# 基礎数学（5回）　10/06/08

一般化されている。

多変数の微分 $\Longleftarrow$ 1変数の微分（高校）

・合成関数の微分

ー偏微分の洪水 ー どうなっているのか

↓の場合は、　数ですんだ

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$ を固定してやって、

動かしてやれば、再び　$f'(x)$ 微分係数 at $x$.　　高階微分.

$\rightarrow f': \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$　$L(\mathbb{R}; \mathbb{R})$

で微分できる。

$\mathbb{R}$から$\mathbb{R}$への線形写像

$f'(x) \in L(\mathbb{R}; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$　と同じこと

比例関数 $a$

数で表わせるから $\mathbb{R}$ と同じ

$y = ax$ ー 線形写像

$a$が決まれば、全て決まる.

↓ 傾きは、線形写像を表わしている.

$f''(x) = L(\mathbb{R}; L(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$

この空間への線形写像

$= L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$

2重線形写像.

$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}^2$

$df(x) = f'(x) \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$

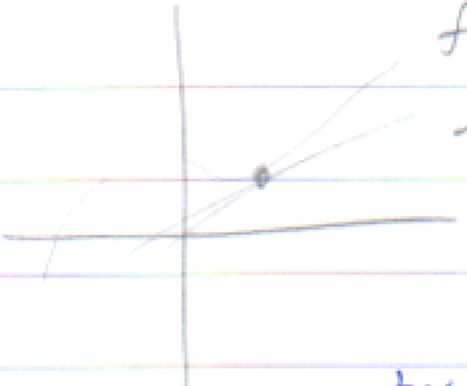
$x$を動かす.　をこていして、びぶんしてやったら、ここに入る.

今まっすぐではない

→関数.　$df = f': \mathbb{R}^2 \rightarrow L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$

$d^2f = f''(x) \in L(\mathbb{R}^2; (\mathbb{R}^2; \mathbb{R})) = L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$

線形写像　$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$　2重



$x$を固定

$f'(x)$

今度これを動かす　$f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

まっすぐ直線じゃないから、また微分できる。

$y = \sin x$

$y' = \cos x$

多変数だと、線形写像というものを考えないといけない…

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

2つ　1つの数.

1変数:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

線形写像

$f'(x) \in L(\mathbb{R};\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ 数になる。

