基礎数学ノート　　ノート：鈴木

2008/06/13　出席者 80人

数学では

抽象化（公理化）

数の概念

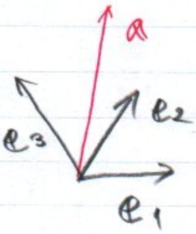
りんご

3個　2個 → 5個

みかん

3個　2個 → 5個

ベクトル空間の大きさ



自由度が2

$a = \lambda e_1 + \mu e_2$

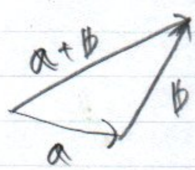
次元

基底の数は一定

$a = \lambda e_1 + \mu e_2 + \eta e_3$　一意的

平面ベクトル

足し算



スカラー倍

λ：実数

$a + b = b + a$

$a + (b + c) = (a + b) + c$

$a + 0 = a$

$(\lambda + \mu) a = \lambda a + \mu a$

$(\lambda\mu) a = \lambda(\mu a)$

$1a = a$

足し算
スカラー倍 が定義され、
上のような法則満たす

ベクトル空間
線形空間

V, W：2つの線形空間

$\varphi : V \to W$　線形写像　線形構造を保つ（足し算, スカラー倍）

$$\boxed{\begin{cases} \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \\ \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x) \end{cases}}$$

が成り立つ（定義）

VからWへの線形写像の全体

… 線形空間

$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$

$(\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x)$

思考実験

線形写像ではない　　3人の人の集合　　対応関係

0でなかったら何でもいい

$a \in \mathbb{R}$（実数の全体）

足し算　　1次元の線形空間

$$\lambda a \qquad a = a\,1$$

基底

写像 = 関数

$W = V = \mathbb{R}$

1というベクトルのスカラー（x）倍

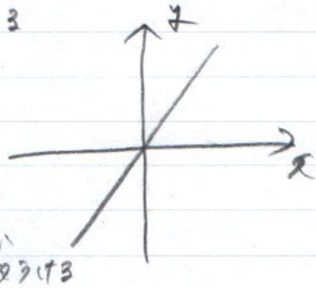
$$\begin{aligned} y &= \varphi(x) \\ &= \varphi(x1) \\ &= x\varphi(1) \end{aligned}$$

数 a

傾き

$y = ax$　　原点を通る直線

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の線形写像



$\cancel{y = x^2}$
$\cancel{y = \sin x}$　線形写像でない　すごい制約うける

傾きを決めれば線形写像が1つ決まる

$$\varphi(x) = ax \qquad \psi(x) = bx$$

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) = ax + bx = (a+b)x$$

$$(\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x) = \lambda a x = (\lambda a)x$$

2次の交代形式

yを固定… $V_1 \to W$
x　〃　　$V_2 \to W$

写像 $V_1 \times V_2 \longrightarrow W$

$\varphi(x, y)$　　二重線形性

$\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$　交代性

$$\varphi(1,1) = -\varphi(1,1)$$
$$2\varphi(1,1) = 0$$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$　　0次元

$$\varphi(x, y) = \varphi(x1, y1)$$
x固定→ $= x\varphi(1, y1)$
y 〃→ $= xy\underbrace{\varphi(1,1)}_{=0}$

No.

Date

$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ 線形写像　　$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$　$e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = xe_1 + ye_2$

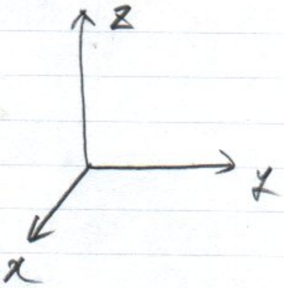
$z = \varphi\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \varphi(xe_1 + ye_2)$

$= x\varphi(e_1) + y\varphi(e_2)$

$\varphi(e_1) = a$
$\varphi(e_2) = b$
とおく

$= ax + by$

原点を通るような平面



$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ 交代形式　　$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} = x_1e_1 + y_1e_2$

