Date 2008. 9. 1　「基礎数学」　西村泰一

出席者
86人＋教員1名

ノート：奈佐原顕郎

線形代数

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ 数ではない。

行列 & 行列式

まがりなりにも数。

行列式：~~19~~ 17C 後半　　Hanover の Leibniz
　　　　　　　　　　　日本　の 関孝和

行列はだいぶ後。
19C
　数でないものを考えることへの抵抗。
Cayley - Hamilton

線形空間　→ うけ入れられたのは1930年代
　バナッハ（ポーランド）　解析学のための
　　　　　　　　　　　　無限次元の線形空間

$\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{足し算}\\ \text{スカラー倍}\end{array}\right\}\text{ができる空間。}}$

$\mathbb{R}$　線形空間。　$a+b$　αa　ok.

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$　写像，関数

$y = f(x)$

$y = \sin x$

$y = e^x$

$y = 2x^2 + 3x + 5$　　いろいろある。

この中で、線形な関数は？　（線形写像）

$f(x+y) = f(x) + f(y)$

$f(\alpha x) = \alpha f(x)$

すると、$f(x) = f(x1) = x\underbrace{f(1)}$ aとおく。

$f(x) = ax$　　比例．かんたんな関数

線形というのは、非常に強い制約である。

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$　　線形写像

（「形」と「型」はどちらでもかまわない）

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2) \\ &= f(x_1 \mathbf{e}_1) + f(x_2 \mathbf{e}_2) \\ &= x_1 f(\mathbf{e}_1) + x_2 f(\mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

ここで、

$f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$　とおく。

$f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$　とおく。

$$f(\mathbf{x}) = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

行列とは、線形写像の表現。

$f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$　　線形写像　　$\alpha \in \mathbb{R}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$　と定義
$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$　　と定義
} これらも $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の線形写像

したがって、「$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の線形写像の集合」は線形空間。

ここで、 $f \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A$

$g \longleftrightarrow \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = B$ とする。

$$(f+g)(e_1) = f(e_1) + g(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} \\ a_{21} + b_{21} \end{pmatrix}$$

$$(f+g)(e_2) = \cdots = \cdots = \begin{pmatrix} a_{12} + b_{12} \\ a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

従って、 $f+g \longleftrightarrow A+B$

線形写像の足し算に、行列の足し算が対応する。

同様に、 $\alpha f \longleftrightarrow \alpha A$

$g \circ f$ 合成関数

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

線形写像の合成関数は線形写像。

$$(g \circ f)(e_1) = g(f(e_1)) = g\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}\right) = g(a_{11}e_1 + a_{21}e_2)$$

$$= a_{11}g(e_1) + a_{21}g(e_2)$$

$$= a_{11}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} \\ a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$(g\circ f)(\mathbb{e}_2) = g(f(\mathbb{e}_2)) = g\left(\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}\right)$$

$$= g(a_{12}\mathbb{e}_1 + a_{22}\mathbb{e}_2)$$

$$= a_{12}\, g(\mathbb{e}_1) + a_{22}\, g(\mathbb{e}_2)$$

$$= a_{12}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

$\therefore$

$g\circ f \longleftrightarrow BA$ 行列の積 〜 非可換

↑

これも、行列がなかなかうけいれられなかった理由。

「補習」やってみたい人… 40人くらい。

多変数関数の微分

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$n=1$ の場合 $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

$f_1, \cdots, f_m$
m個の函数を同時に考える。

関でも函でもよい。

Kock-Lawvere の公理

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad D = \{d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0\}$$

$$f(x+d) = f(x) + ?\,d \qquad f: D \to \mathbb{R}$$

$$? \sim f'(x) \qquad f(d) = f(0) + ?\,d$$

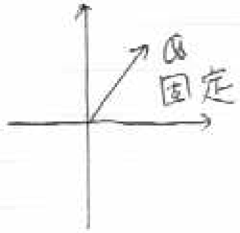
多変数関数 ($n=1$, $m=m$ の場合)

$$f(x+d) = \begin{pmatrix} f_1(x+d) \\ \vdots \\ f_m(x+d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) + f_1'(x)\,d \\ \vdots \\ f_m(x) + f_m'(x)\,d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) \end{pmatrix} = f(x) + f'(x)\,d$$

