[第3回]　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　9/22/08

行列が出てくる

線形写像 ― 特殊な写像

$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 線形

$$\begin{cases} 1)\ \varphi(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{b}) \\ 2)\ \varphi(\alpha \mathbf{a}) = \alpha\varphi(\mathbf{a}) \end{cases}$$

α はスカラー

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{標準基底}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$$

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{a}) &= \varphi(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) \\ &= a_1\varphi(\mathbf{e}_1) + a_2\varphi(\mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

φ という写像は、　これがどこへいくか

2次の列ベクトル

2×2の行列になる

$$[\varphi(\mathbf{e}_1)\quad \varphi(\mathbf{e}_2)]$$

$$\varphi(\mathbf{a}) = [\varphi(\mathbf{e}_1)\quad \varphi(\mathbf{e}_2)]\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

任意の関数

(前回の復習)

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 任意の関数 (写像)

function mapping

$x \in \mathbb{R}^2$ を固定 $a \in \mathbb{R}^2$

微分 fの方向の微分

$$f(x + da) = f(x) + \underline{\partial_a f(x) d}$$

これで この線形写像 を表す

$$df(x) : a \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \partial_a f(x) \in \mathbb{R}^2$$

線形写像

一意的に決まる.

$$f(x + d e_1) = f(x) + \partial_{e_1} f(x) d \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

微分係数

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x_1 + d \\ x_2 \end{pmatrix}$$

x方向の微分係数を出している.

⇓

xの変微分

固定している

y成分は へんかなし

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

x座標を f_1

y座標を f_2

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

a方向の微分がほしければ,

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

をかけてやる。

合成関数 の微分

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$　　$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$(g \circ f)(x+d) = g(f(x+d))$

$= g(f(x) + \underbrace{f'(x)d}_{\in D})$

$D = \{d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0\}$

スカラー倍 は closed

実数をかけても $\mathbb{R}$ に入る

けど 足し算 は とじていない

$= g(f(x)) + g'(f(x)) f'(x) d$

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x)$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$　　$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$　　$x \in \mathbb{R}^2$

$d(g \circ f)(x)(a)$　$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ への線形写像　　$a \in \mathbb{R}^2$

$(g \circ f)(x + da) = g(f(x + da))$

$= g(f(x) + \underbrace{df(x)(a)}_{\in \mathbb{R}^2} \underbrace{d}_{\in D})$

$\frac{df}{dx}$ と同じ d

$= g(f(x)) + d\, dg(f(x))(df(x))(a))$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の線形写像

結論

$d(g \circ f)(x) = \underbrace{dg(f(x))}_{\text{の線形写像}} \overset{\text{合成}}{\circ} df(x)$

二つの線形写像の合成になっている。

$$\overset{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}}{d(g\circ f)}(x)(a) : \overset{\begin{pmatrix}y_1\\y_1\end{pmatrix}}{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \overset{\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}}{\mathbb{R}^2}$$

$$df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$dg(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial z_2}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial z_2}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_2} = \frac{\partial z_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial z_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}$$ ← 合成関数の微分

積をかけているだけ

多重線形写像

$\boxed{\text{内積}}$ − 2重線形性を満たす.（もっている）

内積という実数が定まる

$\langle x, y\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1) $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$

2) $\langle x, y_1 + y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle$

3) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

4) $\langle x, \beta y\rangle = \beta\langle x, y\rangle$

5) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$　対称性

$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$　(2重線形写像)とする。

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_1 e_1 + y_2 e_2$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y) &= \varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2,\ y_1 e_1 + y_2 e_2) \\
&= \varphi(x_1 e_1, y_1 e_1 + y_2 e_2) + \varphi(x_2 e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2) \\
&= \varphi(x_1 e_1, y_1 e_1) + \varphi(x_1 e_1, y_2 e_2) \\
&\quad + \varphi(x_2 e_2, y_1 e_1) + \varphi(x_2 e_2, y_2 e_2) \\
&= x_1 y_1 \underline{\varphi(e_1, e_1)} + x_1 y_2 \underline{\varphi(e_1, e_2)} \\
&\quad + x_2 y_1 \underline{\varphi(e_2, e_1)} + x_2 y_2 \underline{\varphi(e_2, e_2)}
\end{aligned}$$

スカラーは前に出す

$$(x_1\ x_2)\begin{bmatrix} \varphi(e_1, e_1) & \varphi(e_1, e_2) \\ \varphi(e_2, e_1) & \varphi(e_2, e_2) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

が等しければ"いい

線型写像　特別な写像 → 行列

$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 標準基底

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 線型

(1) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

(2) $\varphi(\alpha a) = \alpha \varphi(a)$　αはスカラー

$a = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2$

$\varphi(a) = \varphi(a_1 e_1 + a_2 e_2)$
$= a_1 \varphi(e_1) + a_2 \varphi(e_2)$

2次の列ベクトル

2×2の行列で表わせる

$[\varphi(e_1)\ \ \varphi(e_2)]$

$\varphi(a) = [\varphi(e_1)\ \ \varphi(e_2)] \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$

