空間
such that
φ(x, y)
x∈V ↦ [y ↦ φ(x, y)]
線形写像
V → L(V; W)
(φ1+φ2)(y) = φ1(y) + φ2(y)
x1+x2 ↦ φ(x1, ·) + φ(x2, ·) = φ(x1+x2, ·)
φ(x1+x2, y) = φ(x1, y) + φ(x2, y)
同一視できる
L(V; L(V, W))
= L(V, V; W)
線形 (αφ)(x) = αφ(x)
L(R; L(R; R)) = L(R, R; R)
φ(x, y) = axy
x ↦ (y ↦ axy)
axを比例定数とする比例関係


$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: linear
$\varphi(x) = ax$
$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
2重線形
$\varphi(x, y) = axy$
$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
3重
$\varphi(x, y, z) = axyz$


φ: ℝ² → ℝ linear
φ(x₁, x₂) = a₁x₁ + a₂x₂
2個
φ: ℝ²×ℝ² → ℝ 2重linear
φ((x₁, x₂), (y₁, y₂)) = Σ aᵢⱼ xᵢ yⱼ
4つの数
φ: ℝ²×ℝ²×ℝ² → ℝ
φ((x₁, x₂), (y₁, y₂), (z₁, z₂)) = Σ aᵢⱼₖ xᵢ yⱼ zₖ
φ(x₁ + x₂, y) = φ(x₁, y) + φ(x₂, y)
L(V; L(V, W))
= L(V, V; W)
φ(αx) = αφ(x)
空間
such that
L(ℝ; L(ℝ; ℝ)) = L(ℝ, ℝ; ℝ)
φ(x, y) = axy
x ↦ (y ↦ ax y)
axを比例定数とする比例関係

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ~~linear~~

$f'(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$a_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$

$a_2 = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}$

$f''(x) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

2重 linear

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$$

16回目

西村先生・みなさま:

昨日(10/15)の3限、「基礎数学」(西村先生)の2学期6回め(通算16回め)を
聴講しました。教室は2B412です。

出席者は、63名(前回は59名;昨年同期は33名)+教員1名(私)+TA1名(桑田)です。

1変数関数と多変数関数で、どのように微分の考え方が拡張されるのか、もういちど
説明されました。このとき、2階の微分係数はL(V; L(V; W))の要素であるのですが、

L(V; L(V; W))がL(V, V; W)と同一視できること
L(R^2; R^2)を2次正方行列の全体と同一視すること

などのあたりが、学生の理解を苦しめていたと思います。しかし、すこしづつわかって
きていると思います。質問も活発になってきました。何度も申し上げて恐縮ですが、
具体例を提示してやって頂けると理解が進むと思います。

--
奈佐原　顕郎　(旧姓西田)
筑波大学農林工学系

Copyright 2007, by the Contributing Authors. .
16回目. (2008, October 17). Retrieved June 26, 2013, from 筑波大学 OCW Web site: http://ocw.tsukuba.ac.jp/25a0-iv-2-751f72698cc76e905b66985e/57fa790e65705b66-1/1656de76ee.
All Rights Reserved.