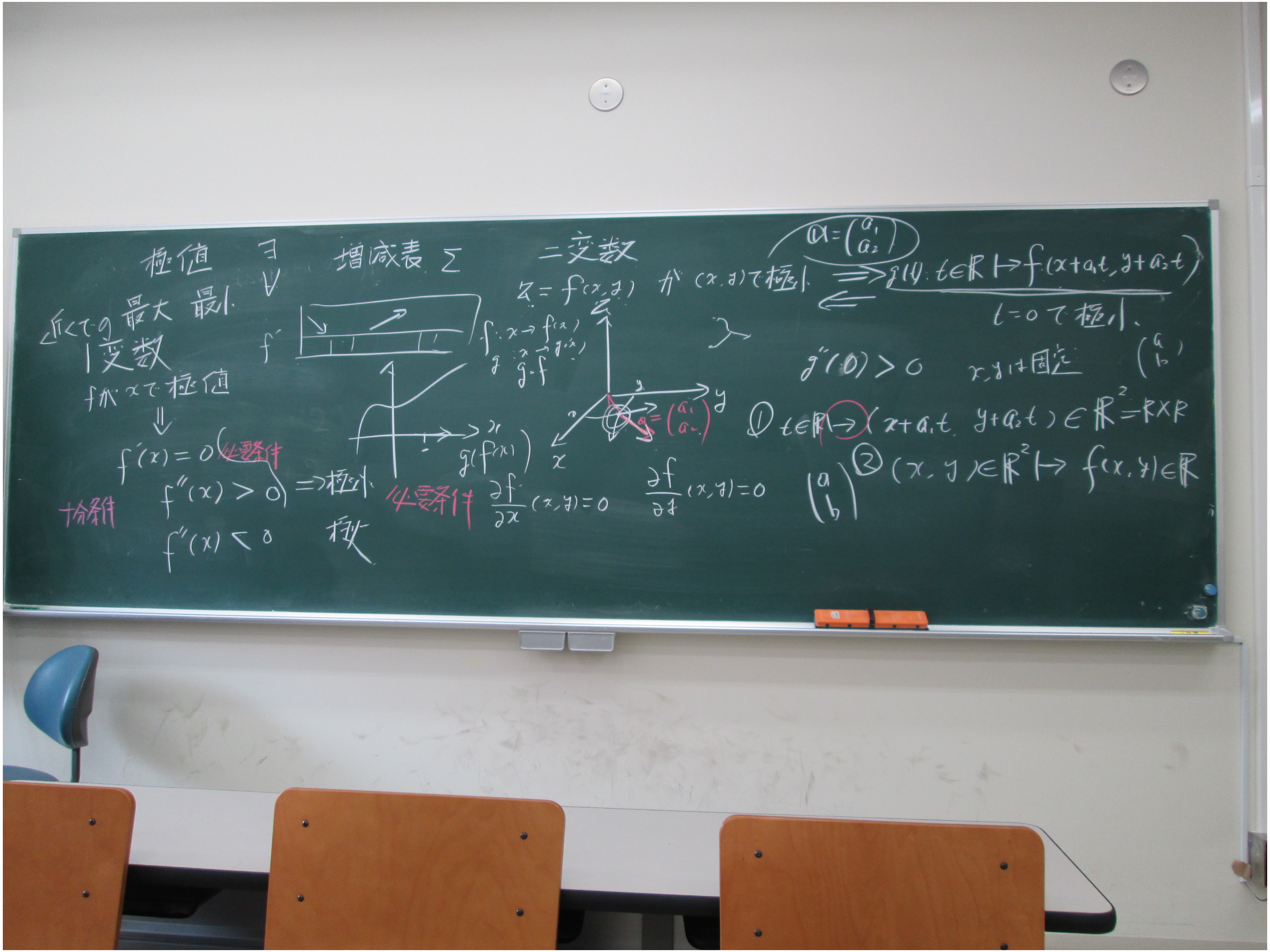
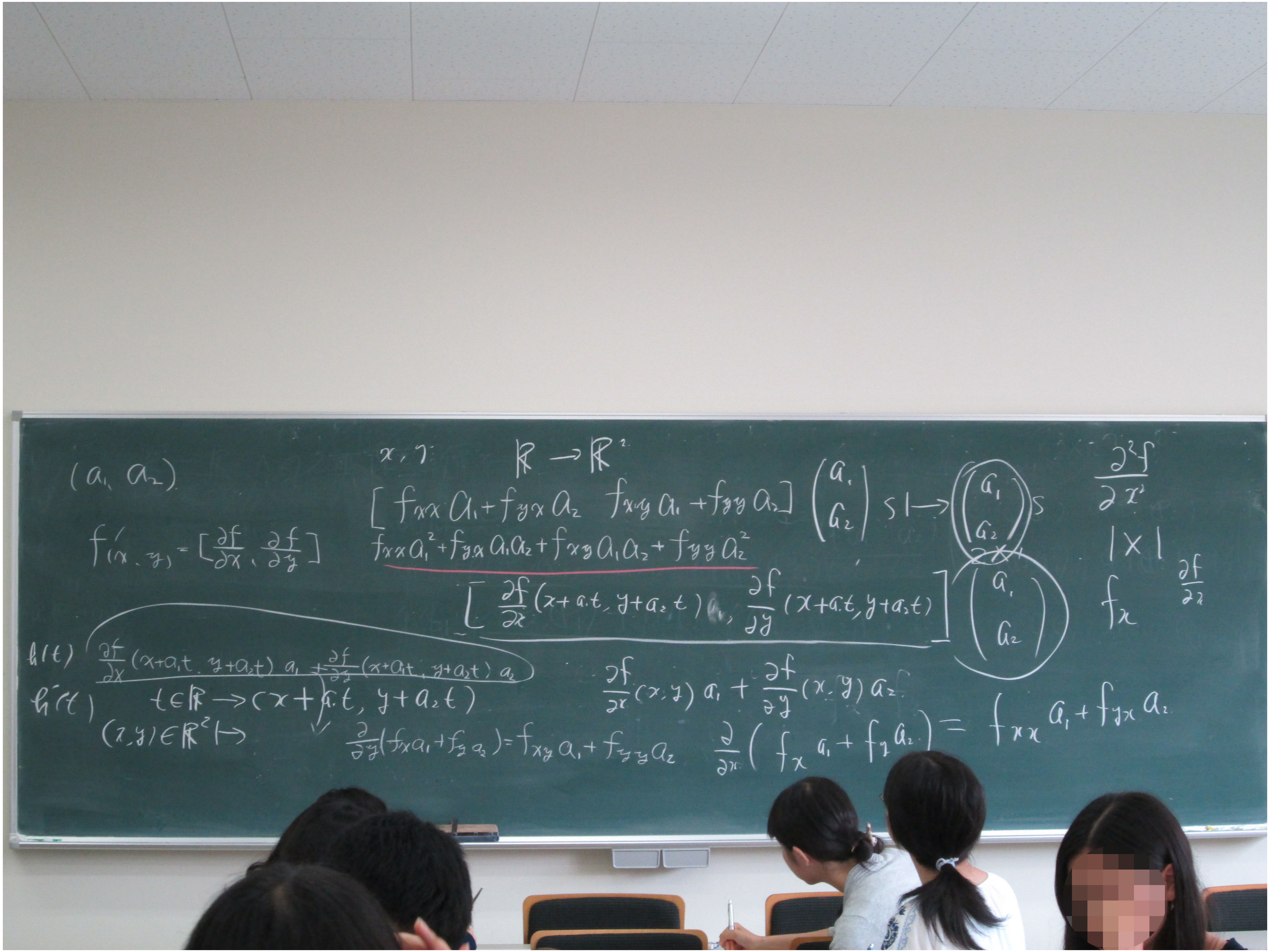