$n \neq 1$ の場合

$n=2$ の場合



$$f(x + \mathbf{a}d)$$

これを変数 $d \in D$ と思えば、1変数関数 $D \to \mathbb{R}^m$

$f(x+\mathbf{a}d) = f(x) + ?\,d$ の形になる。

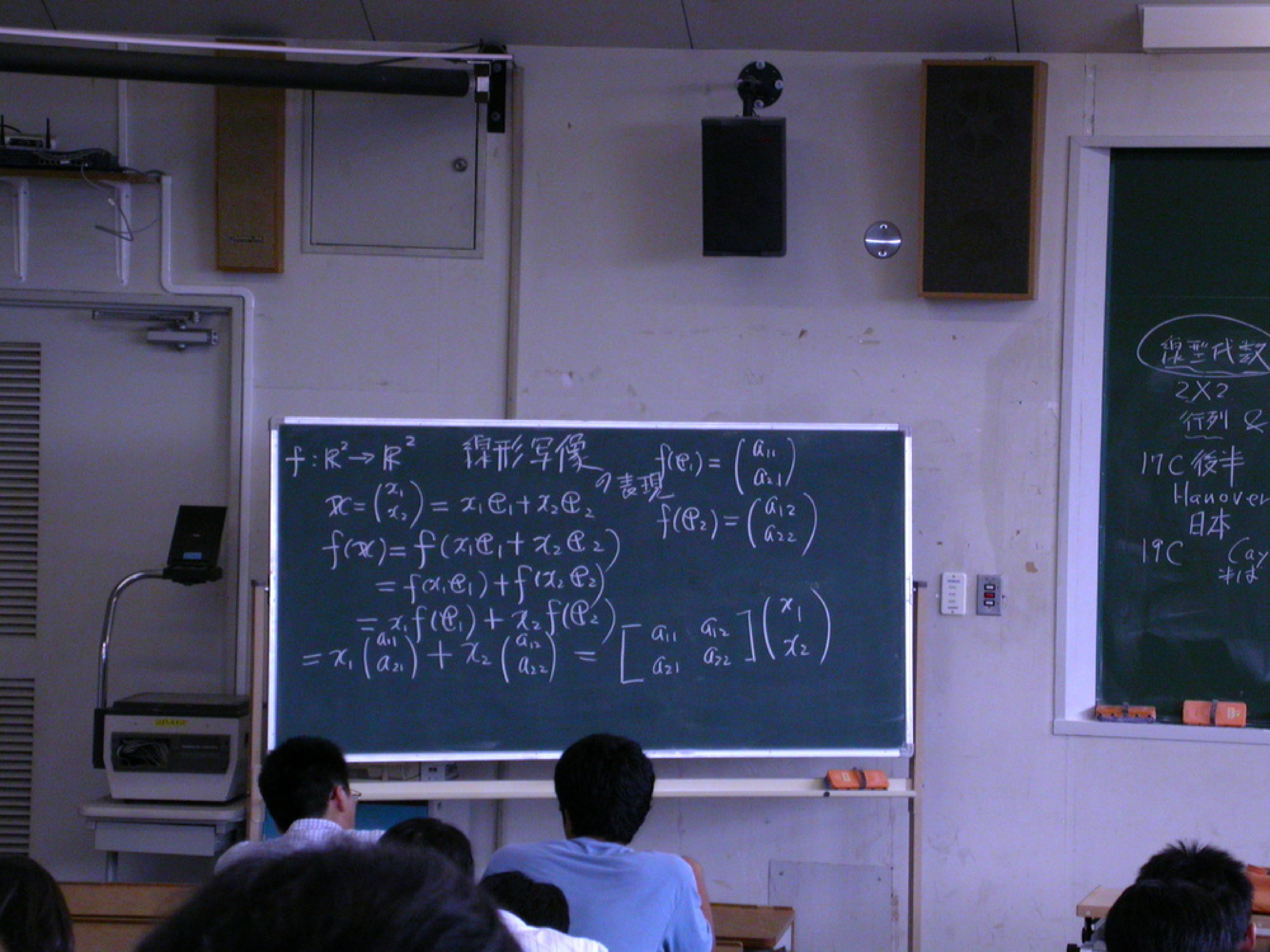
$d=0$

これを、f の x における $\mathbf{a}$ 方向の微分係数

$(\partial_{\mathbf{a}} f)(x)$ とかく。

(おわり)


