基礎数学　　第2回　　9/8/08

微分

行列とは線形写像の表現

$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$n=m=1$　（高校ではこれしかやらない）

$m=2$（平面）

$m=3$（空間）

$n=1$ でさえあれば m がいくらであっても

$f : \underset{\text{時刻}}{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$

（同時に扱ってると考えればいい）

経済学

- mathematical science

☆ $n \geq 2$

Kock-Lawvere の公理　ともとに微分をつくってる

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

$D = \{d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0\} \neq \{0\}$

$(\forall d \in D)\ (f(d) = f(0) + d\,?)$

任意の　　unique に定まる

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

固定しておく

$x \in \mathbb{R}$

$d \in D \longmapsto f(x+d)$

$f(x+d) = f(x) + d\,?$

$\downarrow$

$f'(x)$　定义における f の微分係数

平面そのもの　例 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$　xを固定　aをうごかす。

$a \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \partial_a f(x) \in \mathbb{R}$　その向きが登りか下りか。

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$f(x+ad)$
$= f(x) + \partial_a f(x) d \longrightarrow \oplus$
どっち向いてるか。

x, $a \in \mathbb{R}^n$ を固定する

足元も固定　ベクトル

fのxにおける
a方向の微分(係数)

xを微分したい

$$d \in D \longmapsto f(x + da) \in \mathbb{R}^m \quad \boxed{\partial_a f(x)}$$

しを決めないといけない　(いった先は)

$$f(x+da) = f(x) + ? d$$

$\cap$
$\mathbb{R}^m$ のベクトル
uniqueに定まる。

proposition
Prop.　命題　~~命題~~

一つの具体的な — を考える。

xを固定
aを動かす

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 固定

$$a \in \mathbb{R}^m \longmapsto \boxed{\partial_a f(x)} \in \mathbb{R}^m$$　線形写像

$\partial f(x)$

を かくにんする。

$$\left[f(x+da) = f(x) + d\,\partial_a f(x) \right]$$　定義

xにおける a方向の微分の定義
このような $\partial_a f(x) \in \mathbb{R}^m$ が一意的に定まる。
1変数のKock-Lawvereの公理からみちびいた。

この写像は、線形写像になる。

$\lambda \in \mathbb{R}$
ラムダ

$\in D$

$$\begin{cases} f(x + d\lambda a) = f(x) + d\,\partial_{\lambda a} f(x) \\ f(x + d\lambda a) = f(x) + d\lambda\,\partial_a f(x) \end{cases}$$

Dのかわりに $d\lambda$ にかわった

$\frac{\partial f}{\partial x}$ 整合性 がないとダメ

$\boxed{\text{結論}}$

$$\partial_{\lambda a} f(x) = \lambda \partial_a f(x)$$　[スカラー倍を保つ]

ということが言えた

何を示したいか？
「$\partial_a f(x)$が、aについて線形写像」
それは つまり

$\partial_{\lambda a} f(x) = \lambda \partial_a f(x)$　… スカラー倍が前に出る

$\partial_{a_1 + a_2} f(x) = \partial_{a_1} f(x) + \partial_{a_2} f(x)$　足し算をバラせる。

ベクトル

a の代わりに $a_1 + a_2$

$$f(x + d(a_1 + a_2)) = f(x) + d\,\partial_{a_1 + a_2} f(x)$$

の関数で微分してやる。

$$f(x + da_1 + da_2) \overset{\because (*)}{=} f(x + da_1) + d\,\partial_{a_2} f(x + da_1)$$