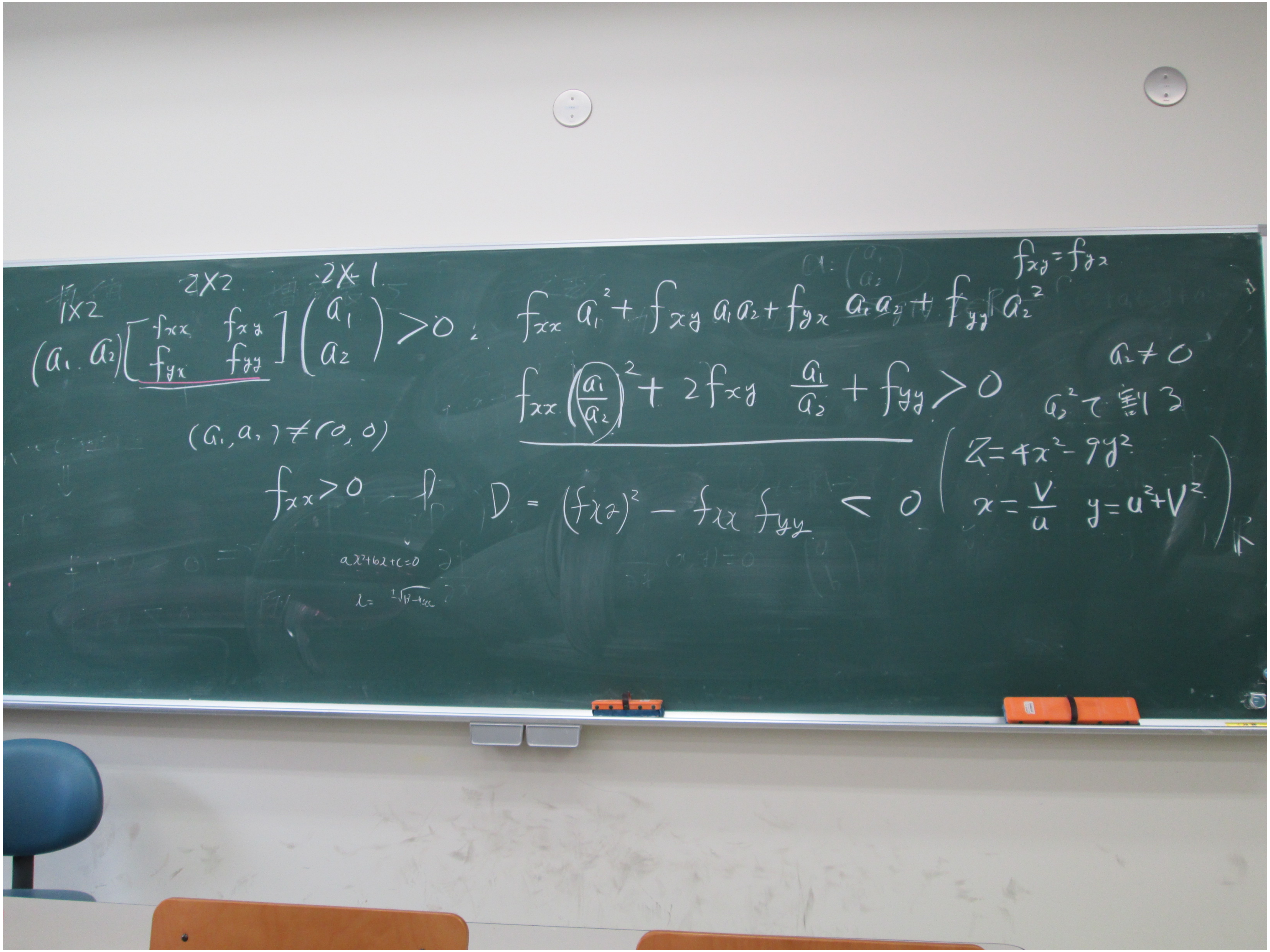


