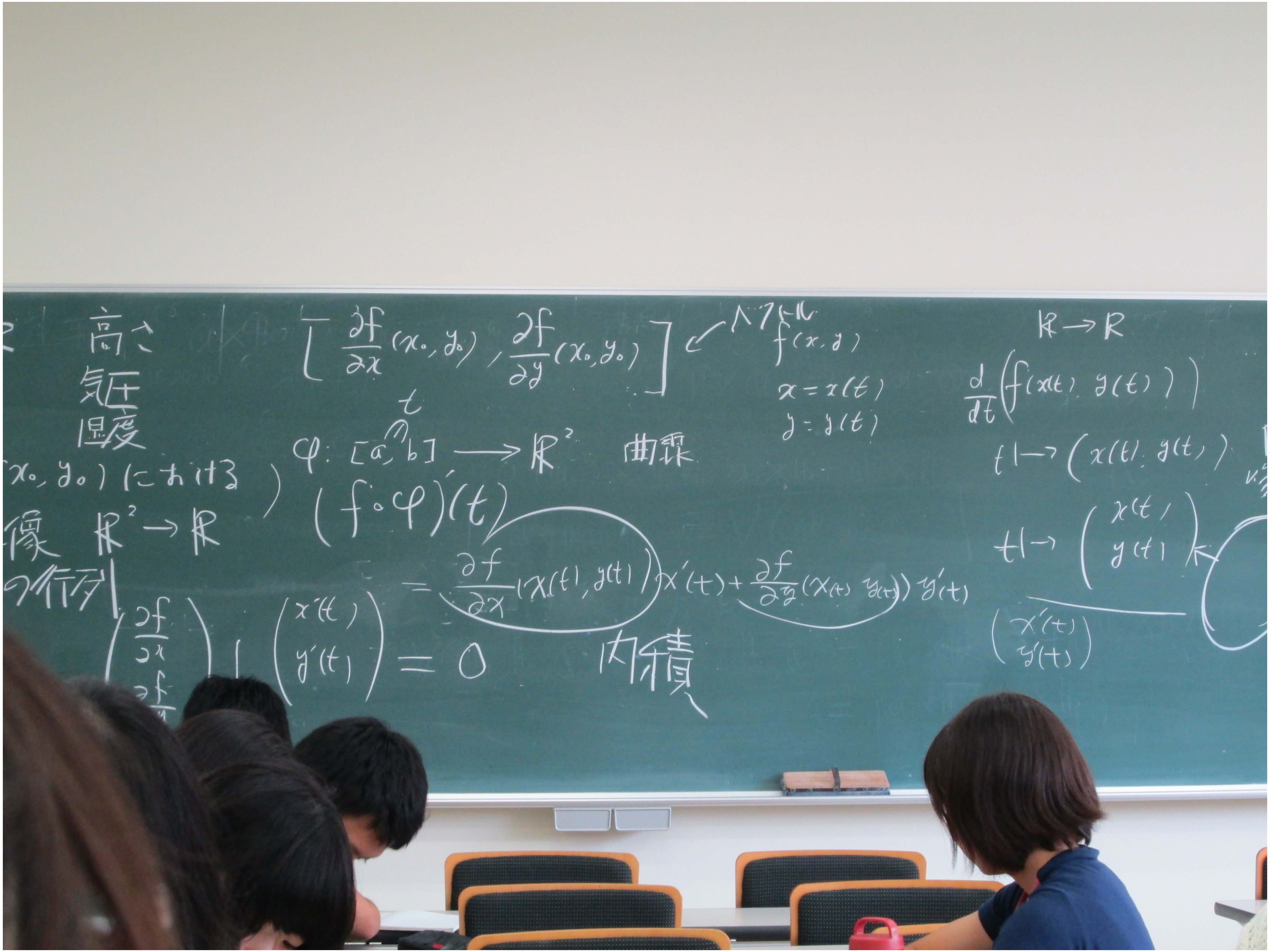