$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} = x_2e_1 + y_2e_2$

$\varphi\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)$

$= \varphi(x_1e_1 + y_1e_2, x_2e_1 + y_2e_2)$

$= x_1x_2\underbrace{\varphi(e_1, e_1)}_{=0} + x_1y_2\varphi(e_1, e_2) + y_1x_2\varphi(e_2, e_1) + y_1y_2\underbrace{\varphi(e_2, e_2)}_{=0}$

$= \underline{(x_1y_2 - y_1x_2)}\underbrace{\varphi(e_1, e_2)}_{a\,(\text{定数})}$ ← 行列式という基底関数のスカラー倍

$\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}$

⇓
自由度は 1
⇓
1次元

$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ 線形写像　　3次元

$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$　$e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$　$e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$W = \varphi\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \varphi(xe_1 + ye_2 + ze_3)$

$= x\underbrace{\varphi(e_1)}_{a} + y\underbrace{\varphi(e_2)}_{b} + z\underbrace{\varphi(e_3)}_{c}$

$= ax + by + cz$

1次関数

$\mathbb{x} \to dx$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に関して x を対応させる関数を dx とする

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x \qquad dx$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto y \qquad dy$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto z \qquad dz$

aとbとcをどう決めるか

↓

自由度 3

↓

3次元

$\varphi = a\,dx + b\,dy + c\,dz$

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 交代形式

$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$

$\mathbb{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$

$\varphi(\mathbb{x}, \mathbb{y}) = \varphi(\underbrace{x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3}_{3}, \underbrace{y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3}_{3})$

($3 \times 3 = 9$ 個 $(\varphi(e_1 e_1) = 0, \varphi(e_2 e_2) = 0, \varphi(e_3, e_3) = 0)$

↓

本当は 6個 $\quad \varphi(e_1, e_2)$

$\varphi(e_2, e_1) = -\varphi(e_1, e_2)$)

$= x_1 y_2 \varphi(e_1, e_2) + x_2 y_1 \varphi(e_2, e_1) + x_2 y_3 \varphi(e_2, e_3) + x_3 y_2 \varphi(e_3, e_2) + x_3 y_1 \varphi(e_3, e_1) + x_1 y_3 \varphi(e_1, e_3)$

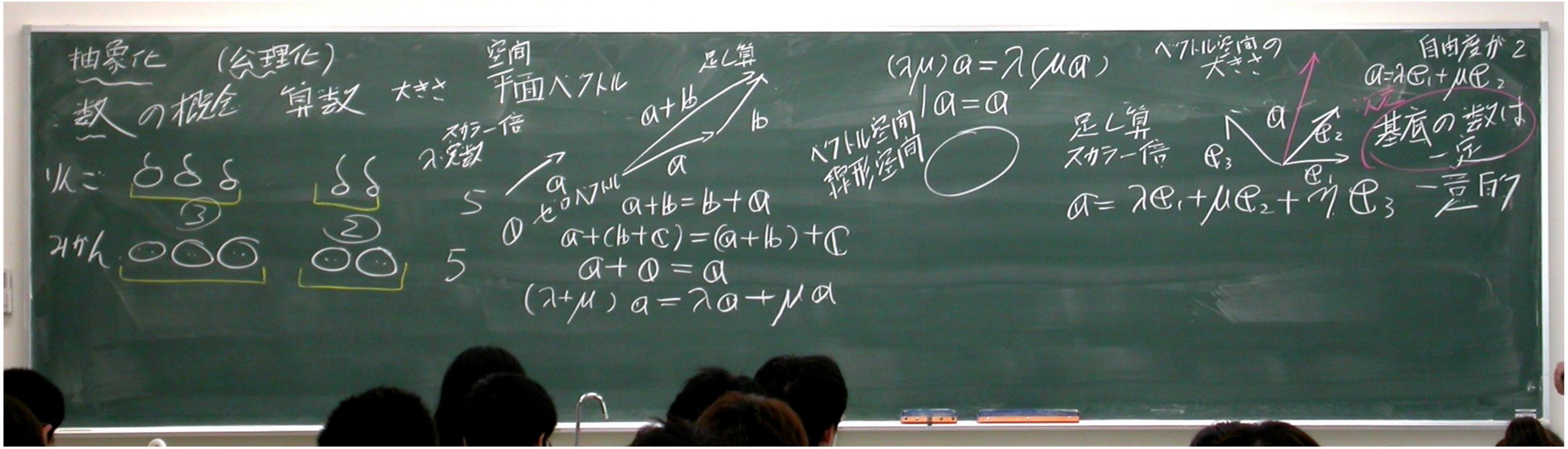
$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$

