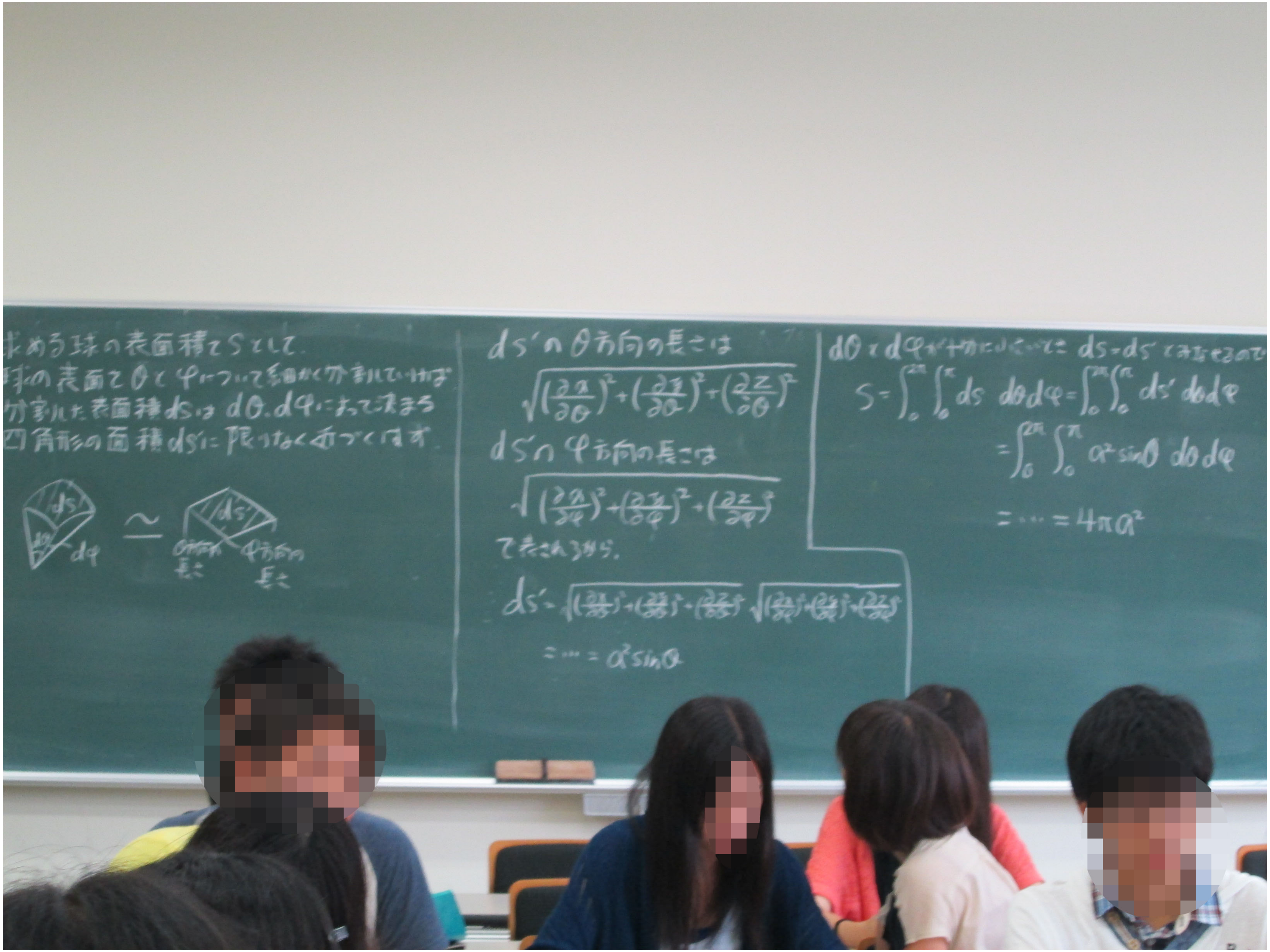
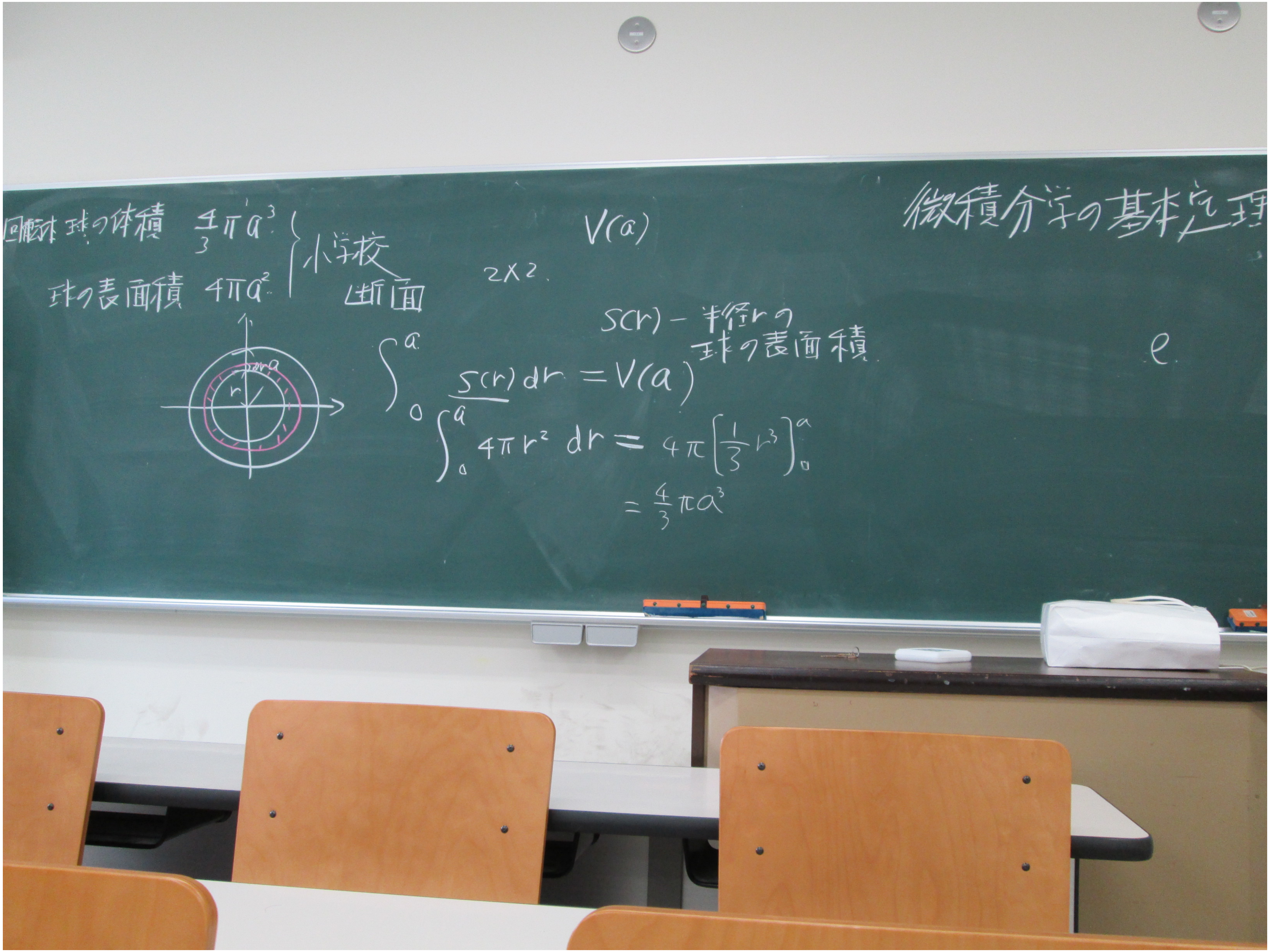
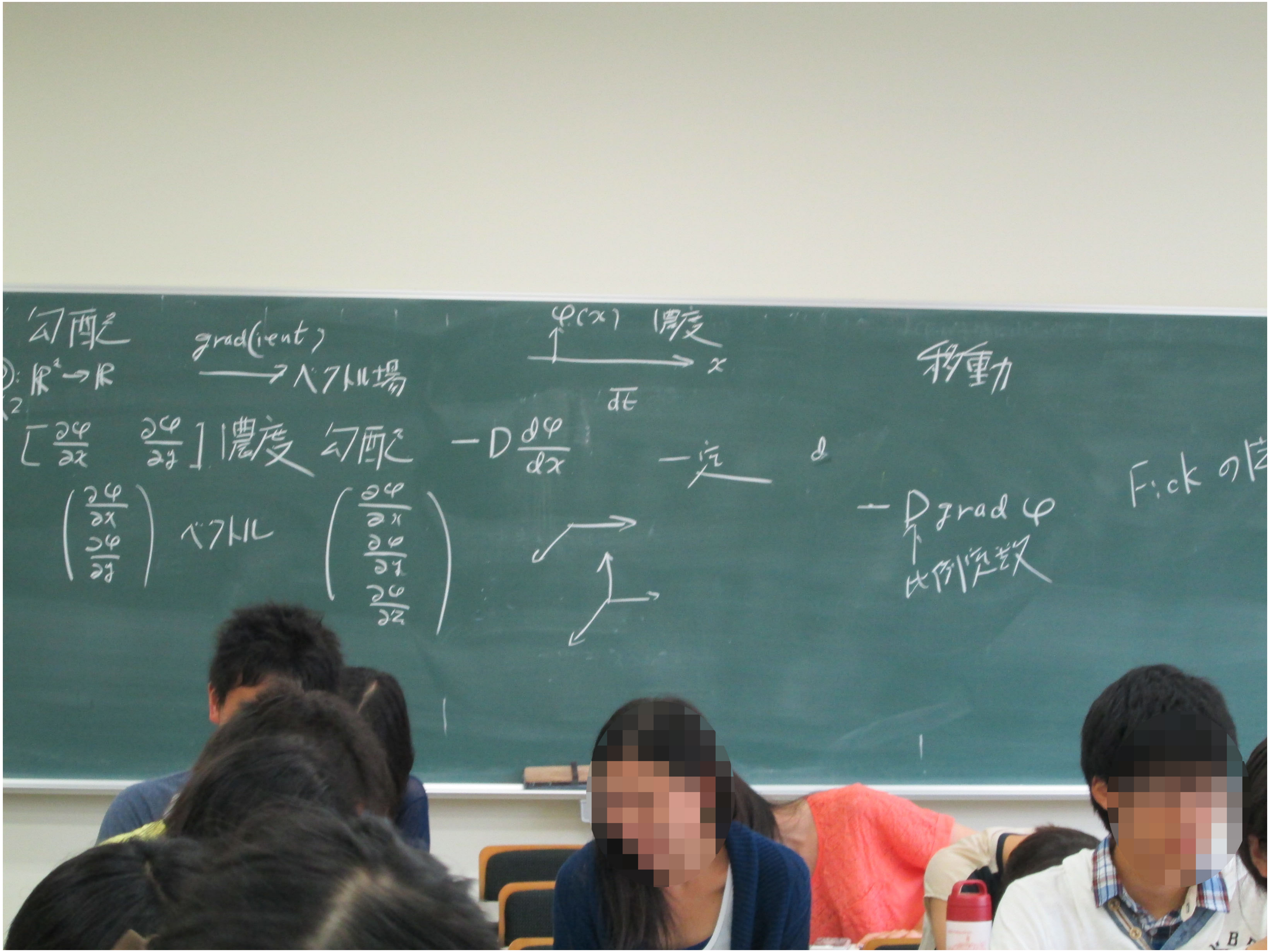
$x = a\sin\theta\cos\varphi$
$y = a\sin\theta\sin\varphi$
$z = a\cos\theta$
とする
$\frac{\partial x}{\partial\theta} = a\cos\theta\cos\varphi$
$\frac{\partial y}{\partial\theta} = a\cos\theta\sin\varphi$
$\frac{\partial z}{\partial\theta} = -a\sin\theta$
$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = -a\sin\theta\sin\varphi$
$\frac{\partial y}{\partial\varphi} = a\sin\theta\cos\varphi$
$\frac{\partial z}{\partial\varphi} = 0$
よって $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial\theta} \\ \frac{\partial z}{\partial\theta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial\varphi} \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} a^2\sin^2\theta\cos\varphi \\ a^2\sin^2\theta\sin\varphi \\ a^2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}$
$A = \begin{pmatrix} a^2\sin^2\theta\cos\varphi \\ a^2\sin^2\theta\sin\varphi \\ a^2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}$ とおくと
$A^2 = a^4\sin^4\theta\cos^2\varphi + a^4\sin^4\theta\sin^2\varphi + a^4\sin^2\theta\cos^2\theta$
$= a^4\sin^4\theta + a^4\sin^2\theta\cos^2\theta$
$= a^4\sin^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$
$= a^4\sin^2\theta$
$\therefore A = a^2\sin\theta$
ここで $\int_0^{\pi} a^2\sin\theta\, d\theta = \left[-a^2\cos\theta\right]_0^{\pi} = 2a^2$
$\int_0^{2\pi} 2a^2\, d\varphi = \left[2a^2\varphi\right]_0^{2\pi} = 4\pi a^2$
以上より 球の表面積は $4\pi a^2$