固定

$f': \mathbb{R} \to L(\mathbb{R};\mathbb{R})$ ← 線形とは限らない。

$f''(x) \in L(\mathbb{R}; L(\mathbb{R};\mathbb{R}))$

$f'': \mathbb{R} \to L(\mathbb{R}; L(\mathbb{R};\mathbb{R}))$ ← 線形とは限らない

これのくり返し。

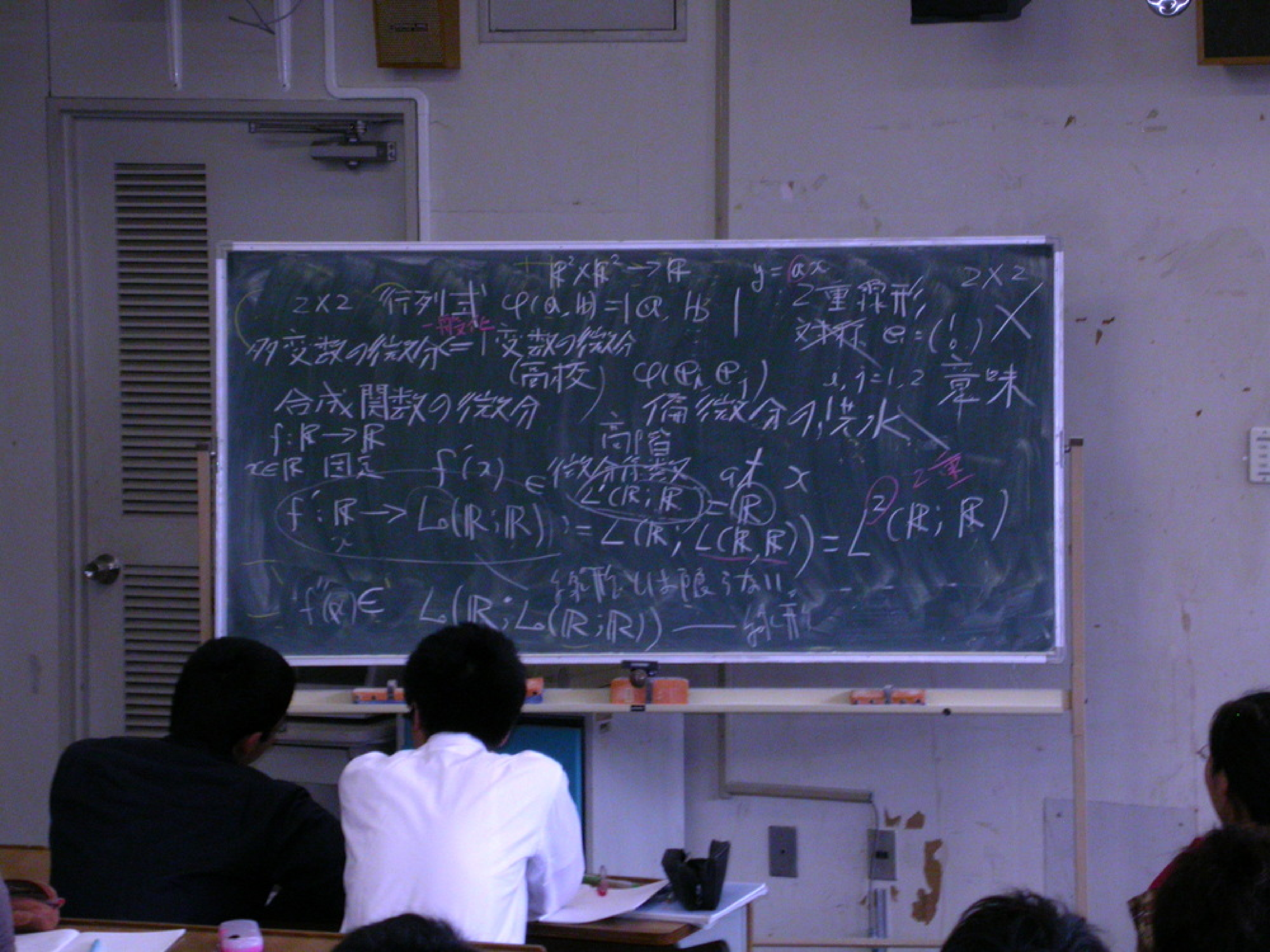
2変数でも同じこと

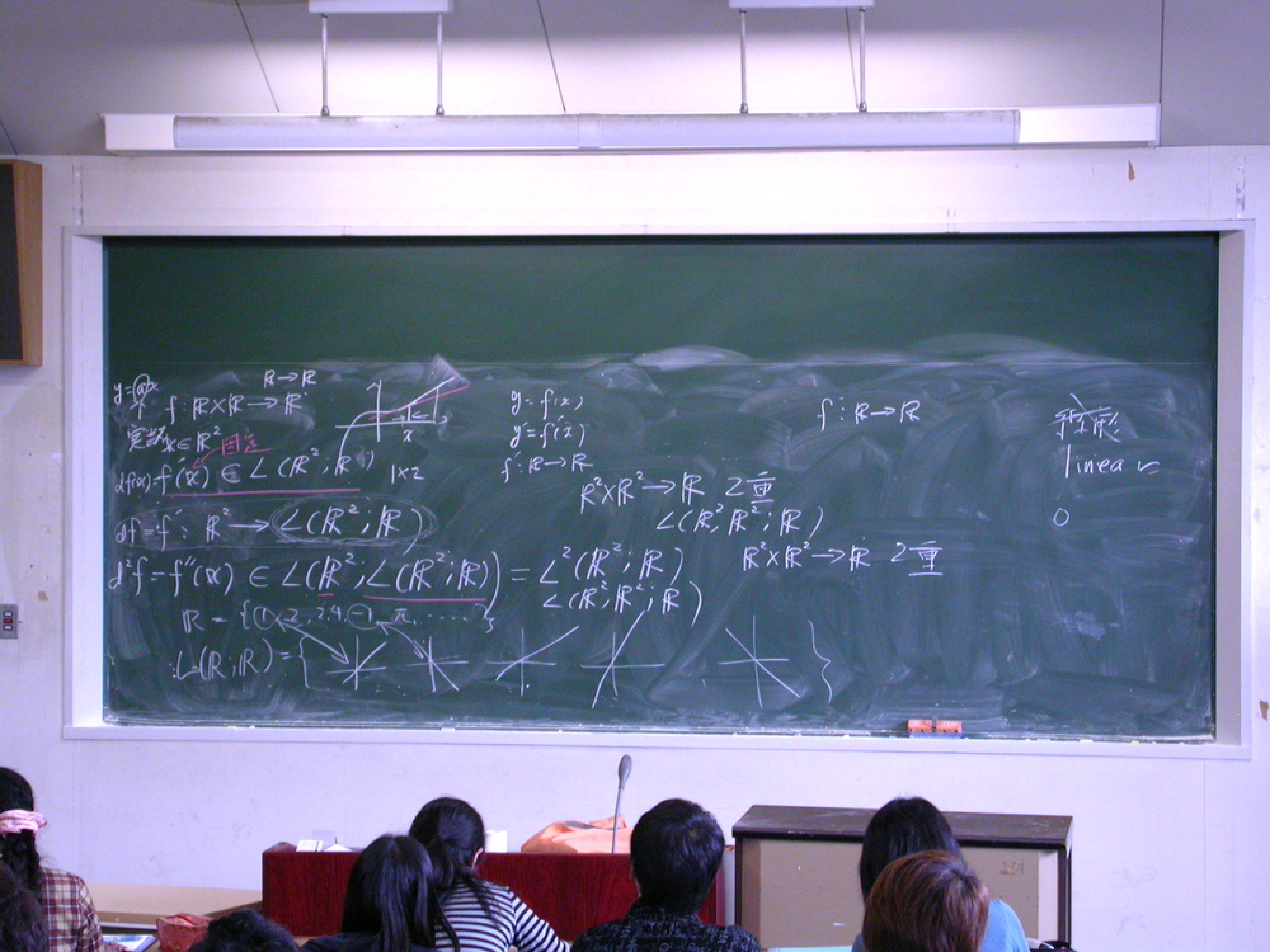
$L(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ になる。