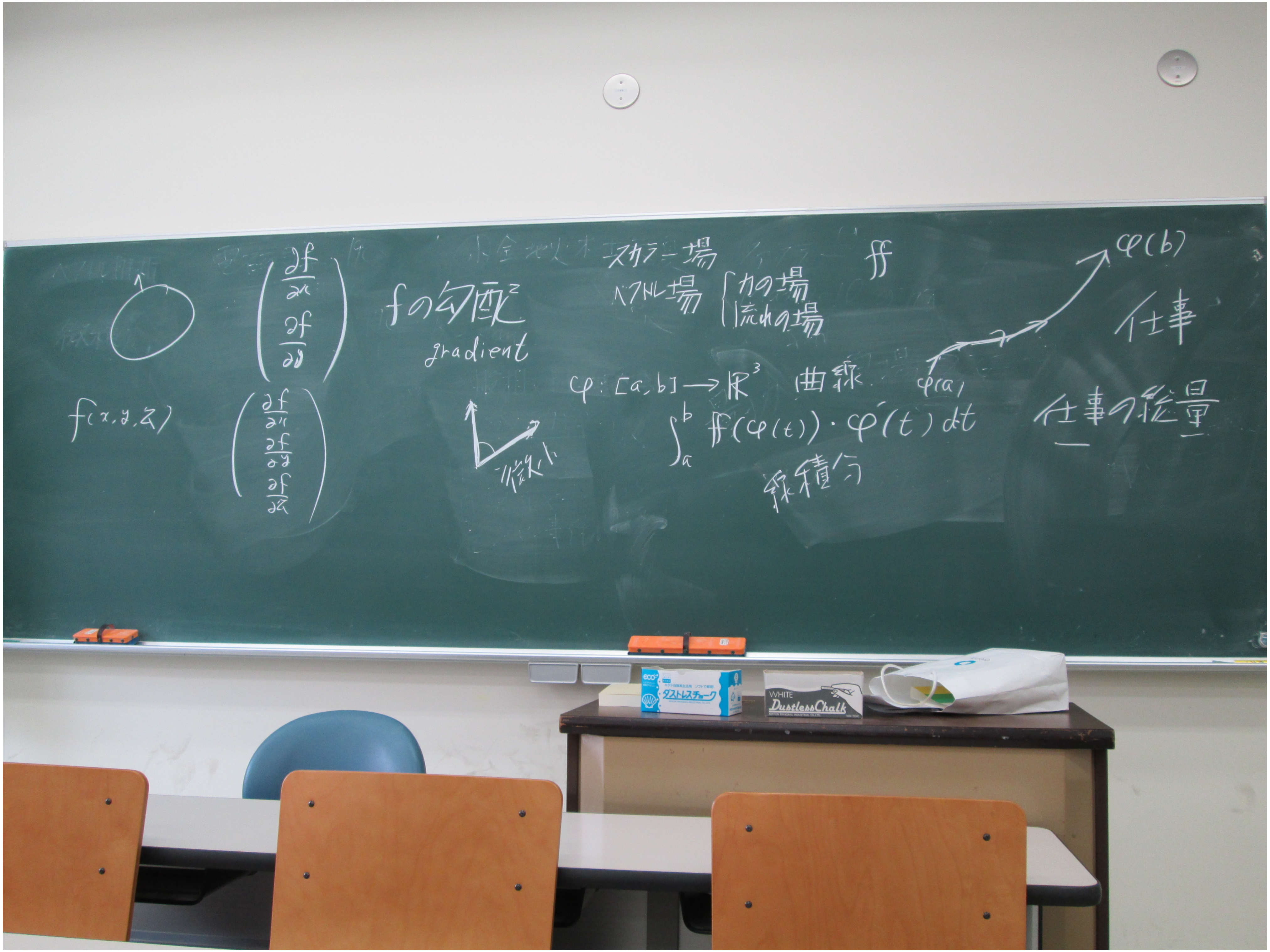