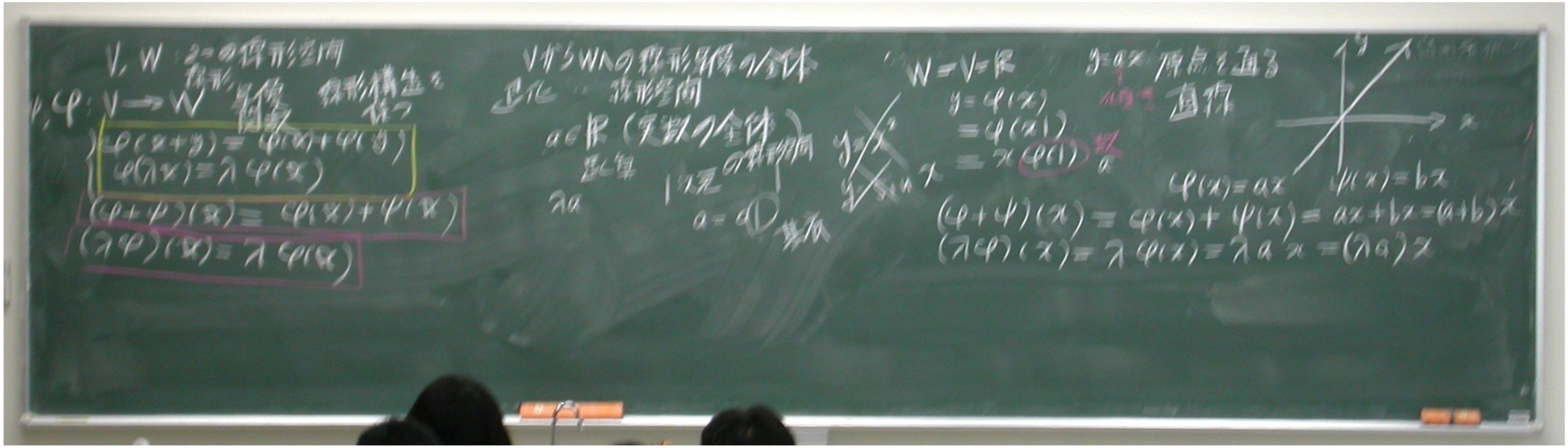
$= (x_1 y_2 - x_2 y_1)\varphi(e_1, e_2)$ a

$+ (x_2 y_3 - x_3 y_2)\varphi(e_2, e_3)$ b $\to$ 3次元

$+ (x_3 y_1 - x_1 y_3)\varphi(e_3, e_1)$ c

$dx(\mathbb{x})dy(\mathbb{y}) - dy(\mathbb{x})dx(\mathbb{y})$


抽象化 (公理化)
数の概念 算数 大きさ
空間
平面ベクトル
足し算
a+b
b
a
スカラー倍
λ:実数
りんご
③
②
みかん
5
0 ゼロベクトル
a+b=b+a
a+(b+c)=(a+b)+c
a+0=a
(λ+μ) a=λa+μa
(λμ) a=λ(μa)
1a=a
ベクトル空間
線形空間
ベクトル空間の大きさ
足し算
スカラー倍
e1 e2 e3
自由度が2
a=λe1+μe2
基底の数は一定
a=λe1+μe2+νe3 一意的