極値
∃
∀
増減表
Σ
二変数
最大 最小
1変数
fがxで極値
f'(x)=0 必要条件
十分条件
f''(x)>0 ⇒極小
f''(x)<0 極大
z=f(x,y) が (x,y)で極小
必要条件
∂f/∂x (x,y)=0
∂f/∂y (x,y)=0
a=(a1, a2)
g(t): t∈R ↦ f(x+a1t, y+a2t)
t=0で極小
g''(0)>0
x,yは固定
① t∈R ↦ (x+a1t, y+a2t) ∈ R^2=R×R
② (x,y)∈R^2 ↦ f(x,y)∈R



(a_1, a_2)
$f'(x,y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]$
x, y
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$[f_{xx}a_1 + f_{yx}a_2 \quad f_{xy}a_1 + f_{yy}a_2]$
$f_{xx}a_1^2 + f_{yx}a_1a_2 + f_{xy}a_1a_2 + f_{yy}a_2^2$
$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} s \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} s$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
$|x|$
f_x
$\frac{\partial f}{\partial x}$
$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x+a_1t, y+a_2t), \frac{\partial f}{\partial y}(x+a_1t, y+a_2t)\right] \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
$h'(t)$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x+a_1t, y+a_2t)a_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x+a_1t, y+a_2t)a_2$
$h(t)$ $t \in \mathbb{R} \to (x+a_1t, y+a_2t)$
$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)a_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)a_2$
$\frac{\partial}{\partial y}(f_xa_1 + f_ya_2) = f_{xy}a_1 + f_{yy}a_2$
$\frac{\partial}{\partial x}(f_xa_1 + f_ya_2) = f_{xx}a_1 + f_{yx}a_2$