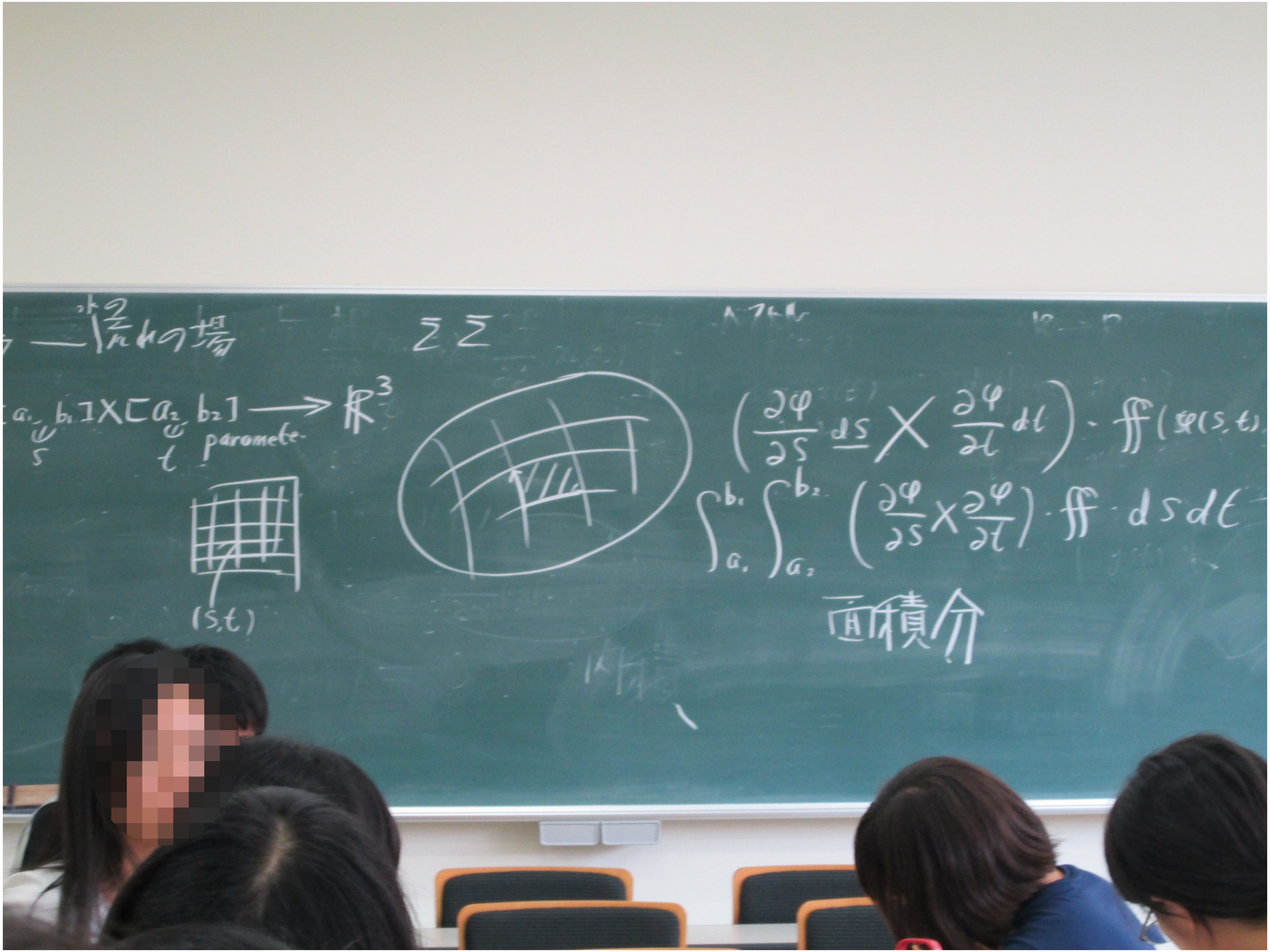