求める球の表面積をSとして、
球の表面をθとφについて細かく分割していけば
分割した表面積dsはdθ, dφによって決まる
四角形の面積ds'に限りなく近づくはず
ds
dφ
≃
ds'
θ方向の長さ
φ方向の長さ
ds'のθ方向の長さは
$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}$
ds'のφ方向の長さは
$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}$
で表されるから、
$ds'=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}$
$=\cdots=a^2\sin\theta$
dθとdφが十分に小さいとき ds=ds' とみなせるので
$S=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} ds\, d\theta d\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} ds'\, d\theta d\varphi$
$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin\theta\, d\theta d\varphi$
$=\cdots=4\pi a^2$



回転体 球の体積 $\frac{4}{3}\pi a^3$
小学校
球の表面積 $4\pi a^2$
断面
V(a)
2×2
微積分学の基本定理
S(r) − 半径rの球の表面積
e
$\int_0^a S(r)\,dr = V(a)$
$\int_0^a 4\pi r^2\,dr = 4\pi\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^a$
$= \frac{4}{3}\pi a^3$


勾配
grad(ient)
ベクトル場
φ(x) 濃度
x
移動
dt
濃度 勾配
−D dφ/dx
一定
Fick の
ベクトル
−D grad φ
比例定数

微積分

No.

DATE .7 .24

$$\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi & 0 \le \theta \le \pi \\ y = a\sin\theta\sin\varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = a\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial\theta} \\ \frac{\partial z}{\partial\theta} \end{pmatrix} d\theta \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial\varphi} \end{pmatrix} d\varphi$$

ベクトル積

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial\theta} \\ \frac{\partial z}{\partial\theta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial\varphi} \end{pmatrix} \right| d\theta\, d\varphi$$

7/24

$\frac{\partial x}{\partial\theta} = a\cos\theta\cos\varphi$

$\frac{\partial y}{\partial\theta} = a\cos\theta\sin\varphi$

$\frac{\partial z}{\partial\theta} = -a\sin\theta$

$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = -a\sin\theta\sin\varphi$

$\frac{\partial y}{\partial\varphi} = a\sin\theta\cos\varphi$

$\frac{\partial z}{\partial\varphi} = 0$

よって

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial\theta} \\ \frac{\partial z}{\partial\theta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2\sin^2\theta\cos\varphi \\ a^2\sin^2\theta\sin\varphi \\ a^2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$|A| = \sqrt{a^4\sin^4\theta\cos^2\varphi + a^4\sin^4\theta\sin^2\varphi + a^4\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{a^4\sin^4\theta + a^4\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

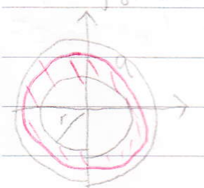
$$= \sqrt{a^4\sin^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)} = a^2\sin\theta$$