1×2
2×2
2×1
$f_{xy}=f_{yx}$
$(a_1\ a_2)\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy}\end{bmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2\end{pmatrix}>0$
$f_{xx}a_1^2+f_{xy}a_1a_2+f_{yx}a_1a_2+f_{yy}a_2^2$
$a_2\neq0$
$f_{xx}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2+2f_{xy}\frac{a_1}{a_2}+f_{yy}>0$
a_2^2で割る
$(a_1,a_2)\neq(0,0)$
$z=4x^2-9y^2$
$f_{xx}>0$
$D=(f_{xy})^2-f_{xx}f_{yy}<0$
$x=\frac{v}{u}$ $y=u^2+v^2$
$ax^2+bx+c=0$

7/1 微積分

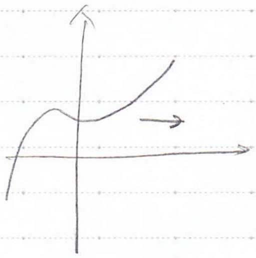
極値
↳ 近くでの最大・最小

1変数

fがxで極値

$\Downarrow$

$f'(x)=0$ 必要条件



十分条件

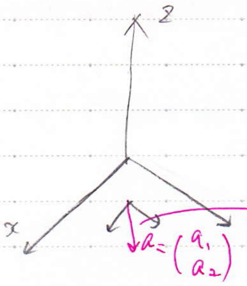
$f''(x)>0$ 極小

$f''(x)<0$ 極大

増減表

2変数

$z=f(x,y)$



→ 増減表どうやってかこう…?

$\vec{a}$を含むxy平面に垂直な面で切って傾きをみる!

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ 必要条件

$a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$

$z=f(x,y)$が(x,y)で極小 $\Rightarrow$ $t\in\mathbb{R} \longmapsto f(x+a_1t,\ y+a_2t)$

$\Leftarrow$ $t=0$で極小

すべてのaでやればすべての方向での極小がわかる!

$g(t): t\in\mathbb{R} \longmapsto f(x+a_1t,\ y+a_2t)$ とすると

$g''(0)>0$ となればよい

列ベクトル $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

x, yは固定

① $t\in\mathbb{R} \longmapsto (x+a_1t,\ y+a_2t)\in\mathbb{R}^2$

② $(x,y)\in\mathbb{R}^2 \longmapsto f(x,y)\in\mathbb{R}$

対応させる

No.