線型代数
2×2
行列 & 行列式 教科書
数 20C
17C後半
Hanover Leibniz
日本 関孝和
19C Cayley-Hamilton
半ば
線型空間 1930
足し算
スカラー倍
α∈R a+b
αa
R→R 写像
関数
y=f(x)
y=sin x
y=e^x
y=2x^2+3x+5
強い制約
線型写像
f(x+y)=f(x)+f(y)
f(αx)=αf(x)
f(x)=f(x1)=xf(1)
aとおく
f(x)=ax
比例


$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
線形写像の表現
$f(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$
$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2$
$f(e_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$
$f(x) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2)$
$= f(x_1 e_1) + f(x_2 e_2)$
$= x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2)$
$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
線型代数
2X2
行列 &
17C 後半
Hanover
日本
19C

$f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 線形

$\alpha \in \mathbb{R}$

定義
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

$$f \leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A$$
$$g \leftrightarrow \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = B$$

......

$$(f+g)(e_1) = f(e_1) + g(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} \\ a_{21} + b_{21} \end{pmatrix}$$

$$(f+g)(e_2) = \cdots\cdots = \begin{pmatrix} a_{12} + b_{12} \\ a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

$$f + g \leftrightarrow A + B$$
$$\alpha f \leftrightarrow \alpha A$$

線型写像

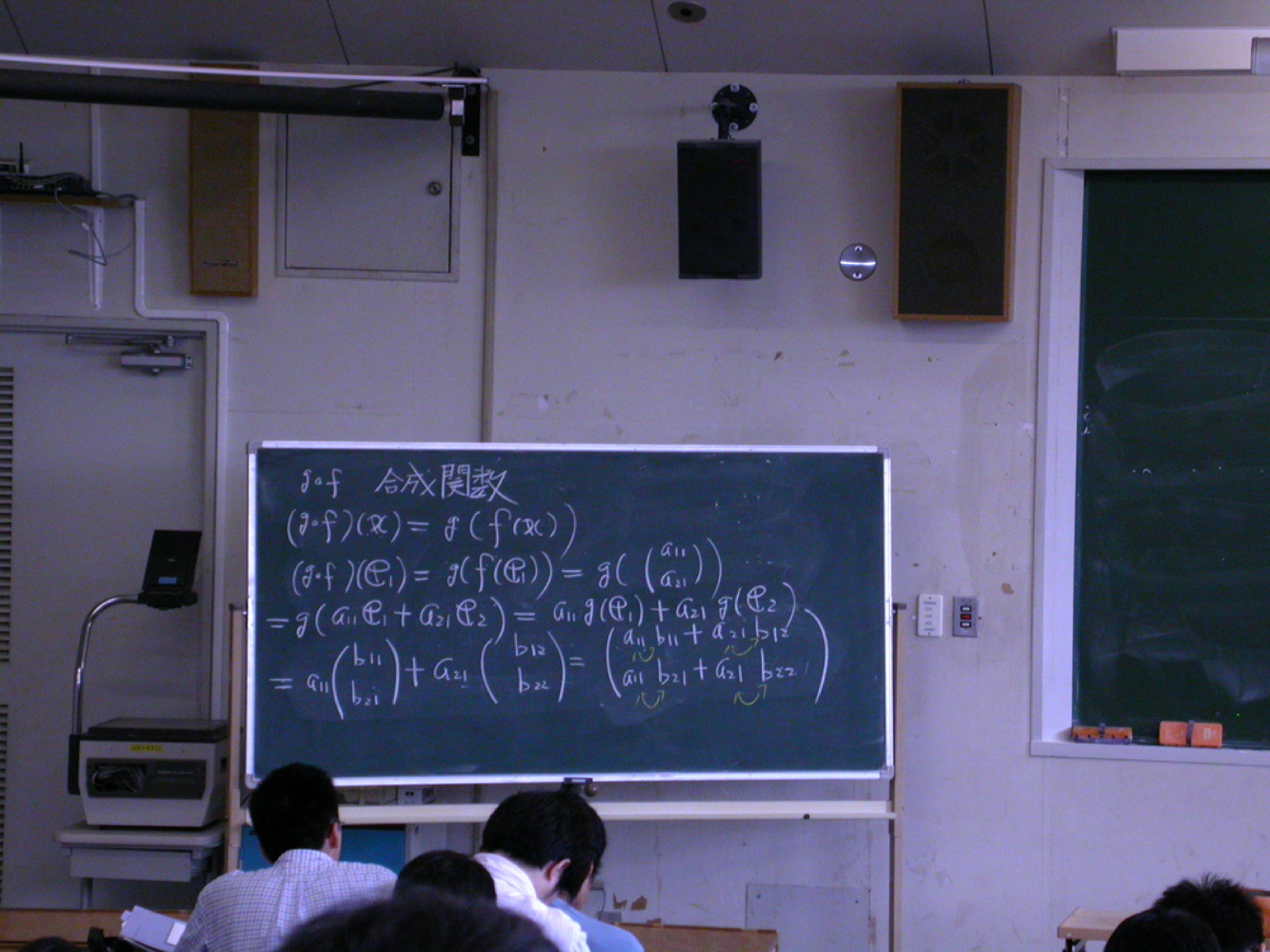
$$\boxed{\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(\alpha x) = \alpha f(x) \end{cases}}$$