における微分を考える

動かしてあると考えられる

xで微分する

$$= f(x) + d\,\partial_a f(x) + d\{\partial_{a_2} f(x) + d\,\partial_{a_1} (\partial_{a_2} f)(x)\}$$

$$= f(x) + d\,\partial_{a_1} f(x) + d\,\partial_{a_2} f(x)$$

$$= f(x) + d\{\partial_{a_1} f(x) + \partial_{a_2} f(x)\}$$

$\boxed{\text{結論}}$

$$\partial_{a_1 + a_2} f(x) = \partial_{a_1} f(x) + \partial_{a_2} f(x)$$

「足し算を保つ」

といえた。

だから、線形写像といえる

(足算
スカラー倍 を保つ

$$= f(x + da_1) + d\,\partial_{a_2} f(x + da_1)$$

ここに
(*)を保つ

$$= f(x) + d\,\partial_{a_1} f(x) + d\{\partial_{a_2} f(x) + \cancel{d\,\partial_{a_1} (\partial_{a_2} f(x))}\}$$

$$+\ d\,\partial_{a_1} (\partial_{a_2} f)(x)$$

$$= f(x) + d\,\partial_{a_1} f(x)$$
$$+\ d\,\partial_{a_2} f(x) + d^2\,\partial_{a_1} (\partial_{a_2} f)(x)$$

$$\overset{\shortparallel}{0}$$

$$= f(x) + d\{\partial_{a_1} f(x) + \partial_{a_2} f(x)\}$$ ∴スカラー OK!

線形写像は行列で表わせる。

例 $f: R^2 \longrightarrow R^2$　一般の関数

$x \in R^2$　固定

$df(x)$ ⟵ これは線形写像

2×2の行列で表せる。

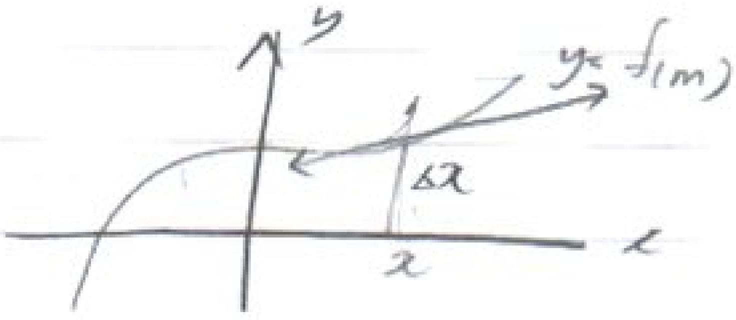
変化割合をもってくる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

例 $f: R^1 \longrightarrow R^1$

微分してやると線形になる。

1×1の行列 ⟶ は数.



$\Delta y = f'(x)\Delta x$

例 $f: R^2 \longrightarrow R$

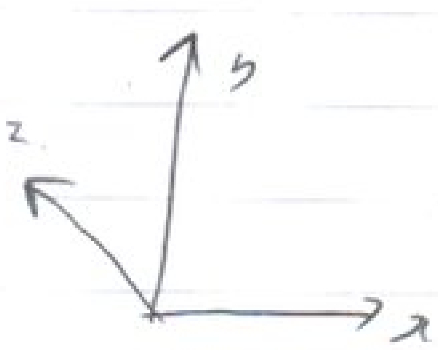
$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}\right)$$

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2$$

じょうすう

平面の式

$y = a_1 x_1 + a_2 x_2$



接平面

微分　行列←線形写像の表現

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$　数理科学 — Mathematical Science

$n = m = 1$ (高校)　$n \geq 2$

$n=1$　$m=2$
時刻　$m=3$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$

Kock-Lawvereの公理

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

$D = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0 \} \neq \{0\}$

$(\forall d \in D) \left(f(d) = f(0) + d\,? \right)$

uniqueに定まる

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$ 固定

$d \in D \mapsto f(x+d)$

$f(x+d) = f(x) + d\,?$

$? = f'(x)$

点xにおける fの 微分係数

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$x, a \in \mathbb{R}^n$ 固定

$d \in D \mapsto f(x + da) \in \mathbb{R}^m$

$f(x + da) = f(x) + ?\, d$

$? \in \mathbb{R}^m$ unique

fの xにおける aの方向の微分係数

$\boxed{\partial_a f(x)}$

Prop. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 固定

xを固定

aを動かす

$$a \in \mathbb{R}^n \longmapsto \partial_a f(x) \in \mathbb{R}^m$$

線形写像

$D = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0 \}$ $(\lambda d)^2 = \lambda^2 d^2 = 0$