よって

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-a^2\cos\theta\right]_0^{\pi} d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} 2a^2\, d\varphi = \left[2a^2\varphi\right]_0^{2\pi} = 4\pi a^2$$



$S(r)$：半径 r の球の表面積

$V(r)$：〃 の体積

$$\int_0^a S(r)\,dr = V(a)$$

$$\int_0^a 4\pi r^2\,dr = 4\pi\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^a$$

$$= \frac{4}{3}\pi a^3$$

スカラー場　grad

勾配　$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ → ベクトル場

1×2　$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]$

$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{pmatrix}$ ベクトル

一次元

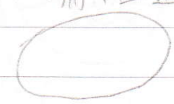
濃度勾配　$-D\frac{\partial\varphi}{\partial x}$　D：比例定数

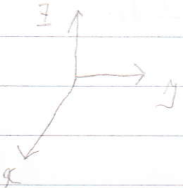
$-D\,\mathrm{grad}\,\varphi$

Fickの法則

面積分　ベクトル場，曲面 Σ

$\int_\Sigma \mathbb{F}\cdot dS$





ベクトル場

$\mathbb{F} : (x, y, z) \longmapsto (x, y, z)$

上半分

線積分

曲積　$\mathbb{F} : (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ y \\ xyz \end{pmatrix}$

点　ベクトル

保存力

錬金術

永久機関

$a^2 + a^2$

外書

No.

DATE 7 . 29 .

$|I_3| \leq \frac{R^{p+1}}{R^2-1} 2\pi \to 0 \quad (R \to \infty)$

$(0 < p+1 < 2)$ より

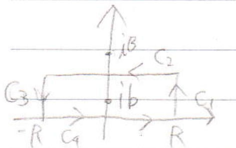
$|I_4| \leq \frac{\varepsilon^{p-1}}{1-\varepsilon^2} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$

よって

$$\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (p=0) \\ \frac{\pi}{2} \sec \frac{p}{2}\pi & (p \neq 0) \end{cases}$$

7.8 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+b^2} dx$ を求める。

$\frac{z e^{iaz}}{z^2+b^2}$ について考えると $z = \pm ib$ を除いて正則



$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$

留数定理より

$$\int_C \frac{z e^{iaz}}{z^2+b^2} dz = \cdots = i\pi e^{-ab}$$

ここで $|z| > \sqrt{2} b$ のとき

$$\left|\frac{z e^{iaz}}{z^2+b^2}\right| \leq \frac{|z| e^{ia}}{|z|^2-b^2} < \frac{|z| e^{ia}}{|z|^2 - \frac{1}{2}|z|^2} = 2\frac{e^{ia}}{|z|}$$

よって $\left|\int_{C_1} \frac{z e^{iaz}}{z^2+b^2} dz\right| < \left|\int_{C_1} \frac{2e^{ia}}{|z|} dz\right|$

$$= \left| i \int_0^B \frac{2e^{ia}}{|R+t|} dt \right|$$

$$< \left| i \int_0^B \frac{2e^{it}}{R} dt \right|$$

$$= \left| \frac{2i}{R} \left[-\frac{1}{a} e^{-at} \right]_0^B \right| = \frac{2(1-e^{-aB})}{aR} < \frac{2}{aR}$$

C_3 についても同様に $\left|\int_{C_3} \frac{2e^{iaz}}{z^2+b^2}\right| < \frac{2}{aR}$

C_2 について

$$\left|\int_{C_2} \frac{z e^{iaz}}{z^2+b^2} dz\right| < \frac{4\pi e^{aiB}}{B}$$

よって

$$\left|\int_{C_4} \frac{z e^{iaz}}{z^2+b^2} dz - \pi i e^{ia}\right| < \frac{4}{aR} + \frac{4Re^{iaB}}{B}$$

したがって $B \to \infty$ の後 $R \to \infty$ とすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{x^2+b^2} dx = \pi i e^{-ab}$$

両辺の虚部を見れば

与式 $= \pi e^{-ab}$