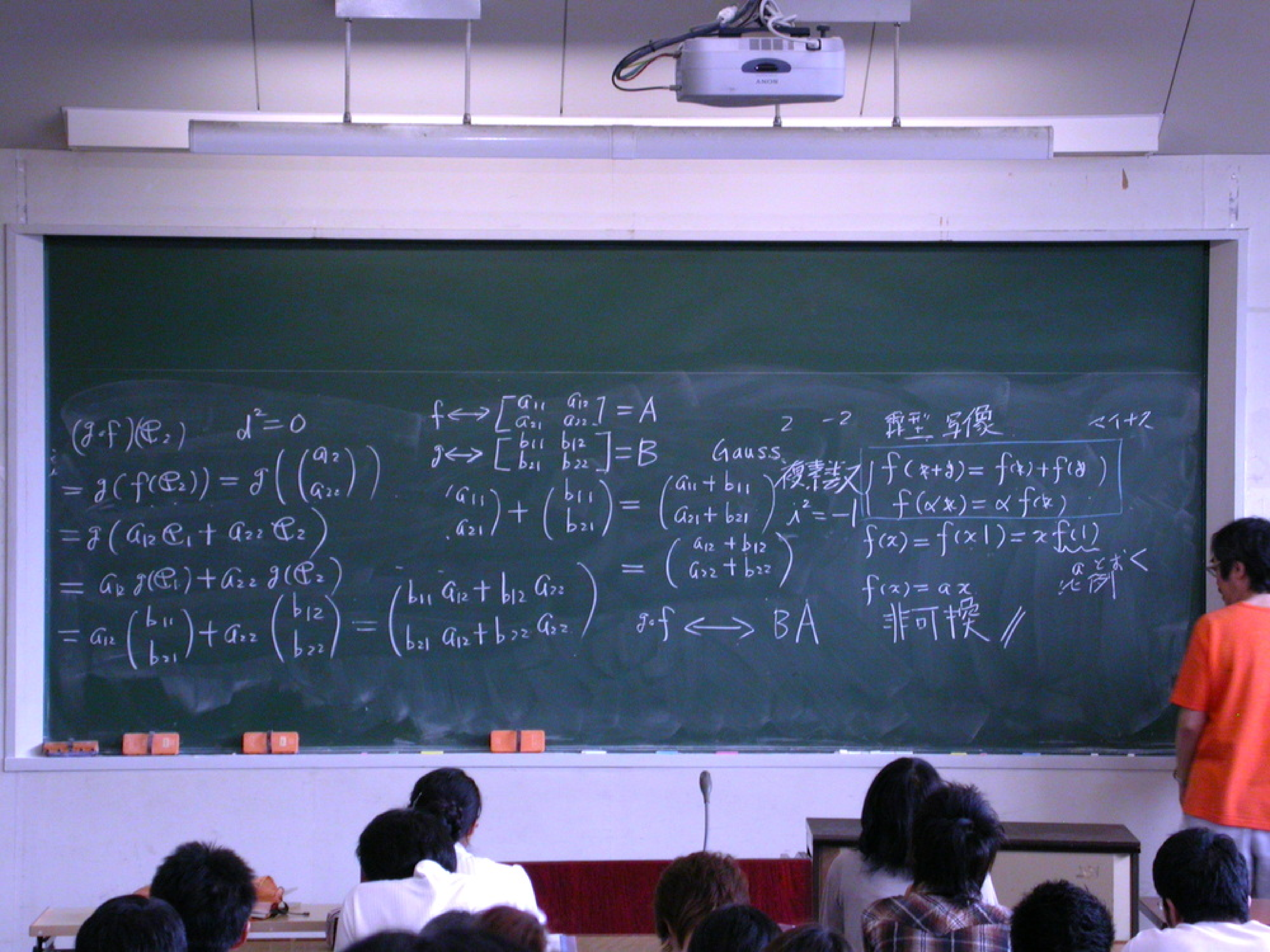
$$f(x) = f(x \cdot 1) = x\, f(1)$$

$f(1)$ を a とおく

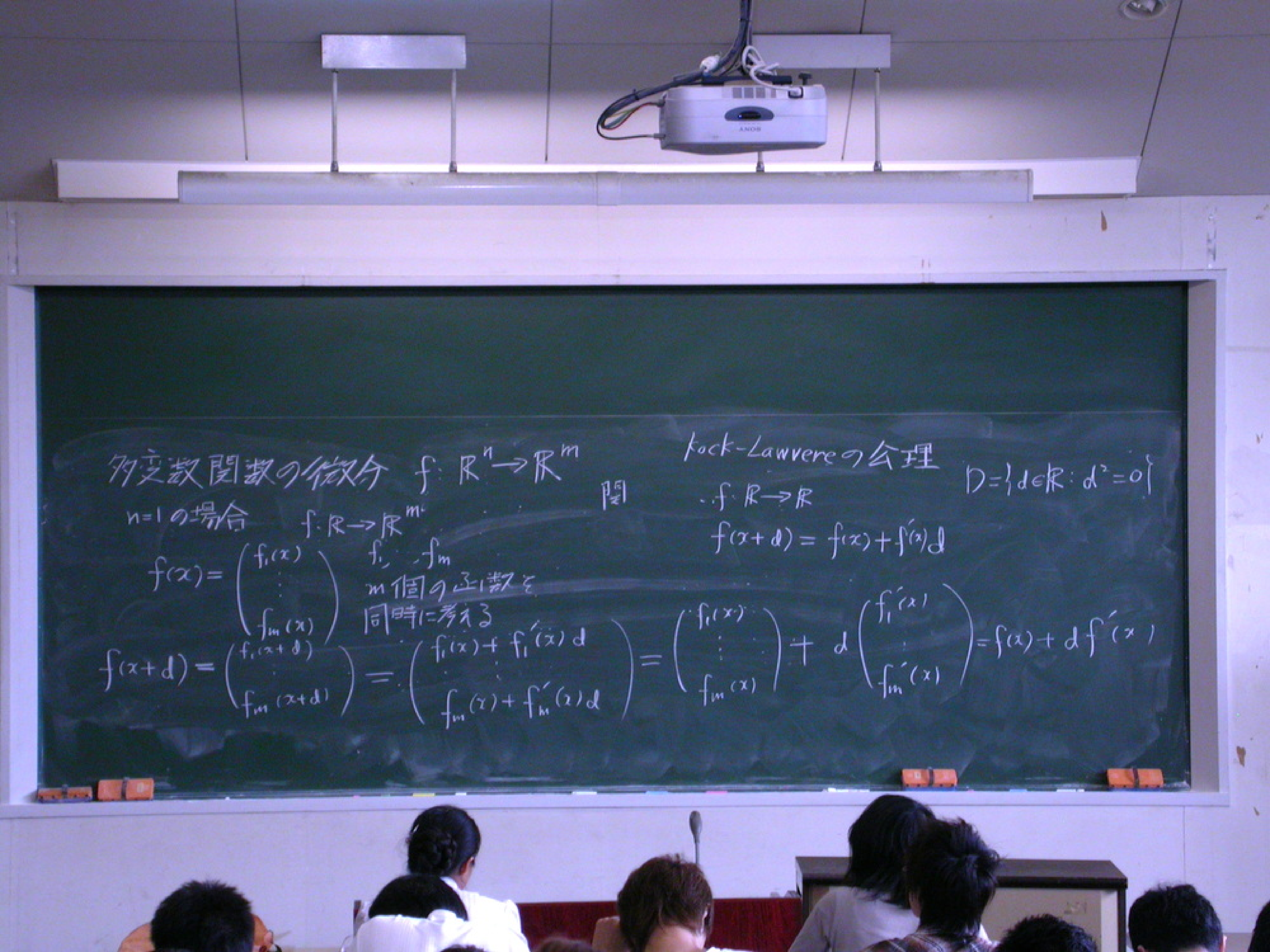
$$f(x) = ax$$

比例

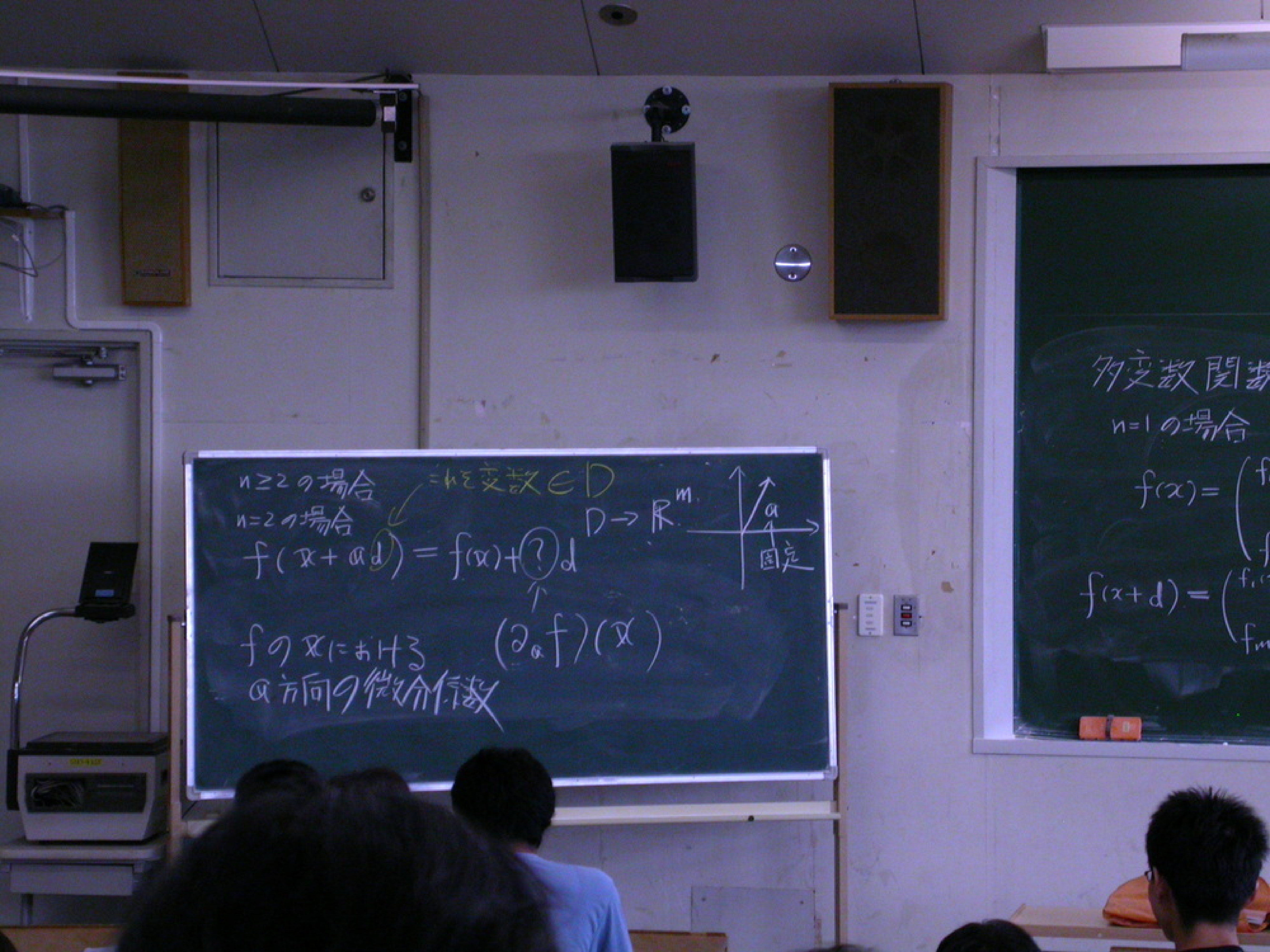

$g \circ f$ 合成関数
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$
$(g \circ f)(e_1) = g(f(e_1)) = g\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}\right)$
$= g(a_{11} e_1 + a_{21} e_2) = a_{11} g(e_1) + a_{21} g(e_2)$
$= a_{11} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} + a_{21} b_{12} \\ a_{11} b_{21} + a_{21} b_{22} \end{pmatrix}$