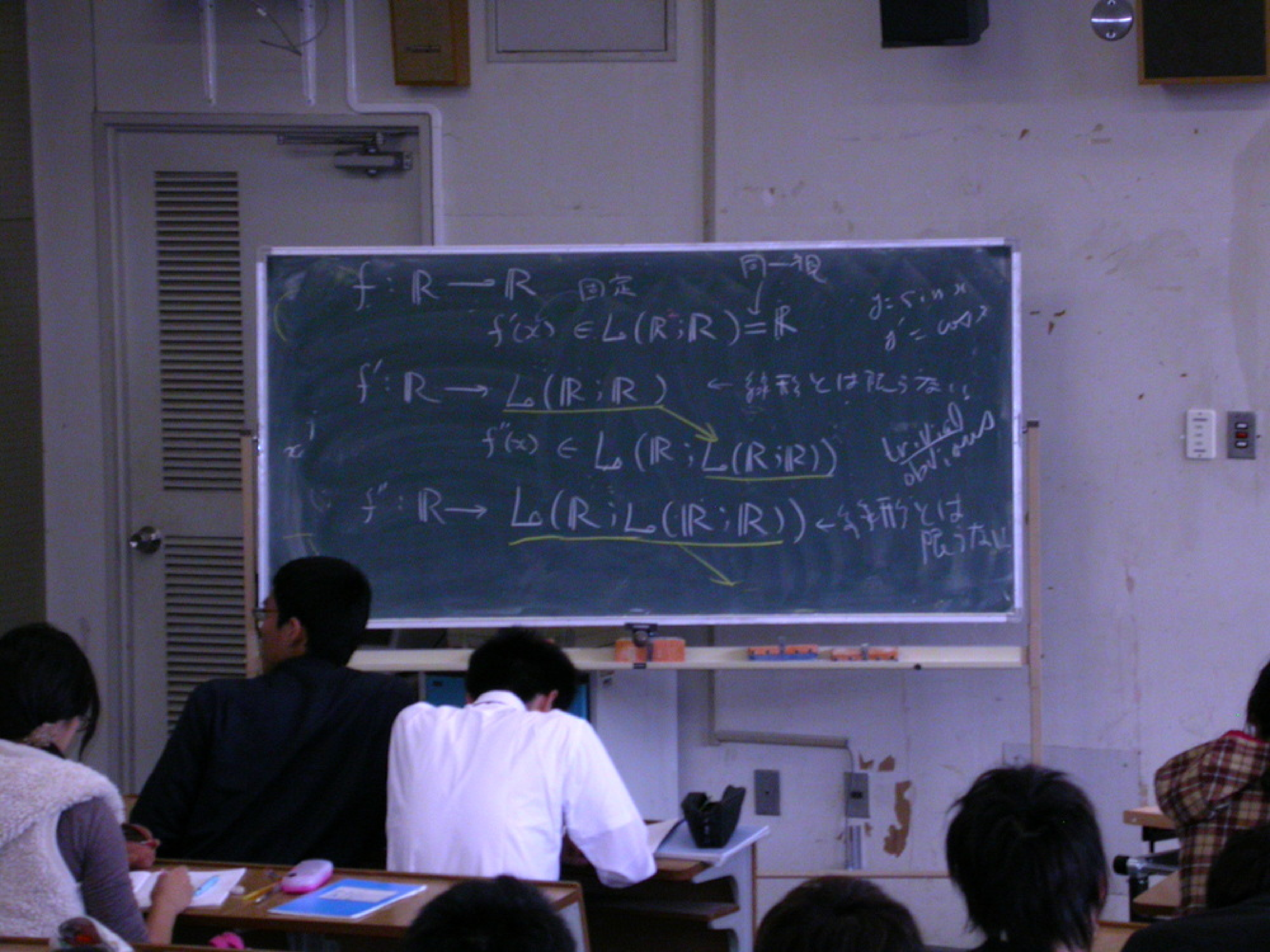
2変数

$L(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$

$y = (a_1\ a_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \underset{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{a_1}x_1 + \underset{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{a_2}x_2$


ℝ²×ℝ² → ℝ
y = ax
2×2
2×2 行列式 φ(a, b) = |a, b|
2重線形
対称 e₁ = (1, 0)
一般化
多変数の微分 = 1変数の微分
(高校)
φ(e_i, e_j)
i, j = 1, 2
意味
合成関数の微分
偏微分の順序
f : ℝ → ℝ
高階
x∈ℝ 固定
f′(x) ∈ 微分係数 L(ℝ; ℝ) = ℝ
a x
2重
f′ : ℝ → L(ℝ; ℝ)) = L(ℝ; L(ℝ, ℝ)) = L²(ℝ; ℝ)
線形とは限らない
f″(a) ∈ L(ℝ; L(ℝ; ℝ)) —— 線形


R → R
f : R × R → R
実数 x ∈ R² 固定
df(x) = f′(x) ∈ L(R²; R)
1×2
df = f′ : R² → L(R²; R)
d²f = f″(x) ∈ L(R²; L(R²; R)) = L²(R²; R)
L(R², R²; R)
R = {1, 2, 2.4, −1, π, …}
L(R; R) = {
y = f(x)
y′ = f′(x)
f′ : R → R
R² × R² → R 2重
L(R², R²; R)
R² × R² → R 2重
f : R → R
linear
0



f : R → R 固定
同一視
f'(x) ∈ L(R;R) = R
f = sin x
f' = cos x
f' : R → L(R;R) ← 線形とは限らない
f''(x) ∈ L(R;L(R;R))
trivial
obvious
f'' : R → L(R;L(R;L(R;R)) ← 線形とは限らない

# 15回目

西村先生・みなさま:

昨日(10/06)の3限、「基礎数学」(西村先生)の2学期5回め(通算15回め)を
聴講しました。教室は2B412です。

出席者は、59名(前回は71名;昨年同期は32名)+教員1名(私)+TA1名(桑田)です。

まずレポート課題が1題、追加されました:「2次の行列式をR2×R2→Rの二重線型写像
とみたときの表現行列を求めよ」

次に、先週の復習で、f:R→Rに関してその2階微分係数f''(x)はL(R; L(R, R))の元
であり、それはL2(R; R)の元である、といことが語られました。

ここで(申し訳ないことに)私自身が理解できなくなりまして、質問しまして、
授業が実質的にストップしてしまいました。以後、西村先生の授業計画に反して、
今回の授業のほとんどは、この部分に費やされました。

私自身、よく考えてみまして、だいたい整理できました。そして、昨日の夕方、
「数理科学演習」のあとに、12人ほどの学生を相手に、復習しました。わかりづら
かった部分を以下に述べます:

既に話されたように、多変数関数(例えばR2→R)の微分係数は、R2→Rの線型写像です。
実際、多変数のKock-Lawvereの公理は次式になりますが、
　f(x+ad)=f(x)+df(x)(a)d
このときdf(x)は方向ベクトルa ∈R2をdf(x)(a) ∈Rに対応させる線型写像です。