ベクトル解析
電磁気学 19C
紀元前5C
水金地火木土天冥
ファラデー
Maxwellの方程式
19C半ば
光
微積分学 ⇒ 力学
万有引力の法則
17C
Newton
Balkan星
化学者
電場 ⇒ 磁場
波
dark matter
天体
一般相対性理論
成功体験
日本軍
日露戦争 1904
ノモンハン事件 1939
線
ワトソン クリック
可視光

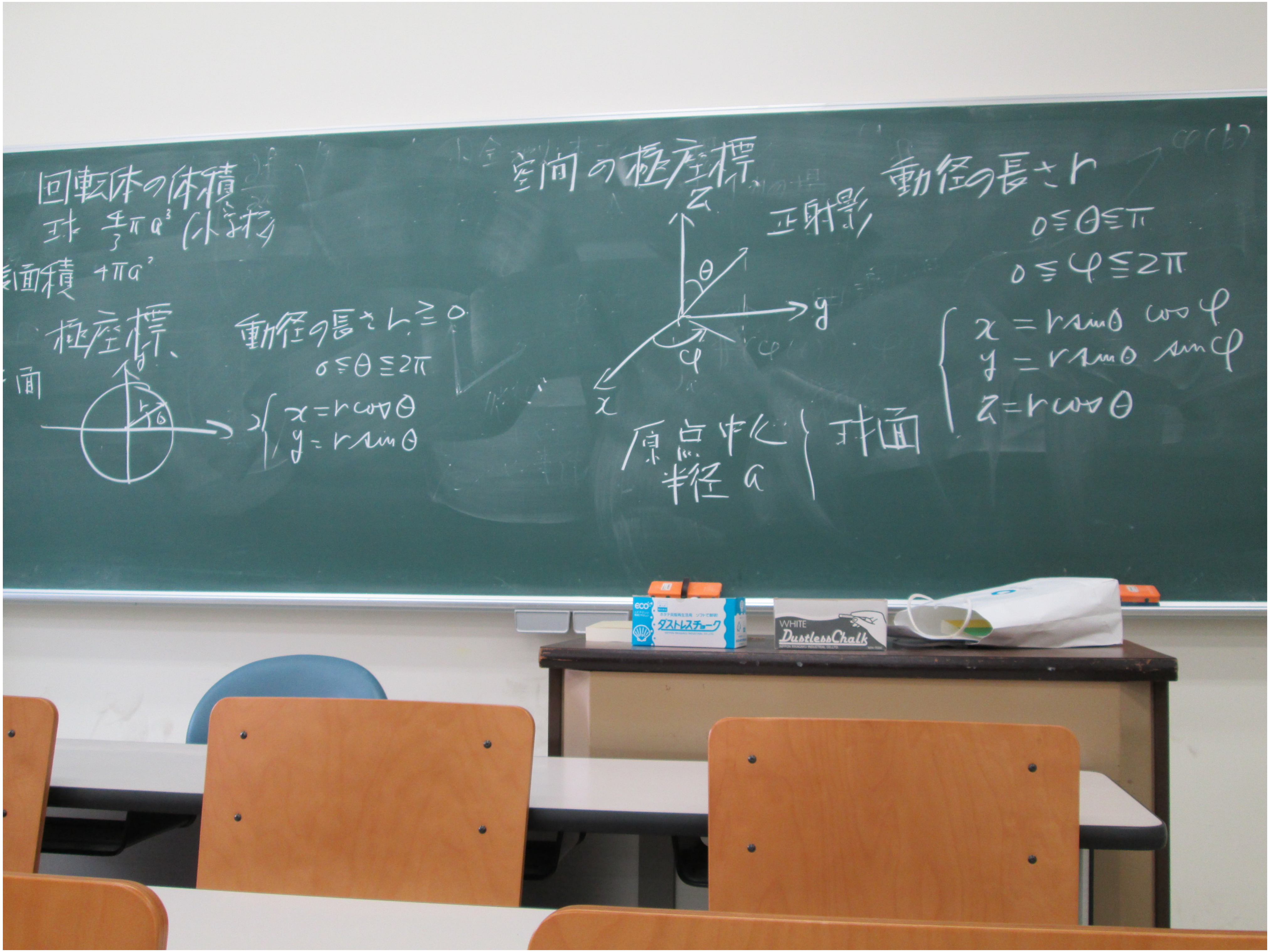

高さ
気圧
湿度
(x_0, y_0) における
像 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
の行列
$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right]$
ベクトル
$f(x, y)$
$x = x(t)$
$y = y(t)$
$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$
曲線
$(f \circ \varphi)'(t)$
$= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t)$
$= 0$
内積
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\frac{d}{dt}(f(x(t), y(t)))$
$t \mapsto (x(t), y(t))$
$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$



