微積分（8コマ目）

$$e^{A} = E + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots$$ 　A = 2×2の行列

$$e^{A+B} = e^{A}e^{B} \quad (AB = BA)$$

特に、$B = -A$ の場合

$$e^{0} = E$$

$$e^{A+(-A)} = e^{0} = E \text{（単位行列）}$$
$$\parallel$$
$$e^{A}e^{-A}$$
$$\parallel$$
$$e^{-A}e^{A}$$

e^{A} は正則行列

- $Ae^{A} = e^{A}A$ ← e^{A} は A の多項式だから
- $e^{tA} = E + tA + \frac{1}{2}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + \cdots$ （t は実数を動く変数）

$$= E + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots$$

$$(e^{tA})' = \underset{0\text{行列}}{0} + A + \frac{2t}{2}A^2 + \frac{3t^2}{3!}A^3 + \cdots$$

$$= A\left\{E + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots\right\}$$

$$= Ae^{tA}$$

$$(e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA}A$$

$x' = ax$ 　微分方程式

$x = ce^{at}$ （c は定数）

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned}\right\} \text{連立微分方程式}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\overset{2\times 2\text{の行列}}{tA}} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (Ae^{tA}) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A \underbrace{e^{tA} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ があったとする。

$$\left\{ e^{-At} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}' = -Ae^{-At} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + e^{-At} \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

Leibnizの公式

$$= Ae^{-At} \left\{ -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解. $e^{-At} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$

両辺に e^{At} をかける

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = 5x + 3y \\ y' = -6x - 4y \end{cases}$$

固有多項式 $\varphi_A(t) = |tE - A|$

固有値を求める

$$= \begin{vmatrix} t-5 & -3 \\ 6 & t+4 \end{vmatrix} = (t-5)(t+4) + 18$$

$$= t^2 - t - 2$$

$$= (t-2)(t+1)$$

$$t = 2, -1.$$

異なる実根

Jordanの標準形

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P$$

$$e^{tA} = e^{tP^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P}$$

$$= e^{P^{-1}t\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P}$$

$$= P^{-1} e^{t\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} P$$

実戦的

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$x' = 2x$ $\quad x(t) = e^{2t} c_1$

$y' = -y$ $\quad y(t) = e^{-t} c_2$

$$e^{t\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$x = c_{11} e^{2t} + c_{12} e^{-t}$$

$$y = c_{21} e^{2t} + c_{22} e^{-t}$$

$$x' = 2c_{11}e^{2t} - c_{12}e^{-t}$$

$$= 5\{c_{11}e^{2t} + c_{12}e^{-t}\} + 3\{c_{21}e^{2t} + c_{22}e^{-t}\}$$

$$y' = 2c_{21}e^{2t} - c_{22}e^{-t}$$

$$= -6\{c_{11}e^{2t} + c_{12}e^{-t}\} - 4\{c_{21}e^{2t} + c_{22}e^{-t}\}$$

$\boxed{e^{2t} \text{ と } e^{-t} \text{ の係数に分ける}}$

$$\{\underline{2c_{11} - 5c_{11} - 3c_{21}}\}e^{2t} + \{\underline{-c_{12} - 5c_{12} \mp 3c_{22}}\}e^{-t} = 0$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad$$

$$-3c_{11} - 3c_{21} \qquad\qquad -6c_{12} \mp 3c_{22}$$

$$\left(\alpha e^{2t} + \beta e^{-t} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0\right)$$

$$c_{11} = -c_{21} \qquad\qquad -2c_{12} = c_{22}$$

$$\{\underline{2c_{21} + 6c_{11} + 4c_{21}}\}e^{2t} + \{\underline{-c_{22} + 6c_{12} + 4c_{22}}\}e^{-t} = 0$$

$$6c_{21} + 6c_{11} \qquad\qquad 6c_{12} + 3c_{22}$$

$$c_{11} = -c_{21} \qquad\qquad -2c_{12} = c_{22}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \text{一般解}$$

E(初期条件)

次の微分程方式を解け.