このアナロジーを1変数関数に持っていくと、Kock-Lawvereの公理は
　f(x+d)=f(x)+f'(x)d
ではなく、形式的に、a ∈Rを導入して
　f(x+ad)=f(x)+f'(x)ad
と書く必要があるのではないかと思います。こうすれば、f'(x)はaをf'(x)aに対応
させる、R→Rの線型写像になります。

f'(x)はR→Rの線型写像ですから、f'(x)∈L(R; R)です。すると導関数f'はx
をL(R; R)のどれかに対応させる写像(線型とは限らない)になります。すなわち、

f': R→L(R; R)です。ここで、f'に関して、再び微分を考えてやれば、f''(x)は
R→L(R; R)の線型写像になります。すなわち、f''(x)∈L(R; L(R; R))となります。

ところが、この論理の中で、2回目の微分を考えるとき、f': R→L(R; R)のままでは
ダメで、L(R; R)をRと同一視して、f': R→Rと考えねばなりません。なぜなら
Kock-Lawvereの公理は必ずしもR→L(R; R)に拡張されてはいないからです。

このアナロジーをR2→Rの関数へもっていくと、
　df(x)∈L(R2; R)
　df: R2→L(R2; R) ... 線型とは限らない
　d(df)(x)∈L(R2; (L(R2; R))
となりますが、d(df)(x)を考えるとき、df: R2→L(R2; R)のままではダメで、

L(R2; R)をR2と同一視して、df: R→R2とと考えねばなりません。なぜなら
Kock-Lawvereの公理は必ずしもR→L(R2; R)に拡張されてはいないからです。

ところが、そのような同一視という手続きを踏んで2階導関数に到達すると、むしろ
　f''(x)∈L(R; R) ... R→Rの関数の場合
　d(df)(x)∈L(R2; R2)　... R2→Rの関数の場合
となってしまいます。もちろん、ここで同一視の手続きをこんどは逆にたどれば、
　f''(x)∈L(R; L(R; R)) ... R→Rの関数の場合
　d(df)(x)∈L(R2; L(R2; R))　... R2→Rの関数の場合
になって、最終的にメデタシになるのですが、要するに、これだけの微妙な手続き
が背後にある、ということを見通すことができなければ、論理的なステップを上がって
行けないのです。

なおかつ、学生は「同一視」という手続き自体をほとんど理解していません。
西村先生は、L(R^n; R^m)がm×n行列の集合と同一視できることは述べられ
ましたが、学生はそれを聞いて「ふーん」と思っているだけです。話の筋を
聞いて、確かにそうだな、でもそれが何？という感じで、その話がここで
L(R; R)をRと同一視し、L(R2; R)をR2と同一視する、というふうにつながる
ことを、わかっていません。

実例を考える演習が必要です。行列式の表現行列を求める課題は、良い問題でした。

あの程度の問題がわからない学生がたくさんいます。手続的にはφ(ei, ej)を
計算すればいいのだなとわかっても、なぜそれでいいのか、それを並べた行列が
具体的にどのように行列式とつながるのか、わかっていません。実際、できた
行列の左右からxとyをかけると、x1y2-x2y1が出てくる、というところまでやって
見せて、初めて「ああそうなのか！」と驚いた顔をします。

それ以外に私が学生に出した実例は、

f:R→Rの例としてf(x)=x^3について、x=4における微分係数(48)がaを48aに
写す線型写像となり、導関数がR→L(R; R)の線型でない写像になることを確認。
とか、
f:R2→Rの例としてf(x, y)=x^2+3y^2について、その微分係数がR2→Rの
線型写像となり、(x, y)=(1, 1)においてそれがR2の元(2,6)と同一視できる
こと。これは実は偏微分係数を並べたものになっていること。導関数が実際に
R2→L(R2; R)の写像になることを確認。
とか、
L(R2; R)の元を5つ考えてみよう！
とか、
対称行列の例を5つ考えてみよう！

などです。徹底的に具体的な課題を出すことが有効だと思います。オーソドックスな
数学教育からすると抵抗感がありますが、当学類の学生には、定理や命題を証明する
こと以上に、具体的な実例をたくさん示して、まず帰納的に体感させることが有効
だと思います。

--
奈佐原　顕郎　（旧姓西田）
筑波大学農林工学系