Date

①の関数の微分

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x+a_1t,\ y+a_2t),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x+a_1t,\ y+a_2t)\right]\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$$

①をtについて微分

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(x+a_1t,\ y+a_2t)a_1+\frac{\partial f}{\partial y}(x+a_1t,\ y+a_2t)a_2$$

かける

②

$$[f_{xx}a_1+f_{yx}a_2,\ f_{xy}a_1+f_{yy}a_2]\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$$

②を(x, y)で微分

$$f'(x,y)=\left[\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

$$=f_{xx}a_1^2+f_{yx}a_1a_2+f_{xy}a_1a_2+f_{yy}a_2^2$$

$$=\underbrace{(a_1\ \ a_2)}_{1\times 2}\underbrace{\begin{bmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{bmatrix}}_{2\times 2}\underbrace{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}}_{2\times 1}$$

g''(t)がでる!

$(a_1, a_2)\neq(0, 0)$のとき ← これ以外がすべての方向について考える。

$$(a_1\ \ a_2)\begin{bmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}>0$$ ← 極小値のとき

が正　$= D < 0$

$f_{xx}a_1^2+f_{xy}a_1a_2+f_{yx}a_1a_2+f_{yy}a_2^2>0$　$f_{xy}=f_{yx}$

$a_2\neq 0$のとき　a_2^2で割ると

$$f_{xx}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2+2f_{xy}\frac{a_1}{a_2}+f_{yy}>0$$

これに関する2次式　D　判別式 → 負だと解なし

$$D=(f_{xy})^2-f_{xx}f_{yy}<0$$

report 2

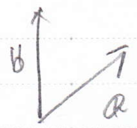
$z=4x^2-9y^2$

$x=\frac{v}{u}$, $y=u^2+v^2$

7/1 ②

行列式

$S(\mathbb{a}, \mathbb{b})$ = $\mathbb{a}$と$\mathbb{b}$で張られる平行四辺形の面積



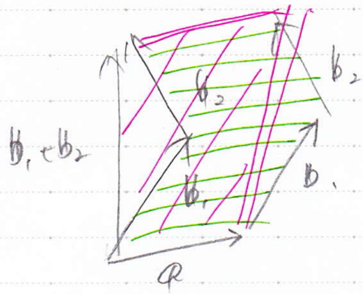
$\mathbb{a}$から$\mathbb{b}$に回したときに
時計回り:
反時計回り:

$$S(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = -S(\mathbb{a}, \mathbb{b}) \Rightarrow S(\mathbb{a}, \mathbb{a}) = -S(\mathbb{a}, \mathbb{a}) \rightarrow S(\mathbb{a}, \mathbb{a}) = 0$$

$$S(\alpha \mathbb{a}, \mathbb{b}) = \alpha S(\mathbb{a}, \mathbb{b})$$

$$S(\mathbb{a}, \beta \mathbb{b}) = \beta S(\mathbb{a}, \mathbb{b})$$

$$S(\mathbb{a}, \mathbb{b}_1 + \mathbb{b}_2) = S(\mathbb{a}, \mathbb{b}_1) + S(\mathbb{a}, \mathbb{b}_2)$$



$$S(\mathbb{a}_1 + \mathbb{a}_2, \mathbb{b}) = S(\mathbb{a}_1, \mathbb{b}) + S(\mathbb{a}_2, \mathbb{b})$$

$$S(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2) = 1$$

$$S(\mathbb{e}_2, \mathbb{e}_1) = -1$$

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \mathbb{e}_1 + a_2 \mathbb{e}_2$$

$$\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_1 \mathbb{e}_1 + b_2 \mathbb{e}_2$$

report

$S(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = S(a_1 \mathbb{e}_1 + a_2 \mathbb{e}_2, \_\_\_)$ ← 宿題にてんかいしてかくにん

⋮

$= a_1 b_2 - a_2 b_1$ ← これが残る

↓

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$