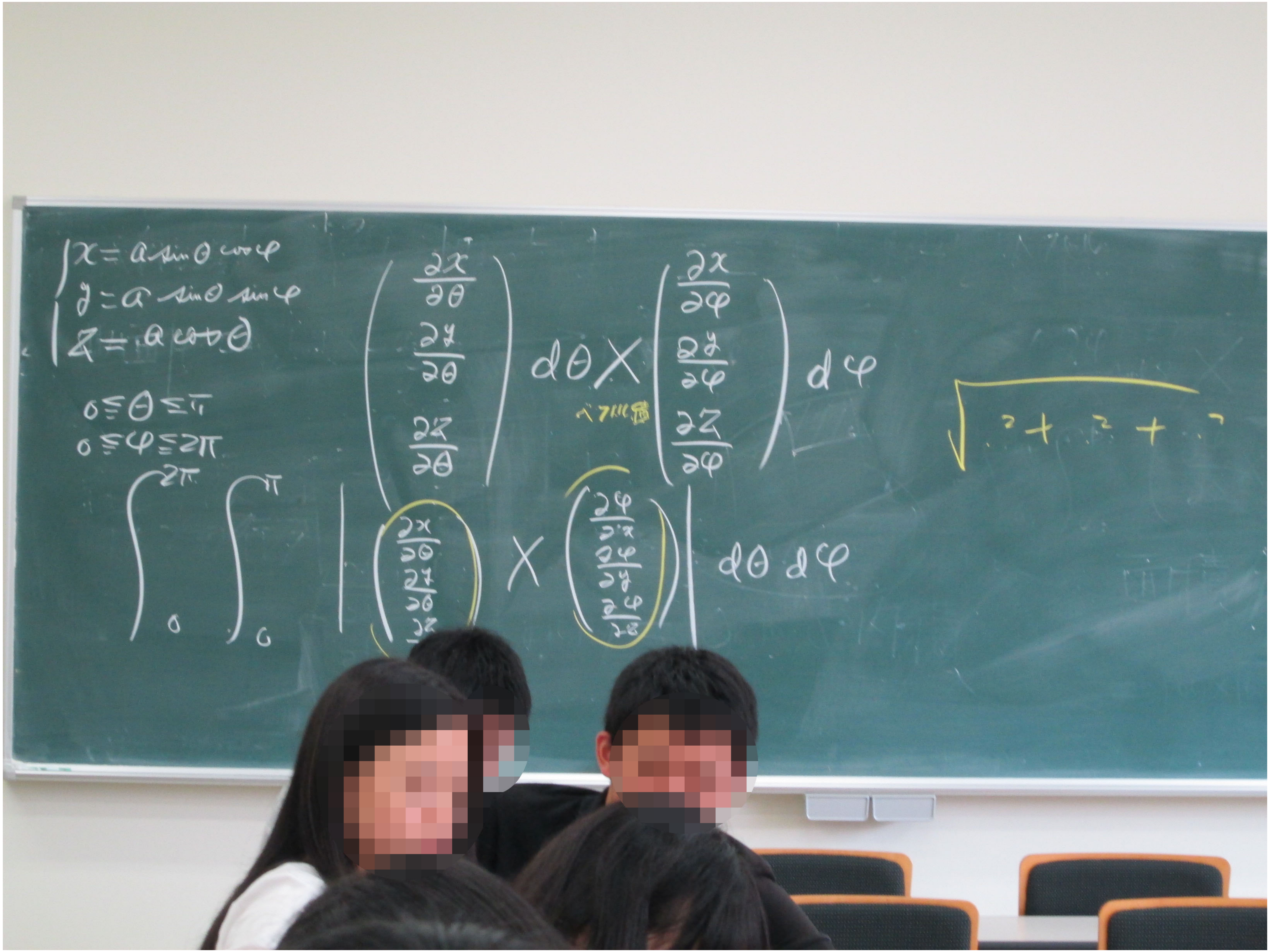
$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$
f(x,y,z)
$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$
fの勾配
gradient
微小
スカラー場
ベクトル場
力の場
流れの場
F
φ(b)
φ(a)
仕事
φ: [a,b] → $\mathbb{R}^3$ 曲線
$\int_a^b F(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$
線積分
仕事の総量
ダストレスチョーク
WHITE
Dustless Chalk



流れの場
Σ Σ
[a1, b1]×[a2, b2] ⟶ R3
paromete
(s,t)
(∂φ/∂s ds × ∂φ/∂t dt)・ff(φ(s,t))
∫a1 b1 ∫a2 b2 (∂φ/∂s × ∂φ/∂t)・ff dsdt
面積分



回転体の体積
表面積 4πa²
極座標
動径の長さ r ≧ 0
0 ≦ θ ≦ 2π
x = r cos θ
y = r sin θ
空間の極座標
正射影
動径の長さ r
0 ≦ θ ≦ π
0 ≦ φ ≦ 2π
x = r sin θ cos φ
y = r sin θ sin φ
z = r cos θ
原点中心
半径 a
球面
ダストレスチョーク
WHITE
DustlessChalk


x = a sinθ cosφ
y = a sinθ sinφ
z = a cosθ
0 ≦ θ ≦ π
0 ≦ φ ≦ 2π
dθ
dφ
ベクトル積
dθ dφ

No.