I. $\begin{cases} x' = -x \\ y' = x + 2y \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 3 \end{cases}$

II. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + y \\ x(1) = 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

$$x'' + bx' + cx = 0$$ ← 2階の方程式

$$x' = y$$
$$y' (= x'') = -by - cx$$

同じ

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix}$$

固有方程式

$$\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t & -1 \\ c & t+b \end{vmatrix}$$
$$= t^2 + bt + c$$

$b^2 - 4c > 0$ ならさきほどのやり方で解ける。

A：2×2の行列

$$e^A = E + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots$$

$$e^{A+B} = e^A e^B \quad (AB = BA)$$

$$B = -A \qquad e^0 = E$$

単位行列

$$e^{A+(-A)} = e^0 = E$$

$$\| \qquad \text{正則行列}$$

$$e^A e^{-A}$$

$$\|$$

$$e^{-A} e^A$$

3+3

$$Ae^A = e^A A \qquad (e^{at})' = ae^{at}$$

OCW

tは実数を動く変数

$$e^{tA} = E + tA + \frac{1}{2}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + \cdots$$

$$= E + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots$$

$$(e^{tA})' = 0 + A + \frac{2t}{2}A^2 + \frac{3t^2}{2\cdot 3!}A^3 + \cdots$$

$$= A\{E + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots\}$$

$$e^{tA}$$

$$(e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA}A$$

$x' = ax$　微分方程式

$x = Ce^{at}$（Cは定数）

$x' = ax$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

e $x' = ax$

Ce^{at}

$x' = a_{11}x + a_{12}y$
$= a_{21}x + a_{22}y$

連立微分方程式

2×2の行列

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{解}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (Ae^{tA}) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$= Ae^{tA} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$e^{At + -At} = E$

e^{At}

$$e^{At}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad e^{At} e^{-At} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ があったとする

Leibnizの公式

$$\left\{ e^{-At} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}' = -Ae^{-At} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$+ e^{-At} \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = Ae^{-At} \left\{ -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \end{pmatrix} \right.$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$

$= 5x + 3y$

$= -6x - 4y$

Jordan の標準形　　正則行列 P

$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P$

e

$= t^2 - t - 2$

$= (t-2)(t+1)$

$= 2, -1$

$$e^{tA} = e^{tP^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P}$$

$$= e^{P\,t\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P}$$

$$= P^{-1} e^{t\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} P$$

実戦的

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$x' = 2x$　　$x(t) = e^{2t} c_1$

$y' = -y$　　$y(t) = e^{-t} c_2$

$$e^{t\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \underline{P}^{-1}\begin{pmatrix}e^{2t}&0\\0&e^{-t}\end{pmatrix}\underline{P}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$$

$$x = C_{11}e^{2t} + C_{12}e^{-t} \qquad \begin{pmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}$$

$$e^{2t} + C_{22}e^{-t}$$

$$x' = 2C_{11}e^{2t} - C_{12}e^{-t}$$

$$= 5\{C_{11}e^{2t} + C_{12}e^{-t}\} + 3\{C_{21}e^{2t} + C_{22}e^{-t}\}$$

$$y' = 2C_{21}e^{2t} - C_{22}e^{-t}$$

$$= -6\{C_{11}e^{2t} + C_{12}e^{-t}\} - 4\{C_{21}e^{2t} + C_{22}e^{-t}$$

$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$

$x' = ax$

$$\boxed{\begin{cases} x' = 5x + 3y \\ y' = -6x - 4y \end{cases}}$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 初期条件

$A \begin{pmatrix} C_1 \\ C \end{pmatrix}$

e^{2t} と e^{-t} の係数に分ける

$\alpha = \beta = 0 \Leftarrow \alpha e^{2t} + \beta e^{-t} = 0$

$$\{\underline{2C_{11} - 5C_{11} - 3C_{21}}\} e^{2t} + \{\underline{-C_{12} - 5C_{12} - 3C_{22}}\} e^{-t} = 0$$

$$\underline{-3C_{11} - 3C_{21}} \qquad \underline{-6C_{12} - 3C_{22}}$$

$$C_{11} = -C_{21} \qquad -2C_{12} = C_{22}$$

$$\{\underline{2C_{21} + 6C_{11} + 4C_{21}}\} e^{2t} + \{\underline{-C_{22} + 6C_{12} + 4C_{22}}\} e^{-t} = 0$$

$$6C_{21} + 6C_{11} \qquad 6C_{12} + 3C_{22}$$

異なる実根

次の微分方程式を解け

$$x' = -x$$
$$y' = x + 2y$$
$$x(0) = 0$$
$$y(0) = 3$$

$$x' = 2x + y$$
$$y' = x + y$$
$$x(1) = 1$$
$$y(1) = 1$$

I, II

2階

$$x'' + bx' + cx = 0$$

$$b^2 - 4c > 0$$

$<$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' (= x'') = -by - cx \end{cases}$$

固有方程式

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix}$$

$$\varphi_A(t) = |tE - A|$$

$$= \begin{vmatrix} t & -1 \\ c & t+ \end{vmatrix} \quad bt + c$$