(g∘f)(e2)
d² = 0
= g(f(e2)) = g((a12, a22))
= g(a12 e1 + a22 e2)
= a12 g(e1) + a22 g(e2)
= a12 (b11, b21) + a22 (b12, b22) = (b11 a12 + b12 a22, b21 a12 + b22 a22)
f ⟷ [a11 a12; a21 a22] = A
g ⟷ [b11 b12; b21 b22] = B
(a11, a21) + (b11, b21) = (a11 + b11, a21 + b21)
= (a12 + b12, a22 + b22)
g∘f ⟷ BA
Gauss
複素数
i² = −1
線型写像
f(x+y) = f(x) + f(y)
f(αx) = α f(x)
f(x) = f(x1) = x f(1)
a とおく
比例
f(x) = ax
非可換



多変数関数の微分 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$n=1$の場合 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$
$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$
$f_1, \dots, f_m$
m個の函数を
同時に考える
$f(x+d) = \begin{pmatrix} f_1(x+d) \\ \vdots \\ f_m(x+d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) + f_1'(x)d \\ \vdots \\ f_m(x) + f_m'(x)d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) \end{pmatrix} = f(x) + d f'(x)$
Kock-Lawvereの公理
$D = \{d \in \mathbb{R} : d^2 = 0\}$
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x+d) = f(x) + f'(x)d$



n≥2 の場合
これを変数 ∈ D
n=2 の場合
D → ℝ^m
f(x + a d) = f(x) + ? d
a
固定
(∂_a f)(x)
f の x における
a 方向の微分係数
多変数関数
n=1 の場合
f(x) =
f(x+d) =

１１回目

昨日（9/01）の3限、「基礎数学」（西村先生）の2学期1回め（通算11回め）を
聴講しました。教室は2B412です。

出席者は、86名＋教員1名（私）です(TAなし)。ちなみに1学期最終回は73名、
昨年度の2学期1回めは「基礎数学」10回め講義の出席者は45名ほどでしたので、
確実に歩留まりは良くなっています。

前半は、1学期後半の復習が中心で、R→RやR2→R2の線型写像を説明し、
線型写像が行列で表現されること。後半は多変数の微分の導入で、まず
Kock Lawvereの公理をR→R^mの関数の微分に拡張し、次に、R^n→R^m
の関数について、方向微分が導入されました。

「基礎数学」のための補習をすることを西村先生が提案されまして、それに
「出てみたい」と手を挙げた学生は40名ほどでした。

授業後に２人の学生が私のところに質問に来ました。今日の授業がわからなかった
とのことだったのですが、例によって、極めて基本的なことがわかっていません。
R^2がR×Rのことであり、×は掛け算ではなくて直積であること、直積とは何か、
写像とは何か、線型空間と線型写像はそれぞれ何で、どう違うのか、なぜベクトル
をe1とe2で分解するのか、などです。

むろん、これらは西村先生は既に説明なさっているのですが、学生はそのような
個々の用語の定義をきちんと把握することの重要性が、まだわかっていないので、
あいまいな理解に終わっています。ノートはきちんととっていても、頭には
入っていません。

線型空間と線型写像を混同することは、数学の理解において論外ですが、それは
学生には容易に発生することであり、その深刻さを学生は認識していません。

「きちんと注意深く丁寧に話を聞き、自分でそれを再構成できるまで考えねば、
数学は何一つわからない」ということがわかっていないと思います。むろん、
西村先生の授業をよく理解する学生も増えていると思います。しかし、根本的な
「数学する姿勢」がわかっていない学生が多いです。

　ちなみに、今日、質問に来た学生は、極めて真面目で積極的な人達です。

--
奈佐原　顕郎　（旧姓西田）
筑波大学農林工学系