微積分

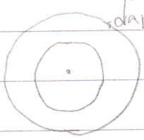
DATE .7.22

ベクトル解析　大い　紀元前5C

力学　17C

微積学 ⇒ 万有引力の法則　Newton

dark matter　水金地火木土



天体　Balkan星

一般相対性理論

日本軍　成功体験

日露戦争 1904 → ノモンハン事件 1939

電磁気学 19C

ファラデー　Maxwellの方程式

化学者　19C半ば

電場 ⇄ 磁場

⇐ 電磁波 の speed

ワトソン　X線　クリック

$R^2 \to R$　高さ, 気圧, 温度

$z = f(x,y)$

微分（(x_0, y_0) における）

線形写像 $R^2 \to R$

1×2の行列

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]$$

$\varphi: [a,b] \to R^2$　曲線

t　$(f\circ\varphi)'(t)$

$= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\,x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\,y'(t)$

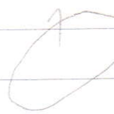
$= 0$

$f(x,y)$　$x = x(t)$　$y = y(t)$

$\frac{d}{dt}\left(f(x(t),y(t))\right)$

$t \mapsto (x(t), y(t))$　$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

内積が0　$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$　fの勾配 gradient

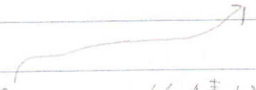
$f(x,y,z)$　$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$　スカラー場

ベクトル場 { 力の場, 流れの場 }

$\varphi: [a,b] \to R^3$　曲線

$$\int_a^b \mathbb{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

$\varphi(b)$



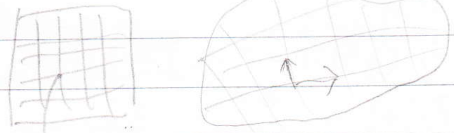
仕事の総量

$\varphi(a)$　線積分

ベクトル場 ー 流れの場

曲面 $\varphi: [a_1,b_1]\times[a_2,b_2] \to R^3$

paramete　s ∈　t ∈



(s,t)　$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}ds \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}dt\right)\cdot \mathbb{f}(\varphi(s,t))$

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\times\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\cdot \mathbb{f}\,ds\,dt$$

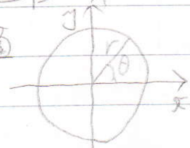
面積分

回転体の体積

球　$\frac{4}{3}\pi a^3$　表面積 $4\pi a^2$

極座標

平面

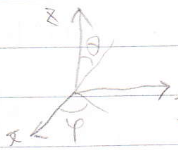


動径の長さ $r \geq 0$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$x = r\cos\theta$　$y = r\sin\theta$

空間の極座標



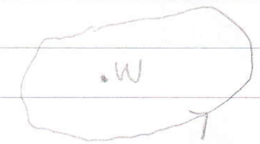
$0 \leq \theta \leq \pi$　$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

原点中心
半径a } 球面

No.
DATE 7.22 外書 7/24

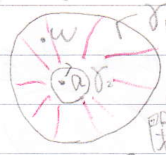
留数定理 f:正則



γ $f(w)=\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}dz$

fは局所的には巾級数で表示させる。

f 特異点



$\gamma_1\cup\gamma_2$ 閉曲線 $f(w)=\int_{\gamma_1\cup\gamma_2}\frac{f(z)}{z-w}dz$

$=\int_{\gamma_1}\frac{f(z)}{z-w}dz-\int_{\gamma_2}\frac{f(z)}{z-w}dz$

$=\int_{\gamma_1}\frac{f(z)}{(z-a)-(w-a)}dz$

$\frac{f(z)}{z-w}=\frac{f(z)}{(z-a)-(w-a)}=\frac{f(z)}{\left(\frac{z-a}{w-a}-1\right)(w-a)}$

$-\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}\frac{f(z)}{w-a}$

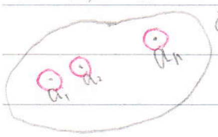
$-\left\{1+\frac{z-a}{w-a}+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^2+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^3+\cdots\right\}\frac{f(z)}{w-a}$