$x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix}$

これでこの線型写像を表す

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$　任意の関数（写像）

$f = \begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}$　function　mapping

$x \in \mathbb{R}^2$ を固定　$a \in \mathbb{R}^2$

微分　fのa方向の微分

$f(x + d\,a) = f(x) + \partial_a f(x)\, d$

$df(x)$: $a \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \partial_a f(x) \in \mathbb{R}^2$　線型写像

$f(x + d\,e_1) = f(x) + \partial_{e_1} f(x)\, d$

$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \overset{\text{"}}{=} f\begin{pmatrix}x_1 + d\\x_2\end{pmatrix}$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

合成関数の微分　$\sin x^2$　$\sin \log x$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$　$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$(g \circ f)(x + d) = g(f(x + d))$

$= g(f(x) + \underbrace{f'(x) d}_{\in D})$

$= g(f(x)) + g'(f(x)) f'(x) d$

$D = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0 \}$

スカラー倍　closed

足し算　×

$(g \circ f)'(x)$

$= g'(f(x)) f'(x)$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$　$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$　$x \in \mathbb{R}^2$　$\frac{df}{dx}$

$d(g \circ f)(x)(a)$　$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ への線型写像　$a \in \mathbb{R}^2$

$(g \circ f)(x + d a) = g(f(x + d a))$　一般化

$= g(f(x) + \underbrace{df(x)(a)}_{\in \mathbb{R}^2} d)$

これは何を表しているか?

$= g(f(x)) + dg(f(x))(df(x)(a)) d$

結論

合成

$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x)$

$$df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad dg(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial z_2}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}$$

$(1,2)$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial z_2}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\frac{\partial z_1}{\partial x_2} = \frac{\partial z_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial z_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}}$$

多重線形写像

内積は 2重線型性を満たす

$\langle x, y \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1 $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$

2 $\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$

3 $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

4 $\langle x, \beta y \rangle = \beta \langle x, y \rangle$

5 $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ 対称性

$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 2重線型写像

$x_1 e_1 + x_2 e_2 = x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_1 e_1 + y_2 e_2$

[illegible]で決まる

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y) &= \varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2) \\
&= \varphi(x_1 e_1, y_1 e_1 + y_2 e_2) + \varphi(x_2 e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2) \\
&= \varphi(x_1 e_1, y_1 e_1) + \varphi(x_1 e_1, y_2 e_2) + \varphi(x_2 e_2, y_1 e_1) + \varphi(x_2 e_2, y_2 e_2) \\
&= x_1 y_1 \underline{\varphi(e_1, e_1)} + x_1 y_2 \underline{\varphi(e_1, e_2)} + x_2 y_1 \underline{\varphi(e_2, e_1)} + x_2 y_2 \underline{\varphi(e_2, e_2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(\Phi_1, \Phi_1) & \varphi(\Phi_1, \Phi_2) \\ \varphi(\Phi_2, \Phi_1) & \varphi(\Phi_2, \Phi_2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

13回目

西村先生・みなさま:

一昨日(9/22)の3限、「基礎数学」(西村先生)の2学期3回め(通算13回め)を
聴講しました。教室は2B412です。

出席者は、75名(前回と同じ)＋教員1名(私)+TA2名(桑田・中西)です。

1. R^2からR^2への線型写像は2次正方行列で表現できること。
2. R^2からR^2への関数に関して、方向微分を、方向(a)から微分係数への
 写像と見ると、これはR^2からR^2への線型写像なので2次正方行列
 で表現できること。
3. その行列の各要素は、偏微分になること。
4. R^2からR^2への関数f,gに関して、合成関数g○fの微分は、
 それぞれの微分係数(2次正方行列)の積で表現できること。
5. 多重線型写像について。

などでした。個人的には、2から3への説明が、もうすこし段階的になっている
ほうがよかったと思います(あとから学生に質問されました)。また、4に
ついては、df(x)(a)という記法にあまり慣れていないのと写像の考え方が
まだ自由に頭の中で展開できない能のとで、学生はややつらそうでした(あとで
学生に質問されました)。5はほとんど理解されていたと思いますが、その例
として内積を説明されたとき、「対称性」を多重線型写像の定義のすぐ下
に板書されたため、対称性も多重線形性の定義(必要条件)の一部であると
勘違いした学生が多かったと思います。

ところでさきほど西村先生と電話でご相談しまして、2次正方行列の理論
(対角化・二次形式・ジョルダン標準形・微分方程式との接点など)は
基礎数学に大変有用で具体的な演習課題であるとの点で一致しまして、
長谷川浩司の「線型代数」の第1章を、「数理科学演習」でやることを
検討します。既にリメディアル教材で、2次正方行列の固有値問題や対角化
までは済んでいますし、1学期「物理学」でも2階線型常微分方程式を部分的
に説明していますので、ほとんどの学生は、準備できていると思います。
これを機会に、教科書に沿って丁寧に自習するという訓練ができればいいと
思います。

--
奈佐原　顕郎　(旧姓西田)
筑波大学農林工学系
〒305-8572　つくば市天王台1-1-1