$f(x + da) = f(x) + d\,\partial_a f(x)$ 定義

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned} f(x + d\lambda a) &= f(x) + d\,\partial_{\lambda a} f(x) \\ f(x + d\lambda a) &= f(x) + d\lambda\,\partial_a f(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{結論}\quad \partial_{\lambda a} f(x) = \lambda\,\partial_a f(x)$$

Prop. $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 固定

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 整合性

xを固定

aを動かす

$$a \in \mathbb{R}^n \longmapsto \partial_a f(x) \in \mathbb{R}^m$$

線形写像

スカラー倍を保つ

aの代りにa_1+a_2

$d^2=0$

$$f(x+d(a_1+a_2)) = f(x) + d\,\partial_{a_1+a_2} f(x)$$

$$f(\underline{x+da_1}+da_2) = f(\underline{x}+da_1) + d\,\partial_{a_2} f\,(\underline{x+da_1})$$

$$= f(x) + d\,\partial_{a_1} f(x) + d\{\partial_{a_2} f(x) + d\,\partial_{a_1}(\partial_{a_2} f)(x)\}$$

$$= f(x) + d\,\partial_{a_1} f(x) + d\,\partial_{a_2} f(x)$$

$$= f(x) + d\{\partial_{a_1} f(x) + \partial_{a_2} f(x)\}$$

$\Rightarrow$ 結論

$$\partial_{a_1+a_2} f(x) = \partial_{a_1} f(x) + \partial_{a_2} f(x)$$

Prop. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 固定

xを固定

aを動かす

$a \in \mathbb{R}^n \longmapsto \partial_a f(x) \in \mathbb{R}^m$

○ スカラー倍を保つ

○ 足し算を保つ

$\frac{\partial f}{\partial x}$ 整合性

線形写像

線形写像は行列で表わせる

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 一般の関数 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$x \in \mathbb{R}^2$ 固定

$df(x)$ 線形写像 2×2の行列

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$

1×1の行列

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2} \right)$$

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2$$

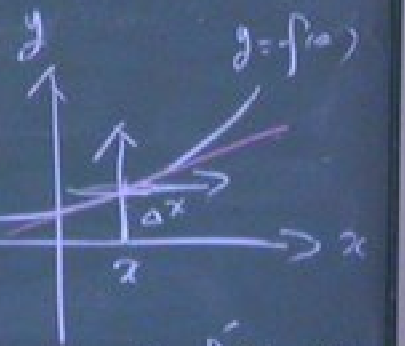
平面の式

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

$y = ax$

接線

数



$\Delta y = f'(x) \Delta x$

接平面

Prop. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 固定 $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial x}$ 整合性

xを固定

aを動かす

$$a\in\mathbb{R}^n \longmapsto \boxed{\partial_a f(x)} \in \mathbb{R}^m$$

線形写像

○ スカラー倍を保つ

○ 足し算を保つ

$$= df(x)(a)$$

fのxにおける微分

12回目

西村先生・みなさま:

昨日(9/08)の3限、「基礎数学」(西村先生)の2学期1回め(通算12回め)を
聴講しました。教室は2B412です。

出席者は、75名(前回は86名)＋教員1名(私)+TA2名(桑田・中井)です。

前回、R^n→R^mの関数について、方向微分が導入されたのを受けて、今回は、
その(多変数関数の)微分(係数)が、方向ベクトル(R^nの元)に関する
線型写像になることが示されました。また、線型写像なので、それは行列
で表せること、および、その行列は関数行列(ヤコビ行列)になることが、
(証明はせずに)R^2やR^3の場合を例に、述べられました。

物理学などで既に偏微分や全微分が出てきていますので、最後に先生が板書
された式が全微分になっているな、ということに気づいた学生もいたようです。

さて、

-「基礎数学補習」が、金曜6限2A203で、始まります。TAは、数学の
大学院生の中井祐さんです。中井さんには、MLに入って頂きました。

--
奈佐原　顕郎　(旧姓西田)
筑波大学農林工学系