$=\frac{1}{w-a}\int f(z)dz+\frac{1}{(w-a)^2}\int(z-a)f(z)dz+\cdots$

$\alpha_1(w-a)^{-1}+\alpha_2(w-a)^{-2}+\alpha_3(w-a)^{-3}$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n(w-a)^n$ ローラン級数

留数定理 f正則 $\gamma\cup\gamma_1\cup\cdots\cup\gamma_n$ 閉曲線



γ $\int_\gamma f(z)dz$

$\int_{\gamma\cup\gamma_1\cup\cdots\cup\gamma_n}f(z)dz=0$

$0=\int_{\gamma\cup\gamma_1\cup\cdots\cup\gamma_n}f(z)dz=\int_\gamma f(z)dz-\int_{\gamma_1}f(z)dz-\cdots-\int_{\gamma_n}f(z)dz$

$\int_\gamma f(z)dz=\int_{\gamma_1}f(z)dz+\cdots+\int_{\gamma_n}f(z)dz$

7.6

$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}$ $(a>1)$

$z=e^{i\theta}$ とおくと

$dz=ie^{i\theta}d\theta$

(与式)$=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\frac12(e^{\theta}+e^{-\theta})}$

$=\int_{|z|=1}\frac{1}{a+\frac12(z+\frac1z)}\frac{1}{iz}dz$

$=\frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{z^2+2az+1}dz$

$=\frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z-(-a+\sqrt{a^2-1}))(z-(-a-\sqrt{a^2-1}))}$

$-a+\sqrt{a^2-1}\le1$ より

(与式)

$=\frac{2}{i}\cdot2\pi i\ \mathrm{Res}_{-a+\sqrt{a^2-1}}\frac{1}{z^2+2az+1}$

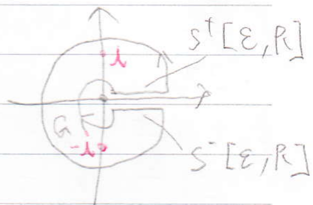
$=\frac{2}{i}\cdot2\pi i\ \frac{1}{(-a+\sqrt{a^2-1})-(-a-\sqrt{a^2-1})}$

$=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$

7.10

$-1<p<1$

$\int_0^\infty\frac{x^p}{1+x^2}dx$



$p=0$ のとき

$\int_0^\infty\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac\pi2}d\theta=\frac\pi2$

($x=\tan\theta$ と置換)

$p\neq0$ のとき

$\int_{\partial G}\frac{z^p}{1+z^2}dz=\underbrace{\int_{S^+[\varepsilon,R]}}_{I_1}+\underbrace{\int_{C_R[\varepsilon,R]}}_{I_2=0}-\underbrace{\int_{S^-[\varepsilon,R]}}_{I_3}-\underbrace{\int_{C_\varepsilon[\varepsilon,R]}}_{I_4=0}$

(左辺)$=\int_{\partial G}\frac{z^p}{1+z^2}dz$

$=2\pi i\left(\mathrm{Res}_{i}\frac{z^p}{1+z^2}+\mathrm{Res}_{-i}\frac{z^p}{1+z^2}\right)$

$=2\pi i\left(\frac{e^{p\log z}}{z+i}\Big|_{z=i}+\frac{e^{p\log z}}{z-i}\Big|_{z=-i}\right)$ $z=e^{\log z}$

$=\pi\left(e^{p\log i}-e^{p\log(-i)}\right)=\pi\left(e^{\frac12p\pi i}-e^{\frac32p\pi i}\right)$

(右辺)

$I_1-I_3=\int_\varepsilon^R\frac{z^p}{1+z^2}dz-\int_\varepsilon^R e^{2p\pi i}\frac{z^p}{1+z^2}dz$

$(1-e^{2p\pi i})\int_\varepsilon^R\frac{z^p}{1+z^2}dz$

$|I_2|=\left|\int_0^{2\pi}\frac{(Re^{i\theta})^p}{1+(Re^{i\theta})^2}Rie^{i\theta}d\theta\right|$

$\le\int_0^{2\pi}|\quad|d\theta\le\int_0^{2\pi}\frac{R^{p+1}}{R^2-1}d\theta$