V, W : 2つの線形空間
φ, ψ : V → W 線形写像
φ(x+y) = φ(x) + φ(y)
φ(λx) = λφ(x)
(φ+ψ)(x) = φ(x) + ψ(x)
(λφ)(x) = λφ(x)
VからWへの線形写像の全体
a ∈ ℝ (実数の全体)
W = V = ℝ
y = φ(x)
= φ(x1)
= x φ(1)
原点を通る直線
φ(x) = ax
ψ(x) = bx
(φ+ψ)(x) = φ(x) + ψ(x) = ax + bx = (a+b)x
(λφ)(x) = λφ(x) = λax = (λa)x

2次の交代形式 $\varphi(1,1) = -\varphi(1,1)$

$2\varphi(1,1) = 0$

写像 $V_1 \times V_2 \longrightarrow W$

$\varphi(x, y)$ 二重線形性

$\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$ 交代性

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 0次元 $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ 線形写像

$$\varphi(x, y) = \varphi(x1, y1) = x\varphi(1, y1) = xy\underbrace{\varphi(1,1)}_{= 0}$$

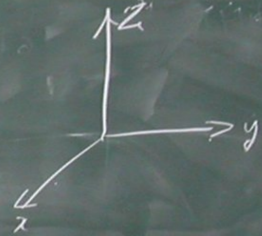
$\varphi(e_1) = a$

$\varphi(e_2) = b$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x e_1 + y e_2$

$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \varphi(x e_1 + y e_2) = x\varphi(e_1) + y\varphi(e_2) = ax + by$$



$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ 交代形式

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1次元

$$\left| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right|$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + y_1 e_2$

$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_2 e_1 + y_2 e_2$

$$= \varphi(x_1 e_1 + y_1 e_2, x_2 e_1 + y_2 e_2)$$

$$= x_1 x_2 \underbrace{\varphi(e_1, e_1)}_{0} + x_1 y_2 \varphi(e_1, e_2)$$

$$+ y_1 x_2 \varphi(e_2, e_1) + y_1 y_2 \underbrace{\varphi(e_2, e_2)}_{0}$$

$$= (x_1 y_2 - y_1 x_2) \underbrace{\varphi(e_1, e_2)}_{a(\text{定数})}$$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ 線形写像 3次元

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$w = \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \varphi(x e_1 + y e_2 + z e_3)$$

$$= x \underbrace{\varphi(e_1)}_{a} + y \underbrace{\varphi(e_2)}_{b} + z \underbrace{\varphi(e_3)}_{c}$$

$$= ax + by + cz$$ 1次関数

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto x$ dx

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto y$ dy

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto z$ dz

$\varphi = a\,dx + b\,dy + c\,dz$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 交代形式

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ $3 \times 3 = 9$ 本当は6

$\varphi(e_1, e_1) = 0$

$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ $= y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$

$\varphi(x, y) = \varphi(\underbrace{x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3}, \underbrace{y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3})$

$= x_1 y_2 \varphi(e_1, e_2) + x_2 y_1 \varphi(e_2, e_1)$

$+ x_2 y_3 \varphi(e_2, e_3) + x_3 y_2 \varphi(e_3, e_2)$

3次元

$\varphi(e_1, e_2)$

$\varphi(e_2, e_1) = -\varphi(e_1, e_2)$

$= x_3 y_1 \varphi(e_3, e_1) + x_1 y_3 \varphi(e_1, e_3)$

$= \boxed{(x_1 y_2 - x_2 y_1)} \varphi(\underline{e_1, e_2})$ a

$+ (x_2 y_3 - x_3 y_2) \varphi(\underline{e_2, e_3})$ b

$+ (x_3 y_1 - x_1 y_3) \varphi(\underline{e_3, e_1})$

c

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$dx(x)\, dy(y)$

$- dy(x)\, dx(y)$

10回目

西村先生・みなさま:

昨日(6/20)の4限、「基礎数学」(西村先生)の10回めを聴講しました。
出席者は、73名＋TA1名(桑田)＋教員1名(私)です。ちなみに昨年度の
「基礎数学」10回め講義の出席者は40名でした。

前半は、前々回・前回の復習が中心でした。RやR2やR3からRへの線形写像と
交代形式に関する説明があり、また、それぞれの基底を調べて次元を確認しました。

また、R2と「R2からRへの線形写像の集合」を同一視するという話などで、
同一視という考え方が説明されました。最後に、微分形式とベクトル解析の
つながりについて、図式的に説明されました。

レポート課題が3つ出ました(しめきりは6/30):

I)R2×R2×R2からRへの交代形式(3次の交代形式)はゼロ次元であることを示せ。

II)R3×R3×R3からRへの交代形式(3次の交代形式)は1次元であり、3次行列式
のスカラー倍であること(3次行列式が基底になること)を示せ。

III)R3の2つのベクトルをそれぞれR3からRへの線形写像と同一視し、それを
wedge productによって交代形式にして、さらにdx^dyをe3, dy^dzをe1、
dz^dxをe2のように置き換えることでR3のベクトルに同一視すれば、
ベクトル積があらわれることを示せ。

です。最後に、学類で行っている、学期末の授業アンケートをとりました。

授業後に2人の学生から質問を受けました。彼女達は、交代形式より以前に、

- 集合とは何か
- R2とは何か
- R2×R2というときの×の意味は何か
- 直積とは何か
- 写像とは何か
- 線形空間とは何か
- 線形写像とは何か

がわかっていませんでした。

　私は西村先生の講義はとても明解な数学を扱っておられると思います。それを
生物資源学類の1年生の学生にわからせることもできるはずだと思います。
しかしながら、現状は、ほとんどの1年生は授業を理解できていないと思います。
それは、何回も書きますが、多くの学生が、極めて基本的な言葉の定義や公理を
理解していないからです。ここをケアしないと、いくら同じ説明をしてもダメ
だと思います。

　質問に来た学生に集合とは何か、とか写像とは何か、とたずねたら、「そんな
こと考えたこともない」という顔をしたあと、ぽつりぽつりとまとはずれなこと

を言います。「集合とはもののあつまりである」「写像とは集合から集合への要素の対応関係である」と教えたら、なんだそういうことかという顔をしますがすぐ忘れます。しばらくあとに「集合とは何か」と再度たずねたら、またまとはずれなことを言います。言葉の意味や定義を勝手に抽象的に拡大解釈し、漠然とした形に変換して頭にしまいこむのです。言葉の単純な定義が、どれだけ数学の基礎として、普遍的でシリアスで重要なのかを、理解していません。

線形空間や線形写像について、西村先生は、確かに、何回も授業で教えましたが、それは学生にほとんど残っていません。ひとつひとつの言葉の定義が積み重なって階段を登るように数学が構築されるのだということが、ほんとうに、わかっていないのです。私は線形写像を学生に教えるときは、「まずその２つの式を10回づつ書いて記憶しなさい。その式を何も見ないで書けるようになったら、線形写像の例と線形写像でない例を考えてみなさい」と言います。それでどの学生も線形写像を理解します。

学生は、根本的に、まだ数学を学ぶことがどういうことか、わかっていません。サッカーの試合にバットとグローブを持ってきている人たちのようです。あまりにもすれ違っています。

西村先生の明解で美しい数学が、その入り口の段差を越えられぬ学生には、難解で恐ろしいものと思われてしまうとしたら、それは極めて残念なことだと思います。

--
奈佐原　顕郎 （旧姓西田）
筑波大学農林工学系